

# COMPOSITION A X-ENS 2015 - MP

Pour  $n$  supérieur à 1, l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$  est noté  $\mathbf{R}_n[X]$ . Étant donnés deux polynômes non nuls  $P$  et  $Q$  à coefficients réels, leur plus grand commun diviseur (pgcd) unitaire est noté  $P \wedge Q$ .

Si  $r$  est un second entier supérieur à 1,  $\mathcal{M}_{r,n}(\mathbf{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices à  $r$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients réels. La notation  $M = (m_{ij})$  signifie que le coefficient à la ligne  $i$  et colonne  $j$  de la matrice  $M$  est  $m_{ij}$ . On note  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbf{R})$  et  $I_n$  la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

Pour  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , on note  $\chi_M$  son polynôme caractéristique et  ${}^tM$  sa transposée. On note  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  (respectivement  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ ) l'ensemble des matrices symétriques réelles (resp. orthogonales) de taille  $n$ . Étant donné un  $n$ -uplet  $(a_1, \dots, a_n)$  de réels  $\Delta(a_1, \dots, a_n)$  désigne la matrice diagonale associée :

$$\Delta(a_1, \dots, a_n) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}.$$

Si  $M$  appartient à  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ , son spectre est réel. On convient de ranger ses valeurs propres (comptées avec leurs ordres de multiplicité) dans l'ordre *décroissant*. On note alors  $\text{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n)$  et  $\text{Sp}(M)$  est donc un  $n$ -uplet *ordonné*.

Un  $n+1$ -uplet  $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$  et un  $n$ -uplet  $\hat{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{R}^n$ , ordonnés, sont dit *enlacés* si  $\lambda_j \geq \mu_j \geq \lambda_{j+1}$  pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Ils sont dits *strictement enlacés* si  $\lambda_j > \mu_j > \lambda_{j+1}$  pour tout  $j$ . Par exemple,  $(4, 3, 2, 1)$  et  $(\pi, e, \sqrt{2})$  sont strictement enlacés.

## Questions préliminaires

- 1.(a) Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est un sous-groupe du groupe  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$  des matrices inversibles.  
(b) Montrer que  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est une partie compacte de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$
2. Soit  $M$  et  $N$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ . Montrer qu'il existe  $U$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  tel que  $N = U M U^{-1}$  si et seulement si  $\chi_M = \chi_N$ .
3. Soit  $\hat{\lambda} = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$  et  $\hat{\mu} = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n) \in \mathbf{R}^n$ . Soit  $x$  un réel. Formons

$$\hat{\lambda}' = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_i \geq x > \lambda_{i+1} \geq \dots \geq \lambda_{n+1})$$

en choisissant l'entier  $i$  dans  $\llbracket 0; n+1 \rrbracket$  convenablement. Si  $x > \lambda_i$  on a donc  $i = 0$ , tandis que si  $x \leq \lambda_{n+1}$ , on a  $i = n+1$ . On forme de même

$$\hat{\mu}' = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_j \geq x > \mu_{j+1} \geq \dots \geq \mu_n).$$

On suppose que  $\hat{\lambda}$  et  $\hat{\mu}$  sont enlacés. Montrer  $j \leq i \leq j+1$ . En examinant chacun des deux cas  $j = i$  ou  $j = i-1$ , montrer que  $\hat{\lambda}'$  et  $\hat{\mu}'$  sont enlacés.

## PARTIE I

Soit  $\hat{\mu} = (\mu_1 > \dots > \mu_n) \in \mathbf{R}^n$ . On se donne des entiers  $m_k$  supérieurs ou égaux à 1 pour  $k$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . On pose  $Q = \prod_{k=1}^n (X - \mu_k)^{m_k}$  et pour  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $P_j = \frac{Q}{X - \mu_j}$ .

4. On suppose dans cette question et la suivante que tous les  $m_k$  sont égaux à 1.
  - (a) Montrer que la famille  $(Q, P_1, P_2, \dots, P_n)$  est une base de  $\mathbf{R}_n[X]$ .
  - (b) Soit  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ . Vérifier  $(-1)^{j-1} P_j(\mu_j) > 0$ .
5. Soit  $P$  dans  $\mathbf{R}[X]$  un polynôme unitaire de degré  $n+1$ .

(a) Montrer qu'il existe un unique vecteur  $(a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  tel que

$$P = (X - a)Q - \sum_{j=1}^n \alpha_j P_j. \quad (1)$$

(b) On suppose que les nombres réels  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont tous strictement positifs. Montrer que  $P$  a  $n + 1$  racines réelles distinctes  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{n+1}$  et que  $\hat{\lambda} = (\lambda_1 > \dots > \lambda_{n+1})$  et  $\hat{\mu}$  sont strictement enlacés.

(c) Réciproquement on suppose que  $P$  a  $n + 1$  racines réelles distinctes  $\lambda_1 > \dots > \lambda_{n+1}$  et que  $\hat{\lambda} = (\lambda_1 > \dots > \lambda_{n+1})$  et  $\hat{\mu}$  sont strictement enlacés. Montrer que, pour tout  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\alpha_j > 0$ .

6. On revient au cas général, i.e.  $m_k$  quelconques. Montrer  $Q \wedge Q' = \prod_{k=1}^n (X - \mu_k)^{m_k - 1}$ .

7. Soit  $(a, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  dans  $\mathbf{R}^{n+1}$  et soit  $P$  dans  $\mathbf{R}[X]$  défini par la formule

$$P = (X - a)Q - \sum_{j=1}^n \alpha_j P_j.$$

(a) Donner une expression de  $P \wedge Q$  en fonction des  $\mu_j$ , des  $m_j$  et de l'ensemble  $J$  des indices pour lesquels  $\alpha_j = 0$ .

(b) On suppose que les nombres  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  sont positifs ou nuls. Montrer que les racines de  $P$  sont toutes réelles.

*On admettra par la suite que, dans ce cas le plus général, le  $(N + 1)$ -uplet des racines de  $P$  et le  $N$ -uplet des racines de  $Q$  sont enlacés.*

## PARTIE II

8. Soit  $r$  et  $s$  deux entiers naturels non nuls. Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_r(\mathbf{R})$ ,  $B$  dans  $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{R})$ ,  $C$  dans  $\mathcal{M}_{s,r}(\mathbf{R})$  et  $D$  dans  $\mathcal{M}_s(\mathbf{R})$ . On suppose de plus que  $A$  est inversible. On considère la matrice  $M$  de  $\mathcal{M}_{r+s}(\mathbf{R})$  ayant la forme par blocs suivante

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Trouver deux matrices  $U$  dans  $\mathcal{M}_{r,s}(\mathbf{R})$  et  $V$  dans  $\mathcal{M}_s(\mathbf{R})$  telles que

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & U \\ 0 & V \end{pmatrix}$$

et en déduire

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

*On pourra admettre par la suite que cette formule reste vraie lorsque  $M$  et ses blocs  $A, \dots, D$  sont à coefficients dans le corps  $\mathbf{R}(X)$  des fractions rationnelles.*

9. Soit  $M$  dans  $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbf{R})$  une matrice symétrique. On écrit  $M$  sous la forme par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A & y \\ {}^t y & a \end{pmatrix}$$

avec  $a$  réel,  $y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  et  $A$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ .

(a) Si le spectre de  $A$  est  $\text{Sp}(A) = (\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n)$ , montrer qu'il existe  $U$  dans  $\mathcal{O}_{n+1}(\mathbf{R})$  et  $z$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  tels que

$$UM {}^t U = \begin{pmatrix} \Delta(\mu_1, \dots, \mu_n) & z \\ {}^t z & a \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire qu'il existe des nombres réels positifs ou nuls  $\alpha_j$ , pour  $j$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , tels que

$$\chi_M = (X - a)Q_0 - \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{Q_0}{X - \mu_j}, \quad \text{où } Q_0 = \prod_{k=1}^n (X - \mu_k).$$

(c) Montrer que  $\text{Sp}(M)$  et  $\text{Sp}(A)$  sont enlacés.

10. Pour  $T = (t_{ij}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbf{R})$ , on note  $T_{\leq n}$  la matrice extraite de taille  $n$  dont les coefficients sont les  $t_{ij}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ . Soit  $M$  dans  $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbf{R})$ . Montrer que l'ensemble

$$\{\text{Sp}((UMU^{-1})_{\leq n}) \mid U \in \mathcal{O}_{n+1}(\mathbf{R})\},$$

noté  $\mathcal{C}_M$ , est une partie compacte de  $\mathbf{R}^n$ .

11. On suppose de plus que les valeurs propres de  $M$  sont distinctes. On a donc  $\text{Sp}(M) = (\lambda_1 > \dots > \lambda_{n+1})$ .

(a) Soit  $\hat{\mu} = (\mu_1 > \dots > \mu_n)$  tel que  $\text{Sp}(M)$  et  $\hat{\mu}$  soient strictement enlacés. Montrer que  $\hat{\mu}$  appartient à  $\mathcal{C}_M$ .

(b) Montrer

$$\mathcal{C}_M = \{\hat{\mu} \mid \text{Sp}(M) \text{ et } \hat{\mu} \text{ sont enlacés}\}. \quad (2)$$

### PARTIE III

On considère l'application  $\text{Diag}_n$  de  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{R}^n$  envoyant  $M = (m_{ij})$  sur  $(m_{11}, m_{22}, \dots, m_{nn})$ . Soit  $M$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ . Dans cette partie, on se propose d'étudier l'ensemble suivant

$$\mathcal{D}_M = \{\text{Diag}_n(UMU^{-1}) \mid U \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})\}.$$

12. On étudie d'abord le cas  $n = 2$ . On note alors  $\text{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2)$ .

Montrer que  $\mathcal{D}_M$  est le segment de  $\mathbf{R}^2$  dont les extrémités sont  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $(\lambda_2, \lambda_1)$ .

13. Soit  $M = (m_{ij})$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ . On note  $\text{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ . On se propose de démontrer que, pour tout  $s$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , on a :

$$\sum_{i=1}^s m_{ii} \leq \sum_{i=1}^s \lambda_i. \quad (3)$$

(a) Que pensez-vous du cas  $s = n$  ?

(b) Exprimer  $\sum_{i=1}^{n-1} m_{ii}$  au moyen des valeurs propres de la matrice  $M_{\leq n-1}$  obtenue en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne de  $M$ . En déduire l'inégalité (3) lorsque  $s = n - 1$ .

(c) En procédant par récurrence sur  $n$ , montrer l'inégalité (3) pour tout  $s$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ .

### PARTIE IV

14. On note  $E$  l'espace vectoriel  $\mathbf{R}^2$  muni du produit scalaire standard et de la base canonique  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ . On définit une base  $\mathcal{C} = \{\omega_1, \omega_2\}$  de  $E$  par  $\omega_1 = e_1$  et  $\omega_2 = \frac{1}{2}(e_1 + \sqrt{3}e_2)$ .

(a) Soit  $s_1$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\mathbf{R}\omega_1$ . Montrer que la matrice de  $s_1$  dans la base  $\mathcal{C}$  est  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(b) Soit  $s_2$  la symétrie orthogonale par rapport à la droite  $\mathbf{R}\omega_2$ . Montrer que la matrice de  $s_2$  dans la base  $\mathcal{C}$  est  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

15. Soit  $H$  l'ensemble des vecteurs  $(m_1, m_2, m_3)$  de  $\mathbf{R}^3$  tels que  $m_1 + m_2 + m_3 = 0$ . On note  $H^+$  le sous-ensemble des  $(m_1, m_2, m_3)$  de  $H$  tels que  $m_1 \geq m_2 \geq m_3$ . On considère l'application  $\varphi$  de  $H$  dans  $E$  donnée par

$$\varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1 - m_2)\omega_1 + (m_2 - m_3)\omega_2 .$$

- (a) Montrer que  $\varphi$  est un isomorphisme linéaire. Décrire  $\varphi(H^+)$ .  
 (b) Montrer que, pour tout  $(m_1, m_2, m_3)$  dans  $H$ , on a

$$s_1 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_1, m_3, m_2) \quad \text{et} \quad s_2 \circ \varphi(m_1, m_2, m_3) = (m_2, m_1, m_3) .$$

- (c) Soit  $\hat{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in H$  tel que  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ . On note  $\mathcal{Q}_{\hat{\lambda}}$  l'ensemble des  $(m_1, m_2, m_3)$  de  $H^+$  tels que  $m_1 \leq \lambda_1$  et  $m_1 + m_2 \leq \lambda_1 + \lambda_2$ . Montrer que  $\varphi(\mathcal{Q}_{\hat{\lambda}})$  est un quadrilatère dont on décrira les sommets.

16. Soit  $M$  dans  $\mathcal{S}_3(\mathbf{R})$  une matrice de trace nulle. On note  $\text{Sp}(M) = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3)$ . On se propose de décrire  $\varphi(\mathcal{D}_M)$ .

- (a) Soit  $(m_1, m_2, m_3)$  dans  $H$ . Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, 3\}$ . Montrer  $(m_1, m_2, m_3) \in \mathcal{D}_M \iff (m_{\sigma(1)}, m_{\sigma(2)}, m_{\sigma(3)}) \in \mathcal{D}_M$ .  
 (b) En utilisant la question 13, montrer que l'intersection  $H^+ \cap \mathcal{D}_M$  est incluse dans  $\mathcal{Q}_{\hat{\lambda}}$ .  
 (c) Soit  $(m_1, m_2, m_3)$  dans  $\mathcal{D}_M$ . Montrer que le segment de  $H$  dont les sommets sont  $(m_1, m_2, m_3)$  et  $(m_2, m_1, m_3)$  est inclus dans  $\mathcal{D}_M$ . On pourra utiliser la question 12.  
 De même, montrer que le segment de  $H$  dont les sommets sont  $(m_1, m_2, m_3)$  et  $(m_1, m_3, m_2)$  est inclus dans  $\mathcal{D}_M$ .  
 (d) Montrer que  $\mathcal{D}_M$  contient  $\mathcal{Q}_{\hat{\lambda}}$ .  
 (e) Montrer que si  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$  alors  $\varphi(\mathcal{D}_M)$  est un hexagone, dont on déterminera les sommets.