Première composition de mathématiques
X 2001 – MP

PARTIE 1

On désigne par S le plan complexe $\mathbf{C}$ privé du sous-ensemble $-\mathbf{N} - 1/2 = \{-1/2, -3/2, \cdots\}$. Pour tout s dans S on note (E_s) l'équation différentielle

$$2x(1-x)f''(x) + (2s+1-(2s+3)x)\, f'(x) - sf(x) = 0\ .$$

On cherche une solution de (E_s) sous la forme d'une série entière

$$f_s(x) = \sum_{n\geq 0} a_n(s)x^n \quad \text{avec} \quad a_0 = 1\ .$$

1. Écrire $a_{n+1}(s)$ en fonction de $a_n(s)$.
2. Déterminer la limite de $\dfrac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)}$ lorsque s n'est pas un entier négatif ou nul.
3. Montrer que le rayon de convergence de la série est égal à 1 ou à $+\infty$ et que sa somme $f_s(x)$ est effectivement une solution de (E_s).
4. Montrer que la fonction $(s, x) \mapsto f_s(x)$ est continue sur $S \times \,]-1; 1[$.
5. On considère maintenant l'équation différentielle

$$(E'_s) \qquad t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t) + s(1-s)(1-t^2)F(t) = 0\,, \quad t \in \,]0; 1[\ .$$

   a) Ramener sa résolution à celle de (E_s) en cherchant $F(t)$ sous la forme $t^s f(t^2)$.
   [On rappelle que $\dfrac{\mathrm{d}t^s}{\mathrm{d}t} = st^{s-1}$.]

   b) Montrer que, si s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$, les fonctions $\Phi_s(t) = t^s f_s(t^2)$ et $\Phi_{1-s}(t) = t^{1-s} f_{1-s}(t^2)$ forment une base de l'espace des solutions de (E'_s).

PARTIE 2

On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ tels que $y > 0$; on pose $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$.

6. Démontrer les résultats suivants :

   a) Pour tout $z \in \mathcal{H}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, le nombre complexe $\dfrac{z\cos(\theta) - \sin(\theta)}{z\sin(\theta) + \cos(\theta)}$ est bien défini et appartient à $\mathcal{H}$ (on précisera sa partie imaginaire).

   b) Si l'on pose $A_\theta(z) = \dfrac{z\cos(\theta) - \sin(\theta)}{z\sin(\theta) + \cos(\theta)}$, on obtient un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{R}$ dans le groupe (pour la composition des fonctions) des bijections de $\mathcal{H}$ dans lui-même.

   c) La fonction réelle sur $\mathcal{H}$: $z \mapsto c(z) = \dfrac{|z|^2 + 1}{2\,\mathrm{Im}\, z}$ est invariante par les transformations A_θ, c'est-à-dire $\forall z \in \mathcal{H}$, $\forall \theta \in \mathbf{R}$, $c\left(A_\theta(z)\right) = c(z)$.

   d) Si z est différent de i, on a $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $\theta' - \theta \in \pi\mathbf{Z}$.

7. On fixe un point z_0 de $\mathcal{H}$ distinct de i.
   a) Vérifier que les images de z_0 par A_θ, pour $\theta \in \mathbf{R}$, sont incluses dans le cercle de centre $ic(z_0)$ et de rayon $(c(z_0)^2 - 1)^{1/2}$.
   b) Montrer que tout point de ce cercle est obtenu ainsi.
8. On définit une application indéfiniment différentiable U de $]0;1[\times \mathbf{R}$ dans $\mathcal{H}$ par $U(t,\theta) = A_\theta(it)$.
   a) On note $J(t,\theta)$ le déterminant jacobien de U. Montrer $J(t,\theta) = \mathrm{Im}\left(\overline{\dfrac{\partial U}{\partial t}}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\right)$ puis en déduire que $J(t,\theta)$ ne s'annule pas sur $]0;1[\times \mathbf{R}$.
   b) Démontrer les assertions suivantes :
      i. $U\left(]0;1[\times \mathbf{R}\right) = \mathcal{H}'$ en notant $\mathcal{H}' = \mathcal{H} \setminus \{i\}$;
      ii. on a $U(t,\theta) = U(t',\theta')$ si et seulement si $t = t'$ et $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$.

PARTIE 3

On désigne par $C^\infty(\mathcal{H}')$ l'espace des fonctions complexes de classe C^∞ sur $\mathcal{H}'$ et celui des fonctions de classe C^∞ sur $]0;1[\times \mathbf{R}$ qui sont périodiques de période π par rapport à θ par $C^\infty(]0;1[\times \mathbf{R})_{per}$.

On **admet** le résultat suivant, conséquence de la question 8a) et du *théorème d'inversion locale* :

Pour tout (t,θ) dans $]0;1[\times \mathbf{R}$, il existe un voisinage ouvert V de (t,θ) dans $]0;1[\times \mathbf{R}$ et un voisinage ouvert W de $U(t,\theta)$ dans $\mathcal{H}'$ tels que la bi-restriction de U à V et W soit une bijection de classe C^∞ ainsi que sa bijection réciproque.

9. Montrer qu'en associant à toute fonction φ de $C^\infty(\mathcal{H}')$ la fonction $\psi = \varphi \circ U$, on obtient un isomorphisme, qu'on notera V, de $C^\infty(\mathcal{H}')$ sur $C^\infty(]0;1[\times \mathbf{R})_{per}$.

   On considère l'opérateur différentiel sur $\mathcal{H}'$ défini par
   $$D = y^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) \ ;$$
   on **admet** que, pour tout $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, on a $D(\varphi \circ A_\theta) = D(\varphi) \circ A_\theta$.

   On désigne par $\tilde{D}$ l'endomorphisme de $C^\infty(]0;1[\times \mathbf{R})_{per}$ défini par
   $$\tilde{D} = V \circ D \circ V^{-1} \ .$$

10. Pour tout élément (t,θ') de $]0;1[\times \mathbf{R}$ et tout $\theta \in \mathbf{R}$, on pose :
   $$\tau_\theta(t,\theta') = (t, \theta + \theta') \ .$$
   Vérifier que l'on a :
   a) $V(\varphi) \circ \tau_\theta = V(\varphi \circ A_\theta)$ pour $\varphi \in C^\infty(\mathcal{H}')$ et $\theta \in \mathbf{R}$.
   b) $\tilde{D}(\psi \circ \tau_\theta) = \tilde{D}(\psi) \circ \tau_\theta$ pour $\psi \in C^\infty(]0;1[\times \mathbf{R})_{per}$, $\theta \in \mathbf{R}$.

   On désigne par s un nombre complexe et par φ_s la fonction sur $\mathcal{H}$ définie par
   $$\varphi_s(z) = \int_0^\pi \left(\mathrm{Im}\, A_\theta(z)\right)^s \mathrm{d}\theta \ .$$

11. Montrer que φ_s est de classe C^∞, est invariante par les A_θ, et est solution de l'équation $D(\varphi_s) = s(s-1)\varphi_s$.
 [On pourra considérer la fonction donnée par $\omega(z) = (\operatorname{Im} z)^s$.]
 On définit une fonction F_s sur $]0, +\infty[$ par $F_s(t) = \varphi_s(it)$.
12. Comparer $F_s(t)$ et $F_s\left(\dfrac{1}{t}\right)$.
13. Montrer $F_s = F_{1-s}$.
 [On pourra faire le changement de variable $\cot(\theta) = u$ dans l'intégrale définissant $F_s(t)$.]
 On suppose maintenant que s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + 1/2$. On pourra admettre que, si une fonction ψ est de la forme $\psi(t, \theta) = F(t)$, on a

$$\tilde{D}(\psi)(t, \theta) = \frac{1}{1-t^2}\left[t^2(1-t^2)F''(t) - 2t^3F'(t)\right] .$$

14. Démontrer l'existence d'une famille de nombres complexes λ_s tels que l'on ait

$$F_s = \lambda_s \Phi_s + \lambda_{1-s}\Phi_{1-s}$$

 (les fonctions Φ_s et Φ_{1-s} ont été définies à la question 5b).
15. En supposant $\operatorname{Re} s < 1/2$, exprimer λ_s sous la forme d'une intégrale sur l'intervalle $]0; \pi[$.

Nota : l'ensemble $\mathcal{H}$ est appelé *demi-plan de Poincaré* et est le cadre d'une géométrie non euclidienne ; les transformations $z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ (a, b, c, d réels et $ad - bc = 1$) jouent un rôle analogue à celui des déplacements du plan euclidien, les transformations A_θ un rôle analogue à celui des rotations. Enfin l'opérateur différentiel D est l'analogue du laplacien.

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – X 2001 – MP

PARTIE 1

1. Si f_s est une solution de (E_s) avec un rayon de convergence non nul, le premier membre de l'équation est développable en série entière et est identiquement nul, i.e. tous les coefficients de son développement sont nuls. Par identification il vient successivement $(2s+1)a_1(s) = sa_0(s)$, $4a_2(s) + 2(2s+1)a_2(s) - (2s+3)a_1(s) - sa_1(s) = 0$ i.e. $2(2s+3)a_2(s) = 3(s+1)a_1(s)$, et pour $n \geq 2$

$$-2n(n-1)a_n(s) + 2(n+1)na_{n+1}(s) + (2s+1)(n+1)a_{n+1}(s) - (2s+3)na_n(s) - sa_n(s) = 0$$

soit, puisque $-2s$ n'est pas un entier impair,

$$a_{n+1}(s) = \frac{(2n+1)(s+n)}{(n+1)(2s+2n+1)}a_n(s) = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)\left(1 - \frac{1}{2s+2n+1}\right)a_n(s)\ .$$

Finalement, pour tout entier n, $\boxed{a_{n+1}(s) = \left(1 - \frac{1}{2(n+1)}\right)\left(1 - \frac{1}{2(s+n)+1}\right)a_n(s).}$

2. Pour $-s$ non entier, il résulte de la relation précédente et de $a_0 = 1$ que tous les termes $a_n(s)$ sont non nuls et qu'on a $\boxed{\lim_n \frac{a_{n+1}(s)}{a_n(s)} = 1.}$

3. Par comparaison avec une série géométrique (ou règle de d'Alembert), f_s a un rayon de convergence égal à 1 si $-s \notin \mathbf{N}$. Si $-s \in \mathbf{N}$, alors $a_{-s+1}(s) = 0$ et donc, par une récurrence immédiate, $a_n(s) = 0$ pour $n > s$. Autrement dit f_s est alors un polynôme de degré $-s$ (puisque les autres coefficients sont non nuls) et est donc une série entière de rayon de convergence infini : $\boxed{f_s \text{ a un rayon de convergence égal à 1 ou } +\infty.}$

   Réciproquement si on définit f_s comme la somme de ces séries sur l'intervalle $]-1,1[$, par convergence normale sur tous les segments inclus dans $]-1,1[$, les dérivées première et seconde de f_s sont obtenues par dérivation terme à terme et $\boxed{f_s \text{ est donc solution de } (E_s) \text{ sur }]-1,1[.}$

4. La formule trouvée en 1. permet de conclure par une récurrence immédiate que, pour tout entier naturel n, $a_n(s)$ est une fonction rationnelle sur S et y est donc continue. Par produit, pour n dans $\mathbf{N}$, $(s,x) \mapsto a_n(s)x^n$ est continue sur $S\times]-1,1[$.

   Soit I un segment inclus dans $]-1,1[$ et K une partie bornée incluse dans S. On note $I = [a,b]$, $\alpha = \max(|a|,|b|)$ et M un majorant de $|s|$ pour s dans K.

   En particulier pour n dans $\mathbf{N}$, s dans K et x dans I, si $n \geq M+1$ alors, par inégalité triangulaire, $|2(s+n)+1| \geq 2n - 2M - 1 \geq 1$ et donc $|a_{n+1}(s)x^{n+1}| \leq \alpha|a_n(s)x^n|$ d'après la formule trouvée en 1. Par comparaison à une série géométrique (règle de d'Alembert), la série $\sum_n a_n(s)x^n$ est donc normalement convergente pour s dans K et x dans I. Sa somme est donc continue sur $K \times I$.

   Comme la continuité est un phénomène local et que $S\times]-1,1[$ est réunion de compacts de la forme $K \times I$, on en déduit que $\boxed{f_s(x) \text{ est continue sur } S\times]-1,1[.}$

5.

a) Soit F une solution de (E'_s). Alors F est de classe C^2 sur $]0;1[$ et donc f définie par $f(t) = t^{-s/2}F(\sqrt{t})$ est également de classe C^2 sur $]0;1[$. On a alors, pour t dans $]0;1[$, $F(t) = t^s f(t^2)$ et il vient $F'(t) = 2t^{s+1}f'(t^2) + st^{s-1}f(t^2)$ puis $F''(t) = 4t^{s+2}f''(t^2) + 2(2s+1)t^s f'(t^2) + s(s-1)t^{s-2}f(t^2)$ et donc, puisque F est solution de (E'_s) :

$$2t^{s+2}\left[2t^2(1-t^2)f''(t^2) + (2s+1-(2s+3)t^2)f'(t^2) - sf(t^2)\right] = 0\ .$$

Il en résulte, puisqu'on a $t^{s+2} \neq 0$ pour $t \in\ ]0;1[$, que

$\boxed{f \text{ est solution de } (E_s) \text{ sur }]0;1[\text{ si et seulement si } F \text{ est solution de } (E'_s) \text{ sur }]0;1[.}$

b) D'après ce qui précède et 3., Φ_s est solution de (E'_s). Puisque les équations (E'_s) et (E'_{1-s}) sont identiques et qu'on a $1-s \in S$ car $s \notin \mathbf{Z} + \dfrac{1}{2}$, Φ_{1-s} est également solution de (E'_s).
Puisque $t^2(1-t^2)$ n'est pas nul si $t \in\ ]0;1[$, l'équation (E'_s) peut se récrire sous forme résolue et elle vérifie alors les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles linéaires (à coefficients non constants). L'espace des solutions est donc un espace vectoriel de dimension 2 et (Φ_s, Φ_{1-s}) en est une base si et seulement si pour un t dans $]0;1[$, le déterminant $\Phi_s(t)\Phi'_{1-s}(t) - \Phi'_s(t)\Phi_{1-s}(t)$ est non nul. D'après les calculs précédents, ce déterminant est égal à

$$(1-2s)f_s(t^2)f_{1-s}(t^2) + 2t^2\left[f_s(t^2)f'_{1-s}(t^2) - f'_s(t^2)f_{1-s}(t^2)\right]\ .$$

Or, pour $t = 0$, cette expression est bien définie et vaut $1-2s$. Par continuité en t de f_s et f_{1-s} sur $]-1,1[$, il en résulte que le déterminant considéré n'est pas nul au voisinage de $t = 0$, à droite. Par conséquent $\boxed{\Phi_s \text{ et } \Psi_{1-s} \text{ forment une base des solutions de } (E'_s).}$

PARTIE 2

6.

a) On se place dans l'espace vectoriel complexe $\mathbf{C}^2$. Alors pour z dans $\mathbf{C}$ et θ dans $\mathbf{R}$, la quantité $z\sin(\theta) + \cos(\theta)$ représente le déterminant du vecteur $(z,1)$ avec le vecteur $(\cos(\theta), -\sin(\theta))$.
Aucun de ces vecteurs n'étant nul, le déterminant n'est nul que si $(\cos(\theta), -\sin(\theta))$ est un multiple non nul de $(z,1)$. Puisque les coordonnées du premier vecteur sont réelles et que celles du second ne sont nulles ni l'une, ni l'autre, on en déduit d'une part que le facteur multiplicatif est réel puisque $1 \in \mathbf{R}$ et qu'il ne l'est pas puisque $z \notin \mathbf{R}$. On en déduit que $z\sin(\theta) + \cos(\theta)$ est non nul et donc que $\boxed{\dfrac{z\cos(\theta) - \sin(\theta)}{z\sin(\theta) + \cos(\theta)} \text{ est bien défini.}}$

Avec les mêmes notations, on en déduit, en multipliant par les quantités conjuguées,

$$\mathrm{Im}\left(\frac{z\cos(\theta) - \sin(\theta)}{z\sin(\theta) + \cos(\theta)}\right) = \frac{\mathrm{Im}\left((z\cos(\theta) - \sin(\theta))(\overline{z}\sin(\theta) + \cos(\theta))\right)}{|z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2}\ ,$$

i.e. $\boxed{\mathrm{Im}\left(\dfrac{z\cos(\theta) - \sin(\theta)}{z\sin(\theta) + \cos(\theta)}\right) = \dfrac{\mathrm{Im}(z)}{|z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2}.}$

b) Soit θ et θ' deux réels et z dans $\mathcal{H}$, on peut interpréter $A_\theta(z)$ comme étant le complexe tel que $(A_\theta(z), 1)$ soit un vecteur directeur de la droite de $\mathbf{C}^2$ dont un autre vecteur directeur est $(z\cos(\theta) - \sin(\theta), z\sin(\theta) + \cos(\theta))$, i.e. l'image par R_θ du vecteur $(z, 1)$ où R_θ est l'endomorphisme de $\mathbf{C}^2$ dont la matrice représentative dans la base canonique est $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.
Or $\theta \mapsto R_\theta$ est un homomorphisme de groupe de $(\mathbf{R}, +)$ dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{C}), \times)$, d'après les formules d'addition. On en déduit que $(A_{\theta'}(A_\theta(z)), 1)$ est proportionnel à un vecteur directeur de $R_{\theta'}((A_\theta(z), 1))$ et donc aussi à un vecteur directeur de $R_{\theta'} \circ R_\theta((z, 1))$. Il est donc égal à $(A_{\theta'+\theta}(z), 1)$ puisque $R_{\theta'} \circ R_\theta = R_{\theta'+\theta}$. Comme $R_0 = \mathrm{Id}_{\mathbf{C}^2}$, on a en particulier $A_{-\theta}(A_\theta(z)) = z$ et donc A_θ est injective, et $A_\theta(A_{-\theta}(z)) = z$ et donc A_θ est surjective. Il en résulte que A_θ est bijective de $\mathcal{H}$ dans lui-même, i.e. $\theta \mapsto A_\theta$ est une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ et la formule $A_{\theta'} \circ A_\theta = A_{\theta'+\theta}$ montre que c'est en fait un $\boxed{\text{homomorphisme de groupes.}}$

c) Soit θ dans $\mathbf{R}$ et z dans $\mathcal{H}$.
On vérifie directement que R_θ conserve le produit scalaire hermitien sur $\mathbf{C}^2$, i.e. si $(z'_1, z'_2) = R_\theta((z_1, z_2))$ alors $|z'_1|^2 + |z'_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$. Or l'image de $(z, 1)$ par R_θ est $\lambda(A_\theta(z), 1)$ avec $\lambda = z\sin(\theta) + \cos(\theta)$ par définition. Il en résulte $|z|^2 + 1 = |z\sin(\theta) + \cos(\theta)|^2 \left(|A_\theta(z)|^2 + 1\right)$. D'après 6.a), on en déduit que $\boxed{c \text{ est invariante par } A_\theta.}$

d) Soit θ dans $\mathbf{R}$ et z dans $\mathcal{H}$. On a $A_\theta(z) = z$ si et seulement si la droite dirigée par $(z, 1)$ est fixe par R_θ. Or les valeurs propres de R_θ sont $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ (valeur propre double en cas d'égalité de ces deux quantités) et, si elles sont distinctes, les droites propres sont les droites engendrées par $(\pm i, 1)$ respectivement. Si on a affaire à des valeurs propres doubles, alors $\theta \in \pi\mathbf{Z}$ et R_θ est scalaire et donc A_θ est l'identité.
On suppose de plus $z \neq i$. Alors $(z, 1)$ n'est vecteur propre de R_θ que si R_θ est scalaire, i.e. $\theta \in \pi\mathbf{Z}$. Comme on a une action de groupe, pour θ' dans $\mathbf{R}$, on a $A_\theta(z) = A_{\theta'}(z)$ si et seulement si $A_{\theta'-\theta}(z) = z$, et donc si et seulement si $\boxed{\theta' - \theta \in \pi\mathbf{Z}.}$

7.

a) Soit θ dans $\mathbf{R}$. Comme c est invariante par la transformation A_θ, en notant $z = A_\theta(z_0)$, il vient $c(z) = c(z_0)$ et donc $|z^2| - 2c(z_0)\,\mathrm{Im}(z) + 1 = 0$ ou encore

$$|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}(\overline{(ic(z_0))}z) + |ic(z_0)|^2 = c(z_0)^2 - 1\ .$$

On reconnait l'équation en complexe d'un cercle de centre $ic(z_0)$. Il est non vide si et seulement si $c(z_0)^2 - 1 > 0$, auquel cas cette quantité est le carré de son rayon.
Or l'inégalité entre moyenne géoémtrique et quadratique donne, pour u dans $\mathbf{C}$

$$|\,\mathrm{Im}(u)| \leq |u| \leq \frac{|u|^2 + 1}{2}$$

avec égalité si et seulement si $|u| = 1$ et $|\,\mathrm{Im}(u)| = |u|$, i.e. $u = \pm i$. Il en résulte $c(z_0) > 1$ et donc les images de z_0 par les transformations A_θ sont incluses dans
$\boxed{\text{le cercle de centre } ic(z_0) \text{ et de rayon } \sqrt{c(z_0)^2 - 1}.}$

b) Soit (C) le cercle précédent et φ l'application de $[0,\pi]$ dans (C) donnée par $\varphi(\theta) = A_\theta(z_0)$. C'est une fonction de classe C^∞ en tant que quotient partout défini de polynômes trigonométriques.

Supposons qu'elle ne soit pas surjective. On dispose alors de z_1 dans (C) qui n'est pas dans l'image de φ. On considère alors l'application ψ de $[0,\pi]$ dans $]-\pi,\pi[$ donnée par $\psi(\theta) = \mathrm{Arg}\left(-\dfrac{\varphi(\theta) - ic(z_0)}{z_1 - ic(z_0)}\right)$. C'est une application continue puisque Arg est continue sur le cercle unité privé de -1. Puisque la restriction de φ à $[0,\pi[$ est injective, d'après 6.d), il en va de même pour ψ en tant que composée de telles fonctions. D'après le théorème de la bijection, la restriction de ψ à $[0,\pi[$ est donc strictement monotone, mais ceci est en contradiction avec la continuité de ψ en π puisque $\varphi(\pi) = \varphi(0)$ et donc aussi $\psi(0) = \psi(\pi)$. Par conséquent φ est surjective et donc $\boxed{\text{tout point du cercle est de la forme } A_\theta(z_0).}$

8.

a) On note $U = (x,y)$. Pour deux complexes z_1 et z_2 donnés par $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ avec x_1, x_2, y_1 et y_2 réels, on a $\mathrm{Im}(\overline{z_1}z_2) = x_1y_2 - x_2y_1$ et donc, puisque $\dfrac{\partial U}{\partial t} = \dfrac{\partial x}{\partial t} + i\dfrac{\partial y}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial U}{\partial \theta} = \dfrac{\partial x}{\partial \theta} + i\dfrac{\partial y}{\partial \theta}$,

$$J(t,\theta) = \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial \theta} - \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial \theta} = \mathrm{Im}\left(\overline{\frac{\partial U}{\partial t}}\frac{\partial U}{\partial \theta}\right).$$

Pour z fixé dans $\mathcal{H}$, on pose $f_z = z\cos + \sin$. On a alors $f_z'' = -f_z$ et, pour θ dans $\mathbf{R}$, $A_\theta(z) = \dfrac{f_z'(\theta)}{f_z(\theta)}$. Il vient, pour t dans $]0;1[$ et θ dans $\mathbf{R}$ et en posant $z = it$,

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{i}{(z\sin(\theta) + \cos(\theta))^2} = \frac{i}{f_z(\theta)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{f_z'' f_z - (f_z')^2}{f_z^2} = -\frac{f_z^2 + (f_z')^2}{f_z^2}$$

et donc

$$J(t,\theta) = \frac{\mathrm{Re}\left(f_z(\theta)^2 + f_z'(\theta)^2\right)}{|f_z(\theta)|^4}$$

soit $\boxed{J(t,\theta) = \dfrac{1-t^2}{\left(\cos^2(\theta) + t^2\sin^2(\theta)\right)^2}.}$

b) Soit z dans $\mathcal{H}'$. D'après le calcul effectué en 7.a), on a $c(z) > 1$. Or, pour t dans $]0;1[$, on a $c(it) = \dfrac{1+t^2}{2t}$ et donc $t \mapsto c(it)$ est une bijection strictement décroissante de $]0;1[$ sur $]1,+\infty[$. On en déduit qu'il existe t dans $]0;1[$ tel que $c(z) = c(it)$. Or, d'après les calculs effectués en 7.a), les lignes de niveau de la fonction c sont des cercles. D'après 7.b), il existe donc θ réel tel que $U(t,\theta) = A_\theta(t) = z$. Autrement dit $\boxed{U(]0;1[\times\mathbf{R}) = \mathcal{H}'.}$

De plus si, pour t et t' dans $]0;1[$ et θ et θ' réels, on a $U(t,\theta) = U(t',\theta')$, alors, d'après 6.d), $c(it) = c(it')$ et donc $t = t'$ par injectivité de $t \mapsto c(it)$. On a alors $A_\theta(it) = A_{\theta'}(it)$ et donc, d'après 6.d) et puisque $it \neq i$, $\boxed{\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}.}$

PARTIE 3

9. Comme U est un quotient partout défini de deux fonctions polynomiales en t et polynomiales trigonométriques en θ, elle est de classe C^∞. D'après 8.b), elle est périodique de période π en θ et à valeurs dans $\mathcal{H}'$. Par conséquent si φ appartient à $C^\infty(\mathcal{H}')$, alors $\varphi\circ U \in C^\infty(]0;1[\times\mathbf{R})_{per}$.

   De plus l'application $\varphi \mapsto \varphi \circ U$ est linéaire par définition de la composition et injective puisque l'image de U est $\mathcal{H}'$.

   Soit maintenant ψ dans $C^\infty(]0;1[\times\mathbf{R})_{per}$. Soit z dans $\mathcal{H}'$, on dispose de (t,θ) dans $]0;1[\times\mathbf{R}$ tel que $U(t,\theta) = z$ d'après 8.b). De plus si (t',θ') dans $]0;1[\times\mathbf{R}$ vérifie $U(t',\theta') = z$, alors, d'après 8.b), $t = t'$ et $\theta - \theta' \in \pi\mathbf{Z}$, de sorte que $\psi(t,\theta) = \psi(t,\theta')$. Il est donc licite de définir $\varphi(z)$ par $\varphi(z) = \psi(t,\theta)$. On a ainsi défini une fonction sur $\mathcal{H}'$.

   D'après 8.a) U admet un déterminant jacobien non nul en tout point de $]0;1[\times\mathbf{R}$ (qui est un ouvert de $\mathbf{R}^2$) et donc en particulier en (t,θ). On dispose donc d'un voisinage ouvert V_z de (t,θ) dans $]0;1[\times\mathbf{R}$ et d'un voisinage ouvert W_z de z dans $\mathcal{H}'$ tels que U induise un C^∞-difféomorphisme de V_z sur W_z, d'après le théorème d'inversion locale. On note U_z la restriction de U à V_z. Puisque la valeur de φ ne dépend pas du représentant choisi, on a $\varphi = \varphi\circ U\circ U_z^{-1} = \psi\circ U_z^{-1}$ sur W_z. On en déduit que φ est de classe C^∞ dans un voisinage de z et donc, puisque z est arbitraire, φ est de classe C^∞ sur $\mathcal{H}'$.

   Par conséquent, $\boxed{V \text{ est un isomorphisme de } C^\infty(\mathcal{H}') \text{ sur } C^\infty(]0;1[\times\mathbf{R})_{per}.}$

10.

   a) Soit t dans $]0;1[$, θ et θ' des réels et φ dans $C^\infty(\mathcal{H}')$. Soit $\psi = V(\varphi)$ de sorte qu'on a $\varphi = \psi\circ U$ et $V(\varphi)(t,\theta) = \varphi(A_\theta(it))$.

   On a $V(\varphi)\circ\tau_\theta(t,\theta') = \varphi\left(A_{\theta+\theta'}(it)\right) = \varphi\circ A_\theta(A_{\theta'}(it)) = V(\varphi\circ A_\theta)(t,\theta')$, d'après 6.b), et donc $\boxed{V(\varphi)\circ\tau_\theta = V(\varphi\circ A_\theta).}$

   b) Soit ψ dans $C^\infty(]0;1[\times\mathbf{R})_{per}$ et θ un réel. On note $\varphi = V^{-1}(\psi)$ et on a donc, d'après ce qui précède, $\psi\circ\tau_\theta = V(\varphi\circ A_\theta)$ et donc $V^{-1}(\psi\circ\tau_\theta) = \varphi\circ A_\theta$. Il vient

$$\tilde{D}(\psi\circ\tau_\theta) = V\circ D(\varphi\circ A_\theta) \quad \text{et} \quad \tilde{D}(\psi)\circ\tau_\theta = V\left(D(\varphi)\right)\circ\tau_\theta = V\left(D(\varphi)\circ A_\theta\right)\,,$$

   d'où, puisqu'on a admis $D(\varphi\circ A_\theta) = D(\varphi)\circ A_\theta$, $\boxed{\tilde{D}(\psi\circ\tau_\theta) = \tilde{D}(\psi)\circ\tau_\theta.}$

11. Pour y dans $\mathbf{R}_+^*$ et x dans $\mathbf{R}$, on a

$$\varphi_s(x+iy) = \int_0^\pi \omega\circ A_\theta(x+iy)\,\mathrm{d}\theta\,.$$

   La fonction $z\mapsto \mathrm{Im}(z)$ étant $\mathbf{R}$-linéaire, elle est de classe C^∞ sur $\mathbf{C}$. Comme sa restriction à $\mathcal{H}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, sa composée avec $t\mapsto t^s$ est de classe C^∞ sur $\mathcal{H}$. Il en résulte que ω est de classe C^∞ sur $\mathcal{H}$. Par composition il en résulte que $(x,y,\theta)\mapsto\omega\circ A_\theta(x+iy)$ est de classe C^∞ en les trois variables et donc que les dérivées partielles de tout ordre par rapport à x et y sont continues. Si K est un compact inclus dans $\mathcal{H}$, ces dérivées partielles sont donc bornées sur le compact $K\times[0,\pi]$. D'après le théorème de dérivation sous le signe intégral, on en déduit que φ_s est de classe C^∞ sur K. Comme le caractère C^∞ est local, $\boxed{\varphi_s \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathcal{H}.}$

Soit θ' dans $\mathbf{R}$ et z dans $\mathcal{H}$. On a

$$\varphi_s \circ A_{\theta'}(z) = \int_0^\pi \omega \circ A_{\theta+\theta'}(z)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\theta'}^{\theta'+\pi} \omega \circ A_\theta(z)\,\mathrm{d}\theta = \varphi_s(z)$$

par π-périodicité de A_θ et donc de $\theta \mapsto \omega \circ A_\theta(z)$. Autrement dit $\boxed{\varphi_s \text{ est invariante par les } A_\theta.}$

Techniquement, ici, **l'énoncé est incorrect** puisque l'opérateur D est défini pour les fonctions sur $\mathcal{H}'$. On peut retreindre φ_s à $\mathcal{H}'$ dans sa définition (et alors on pouvait montrer plus directement que $V^{-1}(\varphi_s)$ est dans $C^\infty(]0;1[\times\mathbf{R})_{per}\ldots$), soit le restreindre pour cette assertion, soit prolonger tout ce qui précède à $\mathcal{H}$. Il n'est pas clair de savoir ce qui est attendu. La question 12 est bancale si on retire $t = 1$. En même temps la question 14. fait comme si F était définie sur $]0;1[$. Quoiqu'il en soit, on va supposer ici qu'on peut bien appliquer la relation admise $D(\varphi \circ A_\theta) = D(\varphi) \circ A_\theta$ à $\varphi = \omega$.

On déduit du théorème de dérivation sous le signe intégral qu'on a

$$D(\varphi_s)(z) = \int_0^\pi D(\omega \circ A_\theta)(z)\,\mathrm{d}\theta\ .$$

Or on a admis $D(\omega \circ A_\theta) = D(\omega) \circ A_\theta$ et on a $D(\omega) = s(s-1)\omega$, il vient donc $\boxed{D(\varphi_s) = s(s-1)\varphi_s.}$

12. Soit t dans $\mathbf{R}_+^*$, on a, par invariance par A_θ avec $\theta = \dfrac{\pi}{2}$,

$$F_s(t) = \varphi_s(it) = \varphi_s \circ A_{\pi/2}(it) = \varphi_s\left(\frac{i}{t}\right) = F_s\left(\frac{1}{t}\right)\ ,$$

i.e. $\boxed{F_s(t) = F_s\left(\frac{1}{t}\right).}$

Si φ_s n'est défini que sur $\mathcal{H}'$, alors F_s n'est défini que sur $]0;1[\cup]1,+\infty[$, et donc on doit ôter la valeur $t = 1$ dans ce qui précède.

13. Par définition, on a

$$F_s(t) = \int_0^\pi \frac{t^s}{(\cos^2(\theta) + t^2\sin^2(\theta))^s}\,\mathrm{d}\theta\ .$$

L'intégrande est continu sur $[0,\pi]$ puisque t est dans $\mathbf{R}_+^*$ et définit donc une fonction intégrable sur $]0,\pi[$. Comme cot est un C^∞-difféomorphisme de $]0,\pi[$ sur $\mathbf{R}$, il vient par changement de variable

$$F_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^s}{(t^2+u^2)^s(1+u^2)^{1-s}}\,\mathrm{d}u\ .$$

On en déduit, en utilisant la question précédente,

$$F_{1-s}(t) = F_{1-s}\left(\frac{1}{t}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{s-1}}{(t^{-2}+u^2)^{1-s}(1+u^2)^s}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{-s}}{(1+t^2u^2)^{1-s}(1+u^2)^s}t\,\mathrm{d}u\ .$$

On effectue alors le changement de variable affine $tu = v$ et il vient

$$F_{1-s}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t^{-s}}{(1+v^2)^{1-s}(1+t^{-2}v^2)^s} \, \mathrm{d}v = F_s(t)$$

et donc $\boxed{F_s = F_{1-s}.}$

14. Dans cette question, on suppose que l'énoncé restreint toutes les fonctions à l'intervalle $]0;1[$. On a alors $F_s(t) = \varphi_s(it)$ et on convient que φ_s désigne la restriction de cette fonction à $\mathcal{H}'$. Soit $\psi_s = V(\varphi_s)$. On a donc $\tilde{D}(\psi_s) = V \circ D(\varphi_s) = s(s-1)\psi_s$ d'après 11.
Or, pour t dans $]0;1[$ et θ réel, $\psi(t,\theta) = F_s(t)$. D'après l'égalité admise, on en déduit que F_s est solution de (E'_s). D'après 5.b), puisque s n'appartient pas à $\mathbf{Z} + \dfrac{1}{2}$, on dispose de λ_s et μ_s dans $\mathbf{C}$ tels que $F_s = \lambda_s \Phi_s + \mu_s \Phi_{1-s}$. Puisque $F_s = F_{1-s}$, par unicité de la décomposition dans une base, on a $\mu_s = \lambda_{1-s}$, i.e. $\boxed{F_s = \lambda_s \Phi_s + \lambda_{1-s}\Phi_{1-s}.}$

15. D'après 5.b), on a, pour t dans $]0;1[$,

$$F_s(t) = \lambda_s t^s f_s(t^2) + \lambda_{1-s} t^{1-s} f_{1-s}(t^2) \ .$$

Or, puisque $Re(s) < \dfrac{1}{2}$, au voisinage de 0 à droite on a $t^{1-s} = o(t^s)$. De plus f_s et f_{1-s} tendent vers 1 en 0, à droite, d'après 3. et leur définition. Il en résulte $F_s(t) = \lambda_s t^s + o(t^s)$. Par ailleurs, par définition, on a

$$F_s(t) = t^s \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos^2(\theta) + t^2\sin^2(\theta))^s} = 2t^s \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos^2(\theta) + t^2\sin^2(\theta))^s}$$

puisque l'intégrande est symétrique par rapport à $\pi/2$. Si $Re(s) < 0$, alors l'intégrande est continu en (t,θ) sur le compact $[0,1/2] \times [0,\pi/2]$. D'après le théorème de continuité sous le signe intégral, on en déduit

$$\lim_{t \to 0^+} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{(\cos^2(\theta) + t^2\sin^2(\theta))^s} = \int_0^{\pi/2} \cos^{-2s}(\theta) \, \mathrm{d}\theta \ .$$

Si $Re(s) \geq 0$, alors l'intégrande est majoré, indépendamment de t, par la fonction $\cos^{-2\,\mathrm{Re}(s)}$. Cette fonction est continue sur $[0,\pi/2[$, et même sur $[0,\pi/2]$ si $\mathrm{Re}(s) = 0$. Sinon on a $\cos^{-2\,\mathrm{Re}(s)} \sim \left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)^{-2Re(s)}$ au voisinage de $\pi/2$ à gauche et donc puisque $-2\,\mathrm{Re}(s) > -1$, par le critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives et par comparaison avec une intégrale de Riemann, cette fonction est intégrable sur $]0,\pi/2[$. Il résulte du théorème de convergence dominée qu'on a dans tous les cas $\boxed{\lambda_s = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{-2s}(\theta) \, \mathrm{d}\theta.}$