Deuxième composition de mathématiques
École polytechnique 2000 – MP

Ce problème a pour objet l'étude de certains cônes dans des espaces euclidiens.

On désigne par E l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$ ($n\geq 1$), par $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ son produit scalaire usuel, et par $\|\cdot\|$ la norme associée. Pour toute partie X de E, on note $X^\perp$ (resp. X^+) l'ensemble des éléments x de E satisfaisant $\langle x \mid y \rangle = 0$ (resp. $\langle x \mid y \rangle \geq 0$) pour tout y de X.

Une partie C de E sera appelée *cône à faces* s'il existe une famille finie d'éléments $c_1, \ldots, c_r$ ($r > 0$) de E telle que C soit l'ensemble des combinaisons linéaires $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \geq 0$. On supposera toujours les c_i non nuls, et on dira qu'ils *engendrent* C. Enfin on appelle *face* de C toute partie de C de la forme $C \cap \{w\}^\perp$ avec $w \in C^+$.

La première partie est indépendante des suivantes.

PARTIE I

1) Vérifier que tout sous-espace vectoriel non nul de E est un cône à faces.

2) Supposant $n = r = 2$, décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles C, C^+ et donner sous chaque figure la liste des faces de C suivant les diverses positions relatives de c_1 et c_2.

3) Supposant que $n = r = 3$ et que (c_1, c_2, c_3) est une base orthogonale de E, décrire sans démonstration C, C^+ et les faces de C.

PARTIE II

On se propose, dans cette partie, de démontrer que tout cône à faces est fermé dans E.

4)

4.a. Soit K une partie compacte de E ne contenant pas 0. Montrer que l'ensemble des éléments de la forme λx, où $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $x \in K$, est fermé dans E.

4.b. Ce résultat subsiste-t-il si l'on suppose K seulement fermé, ou si K, compact, contient 0 ?

5) On considère maintenant un cône à faces C engendré par des éléments $c_1, \ldots, c_r$.

5.a. Montrer que C est fermé lorsqu'il ne contient aucune droite vectorielle. [On pourra introduire l'ensemble K des éléments $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i c_i$ avec $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1$.]

5.b. Soit V un sous-espace vectoriel de E (éventuellement réduit à 0) contenu dans C et distinct de C. On note P le projecteur orthogonal de E sur $V^\perp$. Vérifier que $P(C)$ est un cône à faces contenu dans C.

5.c. Supposant que $P(C)$ contient une droite vectorielle, construire un sous-espace vectoriel de E contenu dans C et contenant strictement V.

5.d. Montrer que C est fermé dans E.

PARTIE III

6) On se propose ici de démontrer que tout cône à faces C vérifie $\left(C^+\right)^+ = C$.

6.a. Soit a un élément de E. Montrer que la fonction réelle définie sur C par $c \mapsto \|c - a\|$ atteint sa borne inférieure en un point unique de C. On le notera $p(a)$.

6.b. Déterminer le signe de $\langle p(a) - a \mid c\rangle$ lorsque $c \in C$, ainsi que la valeur de $\langle p(a) - a \mid p(a)\rangle$.

6.c. Conclure.

PARTIE IV

On souhaite maintenant démontrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (on appelle *demi-espace fermé* tout sous-ensemble de E de la forme $\{a\}^+$ avec $a \in E$, $a \neq 0$).

7) Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un cône à faces C :

(α) le sous-espace vectoriel de E engendré par C est égal à E ;

(β) l'intérieur de C est non vide.

8) On suppose dans cette question les conditions de la question 7 satisfaites pour un cône à faces C.

8.a. Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un élément x de C :

(α') x est un point frontière de C ;

(β') x appartient à une face de C distincte de C.

8.b. Que subsisterait-il de ce résultat si l'on ne supposait pas satisfaites les conditions de la question 7 ?

8.c. Soit x un point de E n'appartenant pas à C. Construire une face F de C, distincte de C et ayant la propriété suivante : pour tout $w \in C^+$ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $\langle x \mid w\rangle < 0$. [On pourra considérer le segment de droite joignant x à un point x_0 de l'intérieur de C].

9)

9.a. Montrer que l'ensemble des faces d'un cône à faces est fini.

9.b. Montrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.

10) Déduire de ce qui précède que, si C est un cône à faces, il en est de même de C^+.

Deuxième composition – X 2000 - MP

PARTIE I

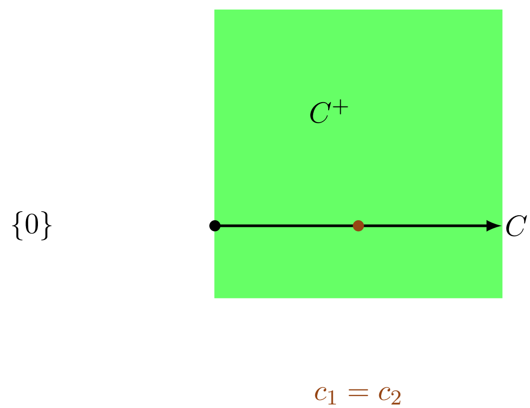
1) Soit F un sous-espace vectoriel non nul de E, et $(c_1, \cdots, c_p)$ une base de F. Alors tout vecteur de F est combinaison linéaire à coefficients positifs de $(c_1, \cdots, c_p, -c_1, \cdots, -c_p)$, i.e. cette partie engendre F en tant que cône à faces. Il en résulte que $\boxed{F \text{ est un cône à faces.}}$

2) Remarquons que la notion de cône à faces dépend de $(c_1, \cdots, c_p)$ à un scalaire multiplicatif strictement positif près. On peut donc se ramener au cas où ils sont unitaires et alors la position relative de deux vecteurs est donnée par l'angle entre ces deux vecteurs. Puisqu'on peut aussi changer l'ordre, on peut considérer un angle géométrique, i.e. la position relative est caractérisée par $\langle c_1 \mid c_2\rangle$ ou encore par le cosinus de l'angle θ, i.e. $\widehat{(c_1, c_2)}$, dont une mesure est comprise entre 0 et π.

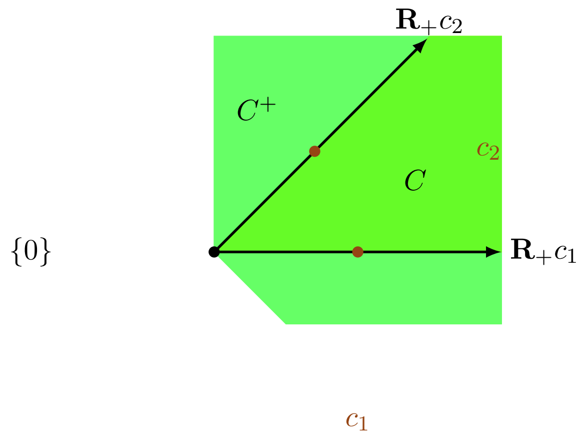
Dans la liste qui suit, on fait un dessin et on décrit C, C^+ et les faces de C en fonction de la valeur du cosinus en distinguant selon qu'il est égal à 1, dans $]0, 1[$, égal à 0, dans $]-1, 0[$ ou égal à -1. Le dessin est fait en se ramenant au cas où $c_1 = e_1 = (1, 0)$ et $c_2 = u_\theta = (\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Légende : en noir gras les faces distinctes de C, en jaune (s'il n'est réduit à une droite ou une demi-droite) C, en vert C^+, en vert-jaune $C \cap C^+$.

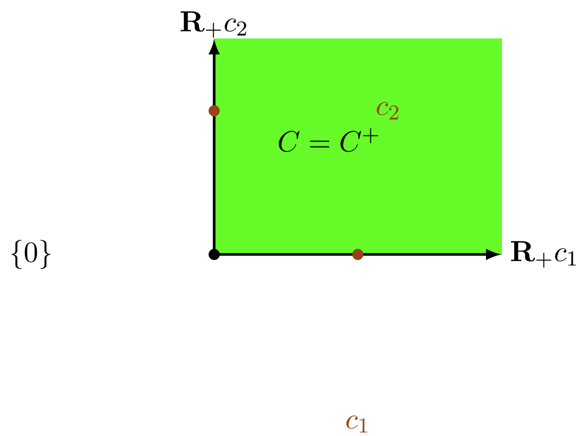
— $\cos(\theta) = 1$. Alors C est le demi-axe des abscisses positives, d'équations $x \geq 0$ et $y = 0$, C^+ est le demi-plan d'équation $x \geq 0$ et les faces de C sont : C et $\{0\}$.



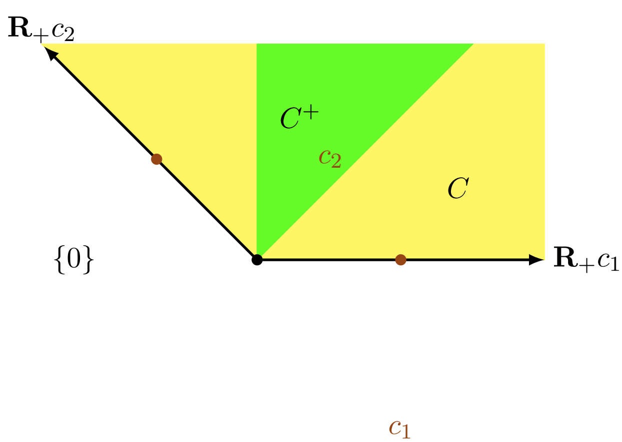
— $\cos(\theta) \in]0, 1[$. Alors C est un secteur angulaire d'angle aigu, d'équations $y \geq 0$ et $x\sin(\theta) - y\cos(\theta) \geq 0$, de sommet O et d'angle au sommet θ, C^+ est un secteur angulaire contenant strictement C, de sommet O et d'angle au sommet $\pi - \theta$, d'équations $x \geq 0$ et $x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \geq 0$. Les faces de C sont : C, les deux demi-droites issues de O et dirigées par e_1 et u_θ respectivement, ainsi que $\{O\}$.



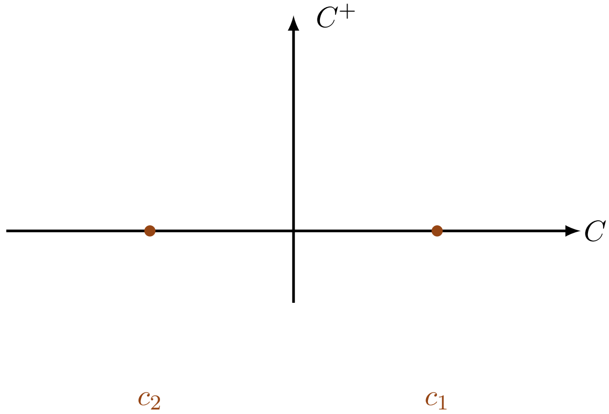
— $\cos(\theta)=0$. C'est le même cas que précédemment sauf que $C^+=C$ et on a affaire à un quart de plan.



— $\cos(\theta)\in]-1,0[$. C'est le même cas que $]0,1[$, mais ici le secteur angulaire est obtus et C^+ est strictement inclus dans C.



— $\cos(\theta) = -1$. Alors C est une droite, à savoir l'axe des abscisses, C^+ est aussi une droite, à savoir l'axe des ordonnées et C n'a qu'une face : lui-même.



3) Dans ce cas

$\boxed{\text{$C$ est le huitième d'espace d'équations $x, y, z \geq 0$, $C^+ = C$ et les faces de C sont : C, les quarts de plan d'équations $\{x = 0 \wedge y, z \geq 0\}$, $\{y = 0 \wedge x, z \geq 0\}$ et $\{z = 0 \wedge x, y \geq 0\}$, les demi-droites $\{x = y = 0 \wedge z \geq 0\}$, $\{x = z = 0 \wedge y \geq 0\}$ et $\{y = z = 0 \wedge x \geq 0\}$ et le point O.}}$

PARTIE II

4.a. On note $\mathbf{R}_+K$ l'ensemble $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{R}_+, x \in K\}$.

Soit (y_p) une suite à valeurs dans $\mathbf{R}_+K$ et convergente dans E. On dispose de deux suites (λ_p) et (x_p) à valeurs respectivement dans $\mathbf{R}_+$ et K telles que $(y_p) = (\lambda_p)(x_p)$ et de y dans E tel que $y = \lim y_p$.

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, par compacité de K, on dispose de x une valeur d'adhérence de (x_p) et donc aussi de φ une injection croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même telle que $x = \lim x_{\varphi(p)}$. Comme K ne contient pas 0, $\|x\| \neq 0$. Comme $\|\cdot\|$ est continue, car 1-lipschitzienne, $\|y\| = \lim \|y_p\| = \lim \left\|y_{\varphi(p)}\right\|$ et $\|x\| = \lim \left\|x_{\varphi(p)}\right\|$.

Enfin, par positivité de (λ_p), il vient, puisque (x_p) est à valeurs dans K et donc ne s'annule pas, $\lambda_p = \dfrac{\|y_p\|}{\|x_p\|}$ et en particulier $(\lambda_{\varphi(p)})$ converge vers $\dfrac{\|y\|}{\|x\|}$. On note λ cette limite. Comme $\mathbf{R}_+$ est fermé, on a $\lambda \in \mathbf{R}_+$.

Comme une suite convergente n'admet qu'une seule valeur d'adhérence, $y = \lim y_{\varphi(p)} = \left(\lim \lambda_{f(p)}\right) \lim x_{\varphi(p)} = \lambda x$.

Ainsi $\boxed{\text{l'ensemble des éléments de la forme λx, où $\lambda \in \mathbf{R}_+$ et $x \in K$, est fermé dans E.}}$

4.b. On considère pour K la droite d'équation $y = 1$, de sorte que $\mathbf{R}_+K$ est le demi-plan ouvert d'équation $y > 0$ auquel on ajoute le point O. Son adhérence est le demi-plan fermé d'équation $y \geq 0$ et il n'est donc pas fermé.

On considère pour K le cercle de centre $(0, 1)$ et de rayon 1. Comme toute droite passant par O coupe le cercle en deux points à l'exception de l'axe des abscisses (qui lui est tangent) et comme le second point d'intersection est d'ordonnée strictement positive, $\mathbf{R}_+K$ est encore une fois le demi-plan ouvert d'équation $y > 0$ auquel on ajoute le point O et n'est donc pas fermé. Ainsi

$\boxed{\text{le résultat ne subsiste pas si l'on suppose seulement } K \text{ fermé ou si } K \text{ contient } O.}$

5.a. Soit X la partie de $\mathbf{R}^r$ définie par $X = \mathbf{R}_+^r \cap S_{\|\cdot\|_1}(0,1)$, i.e. l'ensemble des r-uplets $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ formés de réels positifs de somme 1. Puisque $\mathbf{R}_+$ est fermé, il en est de même de $\mathbf{R}_+^r$. Puisque $S_{\|\cdot\|_1}(0,1)$ est la sphère unité pour une norme, c'est un fermé borné pour cette norme. C'est donc un compact (pour cette norme et donc pour toute norme) puisque $\mathbf{R}^r$ est de dimension finie.

Soit alors φ l'application de $\mathbf{R}^r$ dans E donnée par $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_r) = \lambda_1 c_1 + \cdots + \lambda_r c_r$. C'est une application linéaire et elle est donc continue (pour la norme $\|\cdot\|_1$) puisque $\mathbf{R}^r$ est de dimension finie. Il résulte du théorème de Weierstrass que l'image de X est un compact de E. Autrement dit si K est défini par $K = \{\sum \lambda_i c_i \mid (\lambda_i)_{1\leq i\leq r} \in X\}$, alors K est un compact de E.

Par ailleurs il ne contient pas 0. En effet sinon on disposerait de $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ dans X tel que $\sum \lambda_i c_i = 0$. Soit i tel que $\lambda_i \neq 0$ et $x = \lambda_i c_i$. On a donc $x \in C$ et $-x \in C$ puisque $-x = \sum_{j\neq i} \lambda_j c_j$. Enfin $x \neq 0$ puisque ni λ_i, ni c_i n'est nul par hypothèse. Par conséquent C contient la droite vectorielle $\mathbf{R}x$ et cette contradiction assure que K ne contient pas 0.

D'après la question 4a, il en résulte que $\mathbf{R}_+K$ est fermé. Par définition de C, il est stable par homothétie de rapport positif et donc, puisque $K \subset C$, $\mathbf{R}_+K \subset C$. Réciproquement soit x dans C. Si $x = 0$, alors $x = 0k$ pour k dans K quelconque (K est non vide) et donc $x \in \mathbf{R}_+K$. Sinon on dispose de $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ dans $\mathbf{R}_+^r$ non tous nuls tels que $x = \sum \lambda_i c_i$. On pose alors $\lambda = \sum \lambda_i$, et donc $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, et $y = \sum(\lambda_i/\lambda)c_i$. Il vient $y \in C$ par définition puisqu'il est combinaison linéaire à coefficients positifs de $(c_i)_{1\leq i\leq r}$ et $x = \lambda y$, d'où $x \in \mathbf{R}_+K$. Il vient $C = \mathbf{R}_+K$ et donc $\boxed{C \text{ est fermé.}}$

5.b. Soit I le sous-ensemble de $[\![1, r]\!]$ formé des entiers i tels que $c_i \notin V$. Alors I est non vide. En effet, sinon on aurait $C \subset \mathrm{V}ect\,(c_i)_{1\leq i\leq r} \subset V$, ce qui est exclus.

Par ailleurs $p(C)$ est le cône à faces engendré par $(p(c_i))_{i\in I}$. En effet soit x dans $p(C)$. On dispose de $(\lambda_i)_{1\leq i\leq r}$ dans $\mathbf{R}_+^r$ tel que $x = p\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i\right)$ et donc, par linéarité et puisque $V = \mathrm{Ker}(p)$, $x = \sum_{i\in I} \lambda_i p(c_i)$. Réciproquement si $x = \sum_{i\in I} \lambda_i p(c_i)$ avec $(\lambda_i)_{i\in I}$ dans $\mathbf{R}_+^I$, alors $x = p\left(\sum_{i\in I} \lambda_i c_i\right)$ et donc $x \in p(C)$.

De plus si $i \in I$, alors $p(c_i) - c_i \in V$ et donc $p(c_i) \in c_i + V$. Comme $c_i \in C$ et $V \subset C$ et comme C est stable par addition par définition, $p(c_i) \in C$. Il en résulte que le cône à faces engendré par $(p(c_i))_{i\in I}$ est inclus dans C puisque C est stable par combinaisons linéaires à coefficients positifs par définition. Donc $\boxed{p(C) \text{ est un cône à faces inclus dans } C.}$

5.c. Soit D une droite vectorielle incluse dans $p(C)$. On note $W = V + D$. Alors, puisque $D \subset p(C) \subset V^\perp$, on a $W = V \oplus^\perp D$ et en particulier $V \subsetneq W$. De plus, comme $V \subset C$ et $D \subset p(C) \subset C$ et que C est stable par addition, $W \subset C$, la somme de deux espaces vectoriels étant formé par les sommes d'éléments de ces espaces. Il en résulte que

$\boxed{C \text{ contient un sous-espace vectoriel, lui-même contenant strictement } V.}$

5.d. Soit V un espace vectoriel contenu dans C de dimension maximale pour cette propriété et p la projection orthogonale sur $V^\perp$. Alors $p(C)$ ne contient pas de droite vectorielle, d'après

5.c, est un cône à faces, d'après 5.b, et est donc fermé d'après 5.a. De plus $C \subset p(C) + V$ puisque $\mathrm{Ker}(p) = V$ et, réciproquement, $p(C) + V \subset C$ puisque $p(C) \subset C$ d'après 5.b et $V \subset C$ par hypothèse, et C est stable par addition.

Par conséquent $C = p(C) + V = p^{-1}(p(C))$ est fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par l'application p qui est linéaire, et donc continue puisque E est de dimension finie, i.e. $\boxed{C \text{ est fermé.}}$

PARTIE III

6.a. Soit c_0 dans C et $r = \|c_0 - a\|$. Comme la fonction $c \mapsto \|c - a\|$ est à valeurs positives, elle admet un infimum et il est inférieur à r, par définition, de sorte qu'il est égal à $\inf_{c \in C \cap \overline{B}(a,r)} \|c - a\|$. Or $C \cap \overline{B}(a, r)$ est compact en tant qu'intersection du fermé C et de la boule (fermée) compacte $\overline{B}(a, r)$ (car E est de dimension finie). Comme $c \mapsto \|c - a\|$ est 1-lipschitzienne, d'après l'inégalité triangulaire, elle est continue et le théorème de Weierstrass permet donc de conclure que l'infimum est atteint.

Soit c et d dans C tels que $\|c - a\| = \|d - a\| = d(a, C)$. D'après l'identité du parallélogramme, on a

$$\|c-d\|^2 = 2(\|c-a\|^2 + \|d-a\|^2) - \|c+d-2a\|^2 = 4\left(d(a,C)^2 - \left\|\frac{c+d}{2} - a\right\|^2\right) \leq 0$$

puisque C est stable par addition et par division par 2, donc $(c + d)/2 \in C$. Il en résulte $c = d$ et donc $\boxed{c \mapsto \|c - a\| \text{ atteint sa borne inférieure en un unique point de } C.}$

6.b. Soit c dans E et t dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $p(a) + tc \in C$, alors

$$\|a - p(a)\|^2 \leq \|a - p(a) - tc\|^2 = \|a - p(a)\|^2 + 2t\langle p(a) - a \mid c\rangle + t^2 \|c\|^2$$

et donc $2\langle p(a) - a \mid c\rangle \geq -t\|c\|^2$, puisque $t > 0$.

Si $c \in C$ alors $p(a)+tc \in C$ pour tout t dans $\mathbf{R}_+^*$ et l'inégalité précédente donne, en passant à la limite pour t tendant vers 0 par valeurs supérieures, $\boxed{\langle p(a) - a \mid c\rangle \geq 0.}$

On prend maintenant $c = -p(a)$, alors $p(a) + tc = (1 - t)p(a)$ et donc $p(a) + tc \in C$ pour tout t dans $]0, 1]$ et, toujours en prenant la limite en 0^+, $\langle p(a) - a \mid -p(a)\rangle \geq 0$. Comme $p(a) \in C$, on a aussi $\langle p(a) - a \mid p(a)\rangle \geq 0$ d'après ce qui précède et il en résulte $\boxed{\langle p(a) - a \mid p(a)\rangle = 0.}$

6.c. Soit c dans C et x dans C^+ ; par définition de C^+, on a $\langle c \mid x\rangle \geq 0$ et donc, puisque c'est vrai pour tout x dans C^+, $c \in (C^+)^+$.

Soit y dans $(C^+)^+$. D'après 6.b $p(y) - y \in C^+$ et donc $\langle y \mid p(y) - y\rangle \geq 0$. Comme, d'après 6.b $\langle p(y) \mid p(y) - y\rangle = 0$, il vient $\langle y - p(y) \mid p(y) - y\rangle \geq 0$, i.e. $-\|y - p(y)\|^2 \geq 0$ et donc $y = p(y)$. Comme $p(y) \in C$, il en résulte $y \in C$ et, par conséquent $\boxed{(C^+)^+ = C.}$

PARTIE IV

7) Soit $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E formée d'éléments de C, $x=\sum_{i=1}^{n} c_i$ et N la norme sur E donnée par

$$N\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i c_i\right)=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|\ .$$

Alors C contient la boule ouverte (pour la norme N) de centre x et de rayon 1 puisqu'elle est formée de vecteurs dont les coordonnées selon la base $(c_i)_{1\leq i\leq n}$ sont toutes positives. Comme E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et donc C contient aussi une boule ouverte de centre x pour la norme euclidienne et ainsi x est intérieur à C, i.e. l'intérieur de C est non vide.

En particulier si $\mathrm{V}ect\,(C)=E$, on peut trouver une base de E formée de vecteurs de C et donc l'intérieur de C est non vide.

Réciproquement si l'intérieur de C est non vide, soit x intérieur à C et notons $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E. On a donc $x\in C$ et on dispose de r dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $x+re_i\in C$ pour i dans $[\![1,n]\!]$. On a alors $e_i=\dfrac{1}{r}\left((x+re_i)-x\right)\in \mathrm{V}ect\,(C)$, pour i dans $[\![1,n]\!]$, et donc $\mathrm{V}ect\,(C)=E$.

Finalement $\boxed{(\alpha)\Leftrightarrow(\beta).}$

8.a. Soit x un point frontière de C. Comme C est fermé, $x\in C$ et on dispose d'une suite (x_n) de points n'appartenant pas à C et convergeant vers x. Pour n dans $\mathbf{N}$, puisque $x_n\notin C$, $p(x_n)\neq x_n$ et on peut définir $u_n=\dfrac{p(x_n)-x_n}{\|p(x_n)-x_n\|}$. D'après 6.b on a $p(x_n)-x_n\in C^+$ et donc, puisque C^+ est stable par multiplication par un scalaire positif, $u_n\in C^+$. Comme (u_n) est à valeurs dans la sphère unité, qui est compacte puisque E est de dimension finie, on peut supposer, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, que (u_n) converge et on note u sa limite.

Par continuité des applications bilinéaires en dimension finie, on a $u\in C^+$ puisque, pour c dans C, $\langle u\mid c\rangle=\lim\langle u_n\mid c\rangle$. Mais, d'après 6.b $\langle u_n\mid p(x_n)\rangle=0$ et il vient

$$\begin{aligned}\langle u_n\mid x\rangle=\langle u_n\mid x-p(x_n)\rangle &= \langle u_n\mid x_n-p(x_n)\rangle+\langle u_n\mid x-x_n\rangle\\ &= -\|x_n-p(x_n)\|+\langle u_n\mid x-x_n\rangle\end{aligned}$$

et donc $\langle u_n\mid x\rangle\leq\langle u_n\mid x-x_n\rangle$. En passant à la limite, il vient $\langle u\mid x\rangle\leq 0$ et donc, puisque $u\in C^+$, $\langle u\mid x\rangle=0$ et donc $x\in\{u\}^\perp$.

Puisque $\mathrm{V}ect\,(C)=E$, C n'est pas inclus dans $\{u\}^\perp$ puisque u est non nul et il en résulte que x appartient à la face de C définie par $C\cap\{u\}^\perp$.

Réciproquement si x appartient à une face de C distincte de C, soit w dans C^+ non nul tel que $x\in C\cap\{w\}^\perp$. Alors, pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $\langle w\mid x-tw\rangle=-t\|w\|^2<0$ et donc $x-tw\notin C$ puisque $w\in C^+$. Il en résulte que x est dans l'adhérence du complémentaire de C et est donc dans la frontière de C. D'où $\boxed{(\alpha')\Leftrightarrow(\beta').}$

8.b. Comme le montre l'exemple $C=\mathbf{R}e_1$, qui est le cône à faces de $\mathbf{R}^2$ engendré par $(e_1,-e_1)$, le résultat tombe en défaut en général. En fait si (β) n'est pas vérifiée, alors C est d'intérieur vide et donc tous ses points sont des points de la frontière et il résulte de 8.a qu'il existe des points qui n'appartiennent à aucune face hormis C.

Cependant si on considère $G = \mathrm{V}ect\,(C)$, le résultat précédent montre qu'un point de C appartient à sa frontière (vu comme sous-ensemble de G) si et seulement s'il appartient à une face de C distincte de C, où les faces sont considérées dans G. Soit donc x un point frontière de C vu comme sous-ensemble de G et w dans G tel que : $\forall c \in C$, $\langle w \mid x\rangle \geq 0$ et $\langle w \mid x\rangle = 0$, alors $w \in C^+$ et donc x est dans la face $C \cap \{w\}^\perp$ de C et cette dernière est distincte de C.

Réciproquement si x est dans une face de C distincte de C, on dispose de w dans C^+ tel que $\langle w \mid x\rangle = 0$. Soit $p(w)$ le projeté orthogonal de w sur G, on a donc $p(w) - w \in C^\perp$ i.e. pour c dans C $\langle p(w) \mid c\rangle = \langle w \mid c\rangle$. Il en résulte $p(w) \in C^+$ et donc x est dans la face de C, vu comme sous-ensemble de G, correspondant à $p(w)$. C'est donc un point de la frontière de C vu comme sous-ensemble de G. On en conclut que, pour x dans C,

x appartient à une face de C distincte de C si et seulement si c'est un point frontière de C vu comme sous-ensemble de $\mathrm{V}ect\,(C)$.

8.c. Soit c un point intérieur à C, ce qui est possible puisqu'on suppose que (β) est vérifiée. Pour t réel on pose $c_t = (1-t)c + tx$ ou encore $c_t = c + t(x-c)$ et on définit alors l'ensemble X par $X = \{\, t \in [0,1] \mid c_t \in C\}$. On montre qu'on a $X = [0,u]$ avec $0 < u < 1$. En effet

— $c_0 = c$ et donc, puisque c_0 est intérieur à C, si $\|t(x-c)\|$ est suffisamment petit $c_t \in C$. Comme $\|t(x-c)\| = |t|.\,\|c-x\|$, X contient donc un intervalle de la forme $[0,\varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$.

— Soit t dans $[0,1]$ tel que $c_t \in C$, par associativité du barycentre, pour tout u dans $[0,t]$, c_u est barycentre à coefficients positifs de c_0 et c_t et donc de deux éléments de C, et par conséquent $c_u \in C$. Il en résulte que X est un intervalle de borne inférieure 0 (inclus dans $[0,1]$). On note $u = \sup(X)$.

— Puisque C est fermé et qu'on a $c_u = \lim c_{(1-2^{-n})u}$ avec, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $0 \leq 1 - 2^{-n} < 1$ et donc $(1-2^{-n})u \in X$, on a $u \in X$, i.e. $X = [0,u]$, avec $u > 0$.

— Enfin $x \notin C$ et donc $u < 1$.

Comme $u < u + 2^{-n}(1-u) \leq 1$, pour tout n dans $\mathbf{N}$, c_u est limite d'une suite de points n'appartenant pas à C, e.g. $(c_{u+2^{-n}(1-u)})$, et donc c_u n'appartient pas à l'intérieur de C. Comme $u \in X$, $c_u \in C$ et donc c_u est un point frontière de C.

Soit alors F une face de C, distincte de C, contenant c_u ainsi qu'y autorise le résultat de 8.a. Soit alors w dans C^+ tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$. On a en particulier $\langle w \mid c_u\rangle = 0$ et $\langle w \mid c\rangle \geq 0$. En fait la dernière inégalité est stricte car sinon $c \in F$ et donc c ne saurait être intérieur à C d'après l'équivalence entre (β') et (α').

Comme $x = c_1 = \dfrac{1}{u}c_u - \dfrac{1-u}{u}c$, il vient $\langle w \mid x\rangle = -\dfrac{1-u}{u}\langle w \mid c\rangle < 0$ et donc

F est une face de C, distincte de C, telle que pour tout w de C^+ vérifiant $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $\langle x \mid w\rangle < 0$.

9.a. On dipose de $(c_i)_{1\leq i\leq r}$ tel que C soit le cône à faces engendré par cette famille. Soit alors F une face de C et I_F l'ensemble défini par $I_F = \{\, i \in [\![1,r]\!] \mid c_i \in F\}$. Pour w dans C^+

tel que $F = C \cap \{w\}^\perp$, on a $\forall i \in I_F\,, \langle w \mid c_i\rangle = 0$ et $\forall i \in [\![1,r]\!] \setminus I_F\,, \langle w \mid c_i\rangle > 0$ puisque $w \in C^+$ et par définition de F. Il en résulte, pour $(\lambda_i)_{1\le i\le r} \in (\mathbf{R}_+)^r$,

$$\langle w \mid \sum_{i=1}^r \lambda_i c_i\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [\![1,r]\!] \setminus I_F\,, \lambda_i = 0$$

i.e. F est le cône à faces engendré par $(c_i)_{i\in I_F}$, si $I_F \neq \emptyset$, et $\{0\}$ sinon. On en déduit que C admet au plus 2^r faces. En particulier, $\boxed{\text{l'ensemble des faces d'un cône à faces est fini.}}$

9.b. Soit C un cône à faces et $G = \mathrm{V}ect\,(C)$. On dispose de $(c_i)_{1\le i\le r}$ tel que C soit le cône à faces engendré par cette famille et d'une base $(e_i)_{i\in I}$ de $G^\perp$. On note alors $C' = C + G^\perp$, i.e. $C' = \Big\{x \in E \mid \exists (c,y) \in C \times G^\perp\,, x = c + y\Big\}$. Alors C' est le cône à faces engendré par $(c_i)_{1\le i\le r} \cup (e_i)_{i\in I} \cup (-e_i)_{i\in I}$ et $\mathrm{V}ect\,(C') = E$. Soit $(F_i)_{i\in J}$ les faces de C' distinctes de C', avec J un ensemble fini d'après 9.a. Si $J = \emptyset$, on convient qu'une intersection sur J de parties de E est égale à E.

On dispose de $(w_i)_{i\in J}$ une famille de vecteurs de $(C')^+$ tels que, pour i dans J, $F_i = C' \cap \{w_i\}^\perp$ et, puisque C' satisfait à la condition (α), d'après 8.c

$$\bigcap_{i\in J} \{w_i\}^+ \subset C' \quad \text{et en fait } \bigcap_{i\in J} \{w_i\}^+ = C'$$

puisque, pour i dans J et c dans C', $\langle w_i \mid c\rangle \ge 0$ car $w_i \in (C')^+$ et donc $c \in \{w_i\}^+$. Avec la convention $C' = E$ si $J = \emptyset$, ce qui est bien le cas.

Puisque $C \subset G$ et $E = G \oplus^\perp G^\perp$, on a $C = C' \cap G$ et donc

$$C = \Big(\bigcap_{i\in J} \{w_i\}^+\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in I} \{e_i\}^+\Big) \cap \Big(\bigcap_{i\in I} \{-e_i\}^+\Big)$$

puisque, par définition, pour x dans E, $\{x\}^+ \cap \{-x\}^+ = \{x\}^\perp$ et

$$\bigcap_{i\in I} \{e_i\}^\perp = \mathrm{V}ect\,(e_i)_{i\in I}^\perp = G\,.$$

Il en résulte que

$\boxed{\text{tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.}}$

10) Soit C un cône à face. On dispose d'après 9.b de $(c_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs de E telle que C soit l'intersection des demi-espaces $\{c_i\}^+$ ou, ce qui revient au même, des demi-espaces C_i^+ où C_i est le cône à faces engendré par (c_i), i.e. $\mathbf{R}_+ c_i$. Si I est vide, alors $C = E$ et $C^+ = \{0\}$ n'est pas un cône à faces avec la convention prise par l'énoncé. On suppose donc $C \neq E$.

Montrons qu'alors $C = (C')^+$ où C' est le cône à faces engendré par $(c_i)_{i\in I}$. Puisque, pour tout i dans I, $C_i \subset C'$, on a $(C')^+ \subset C_i^+$ et donc $(C')^+ \subset C$. Réciproquement si $c \in C$ et $(\lambda_i)_{i\in I} \in (\mathbf{R}_+)^I$, alors

$$\langle c \mid \sum_{i\in I} \lambda_i c_i\rangle = \sum_{i\in I} \lambda_i \langle c \mid c_i\rangle \ge 0$$

puisque $c \in \{c_i\}^+$ et $\lambda_i \ge 0$. Il en résulte $c \in (C')^+$ et donc $C = (C')^+$. Il s'ensuit d'après 6. qu'on a $C^+ = C'$ et donc $\boxed{C^+ \text{ est un cône à faces.}}$