DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES
MINES-PONTS 2015 – MP

Norme d'une matrice aléatoire

L'objectif de ce problème est d'étudier une inégalité de concentration pour la norme opérationnelle d'une matrice aléatoire dont les coefficients sont mutuellement indépendants et « uniformément sous-gaussiennes ».
Soit n un entier strictement positif. On identifie $\mathbf{R}^n$ à l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ des vecteurs colonnes à n coordonnées réelles. Pour tout $x = {}^{t}(x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{R}^n$, on note : $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.

La sphère unité de $\mathbf{R}^n$ est notée $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = 1\}$. On identifie une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ à l'endomorphisme de $\mathbf{R}^n$ canoniquement associé et on note $\sigma(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres réelles.

Les parties **A**, **B** et **C** sont mutuellement indépendantes.

PARTIE A - Norme d'opérateur d'une matrice

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

1) Montrer que S^{n-1} est un compact de $\mathbf{R}^n$ et en déduire l'existence de
$$\|M\|_{op} = \max\left\{\|Mx\| \;\middle|\; x \in S^{n-1}\right\} .$$

2) Montrer que l'application qui à $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ associe $\|M\|_{op}$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer en outre que pour tous x et y dans $\mathbf{R}^n$, on a l'inégalité : $\|Mx - My\| \leq \|M\|_{op} \|x - y\|$.

3) Si M est symétrique, établir l'égalité $\|M\|_{op} = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M)\}$. On pourra commencer par le cas où M est diagonale.

On note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

4) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de J_n en précisant la dimension des espaces propres. En déduire la valeur de $\|J_n\|_{op}$.

Soit $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

5) Démontrer l'inégalité $\|M\|_{op} \geq \max\{|M_{i,j}| \mid 1 \leq i, j \leq n\}$.

6) Établir $\|M\|_{op} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}^2}$ et donner une condition nécessaire et suffisante sur le rang de M pour que cette inégalité soit une égalité.

On note Σ_n l'ensemble des matrices $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que $|M_{i,j}| \leq 1$ pour tous $i, j \in [\![1; n]\!]$.

7) Montrer que pour tout $M \in \Sigma_n$, $\|M\|_{op} \leq n$. Caractériser et dénombrer les matrices M de Σ_n pour lesquelles $\|M\|_{op} = n$.

PARTIE B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

Dans toute la suite du problème, toutes les variables aléatoires considérées sont réelles et discrètes, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. Soit $\alpha > 0$. On dit qu'une variable aléatoire X est *α-sous-gaussienne* si :
$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{E}(\exp(tX)) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2}\right) .$$

On rappelle la notation $\operatorname{ch}(t) = \dfrac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$.

8) Montrer que pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $\operatorname{ch}(t) \leq \exp\left(\dfrac{t^2}{2}\right)$.

9) Soit $t \in \mathbf{R}$. Démontrer que si $x \in [-1;1]$, on a $\exp(tx) \leq \dfrac{1+x}{2}\exp(t) + \dfrac{1-x}{2}\exp(-t)$.

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée. Montrer que X est 1-sous-gaussienne. En déduire que si X est bornée par $\alpha > 0$ et centrée, alors elle est α-sous-gaussienne.

11) Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes, et μ_1, μ_2, $\ldots$, μ_n des nombres réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 = 1$. Montrer que la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i$ est aussi α-sous-gaussienne.

12) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $t > 0$:

$$\mathbf{P}\left(X \geq \lambda\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right) .$$

En déduire $\mathbf{P}\left(|X| \geq \lambda\right) \leq 2\exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$.

Dans la suite du problème, on admet qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum \mathbf{P}\left(X \geq k\right)$ converge et que dans ce cas :

$$\mathbf{E}\left(X\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X \geq k\right) .$$

13) Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, montrer que X est d'espérance finie si et seulement si la série de terme général $\mathbf{P}\left(X \geq k\right)$ converge et que dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X \geq k\right) \leq \mathbf{E}\left(X\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X \geq k\right) .$$

Pour tout $s \in \left]1;+\infty\right[$, on note $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

14) Soit X une variable aléatoire α-sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer que pour tout entier $k > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}$$

où on a posé $\eta = \alpha^{-2}\beta^{-2}$. En déduire que si $\alpha\beta < 1$, la variable aléatoire $\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right)$ est d'espérance finie majorée par $1 + 2\zeta(\eta)$.

En particulier, en prenant $\alpha\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et en utilisant l'inégalité $1 + 2\zeta(2) \leq 5$ (que l'on ne demande pas de justifier), on obtient immédiatement, et on l'admet, que si X est une variable aléatoire α-sous-gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz :

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\frac{X^2}{4\alpha^2}\right)\right) \leq 5 .$$

PARTIE C - Recouvrements de la sphère

Si $a \in \mathbf{R}^n$, on note $B_{a,r} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x - a\| \leq r\}$ la boule fermée de centre a et de rayon r. Soit K une partie compacte non vide de $\mathbf{R}^n$, et soit $\varepsilon > 0$.

15) Montrer que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que : $K \subset \displaystyle\bigcup_{a \in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$.

16) Soit Λ un sous-ensemble de K tel que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x-y\| > \varepsilon$. Montrer que Λ est fini et que son cardinal est majoré par celui d'un ensemble A du type considéré à la question précèdente. Si de plus Λ est de cardinal maximal, montrer

$$K \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon} \ .$$

On admet l'existence d'une fonction μ, appelée volume, définie sur l'ensemble des parties compactes de $\mathbf{R}^n$ et vérifiant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout vecteur a de $\mathbf{R}^n$ et tout nombre réel $r>0$, $\mu(B_{a,r}) = r^n$.

(ii) Pour toute famille $K_1, \ldots, K_m$ de compacts de $\mathbf{R}^n$ deux à deux disjoints on a :

$$\mu\left(\bigcup_{1\leq i\leq m} K_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \mu(K_i) \ .$$

(iii) Pour tous compacts K, K' de $\mathbf{R}^n$, $K \subset K'$ implique $\mu(K) \leq \mu(K')$.

Soit Λ une partie finie de S^{n-1} telle que pour tous x, y distincts dans Λ, $\|x-y\| > \varepsilon$.

17) Vérifier que les boules $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ pour $a \in \Lambda$ sont toutes contenues dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Montrer alors que le cardinal de Λ est majoré par $\left(\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$.

18) Justifier l'existence d'une partie finie Λ_n de S^{n-1}, de cardinal majoré par 5^n, et telle que :

$$S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}} \ .$$

PARTIE D - Norme d'une matrice aléatoire

On fixe un nombre réel $\alpha > 0$ et on pose $\gamma = \dfrac{1}{4\alpha^2}$.

Soit n un entier strictement positif. On définit une famille de variables aléatoires réelles $M_{i,j}^{(n)}$ indexées par i, $j \in [\![1;n]\!]$, mutuellement indépendantes et α-sous-gaussiennes. On note $M^{(n)}$ la matrice aléatoire $(M_{i,j}^{(n)})_{1\leq i,j\leq n}$.

Si $x \in S^{n-1}$, on note $y = M^{(n)}x$ qui est ainsi un vecteur aléatoire dont les composantes $y_1, \ldots, y_n$ sont des variables aléatoires réelles.

19) Montrer que pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, la variable aléatoire y_i est α-sous-gaussienne. En déduire $\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma \|y\|^2\right)\right) \leq 5^n$ et pour tout réel $r > 0$:

$$\mathbf{P}\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n \ .$$

20) Soit Λ_n une partie de S^{n-1} vérifiant les conditions de la question 18. Pour tout réel $r > 0$, montrer que $\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$ implique l'existence d'un $a \in \Lambda_n$ tel que $\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n}$. En déduire $\mathbf{P}\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq \left(25e^{-\gamma r^2}\right)^n$.

Deuxième composition de mathématiques – Mines-Ponts 2015 – MP

Norme d'une matrice aléatoire

PARTIE A - Norme d'opérateur d'une matrice

1) L'application norme étant 1-lipschitzienne, elle est continue et donc S^{n-1} est fermé en tant qu'image réciproque du fermé $\{1\}$ par une application continue. Par construction S^{n-1} est borné par 1 et donc, d'après le théorème de Heine-Borel, S^{n-1} est compact pour la norme $\|\cdot\|$ et donc pour toute norme, puisque $\mathbf{R}^n$ est de dimension finie.

   Pour cette même raison toute application linéaire sur $\mathbf{R}^n$ est continue et donc $x \mapsto Mx$ est continue. Par compacité de S^{n-1} et grâce au théorème de Weierstrass, on en déduit que $\left\{\|Mx\| \;\middle|\; x \in S^{n-1}\right\}$ est une partie compacte de $\mathbf{R}$. Comme elle est non vide, puisque S^{n-1} ne l'est pas, elle admet un maximum, i.e. $\boxed{S^{n-1} \text{ est compact et } \|M\|_{op} \text{ existe.}}$

2) En tant que maximum d'une partie incluse dans $\mathbf{R}_+$, $\|\cdot\|_{op}$ est à valeurs dans $\mathbf{R}_+$ et n'est nulle que pour les M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ vérifiant $\left\{\|Mx\| \;\middle|\; x \in S^{n-1}\right\} = \{0\}$. Or pour tout y dans $\mathbf{R}^n$ on dispose de x dans S^{n-1} tel que $y = \|y\|\, x$ et donc $Mx = 0 \Longrightarrow My = \|y\|\, Mx = 0$ par linéarité. On en déduit $\forall x \in S^{n-1}\ Mx = 0 \Longrightarrow M = 0$, i.e. $\|M\|_{op} = 0 \Longrightarrow M = 0$.

   Par homogénéité de la norme sur $\mathbf{R}^n$, pour M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et α dans $\mathbf{R}$, on a

   $$\left\{\|\alpha Mx\| \;\middle|\; x \in S^{n-1}\right\} = \left\{|\alpha|\, \|Mx\| \;\middle|\; x \in S^{n-1}\right\}$$

   et, par croissance de la multiplication par $|\alpha|$,

   $$\|\alpha M\|_{op} = |\alpha| \max\left\{\|Mx\| \;\middle|\; x \in S^{n-1}\right\} = |\alpha|\, \|M\|_{op} \ .$$

   Enfin, par inégalité triangulaire, pour M et N dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et x dans S^{n-1},

   $$\|(M+N)x\| = \|Mx + Nx\| \leq \|Mx\| + \|Nx\| \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op} \ .$$

   Il en résulte $\|M+N\|_{op} \leq \|M\|_{op} + \|N\|_{op}$. Par conséquent $\boxed{\|\cdot\|_{op} \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

   Soit x et y dans $\mathbf{R}^n$, on dispose de u dans S^{n-1} tel que $x - y = \|x-y\|\, u$ et il vient par linéarité et homogénéité,

   $$\|Mx - My\| = \|M(x-y)\| = \|x-y\|\, \|Mu\| \leq \|M\|_{op}\, \|x-y\| \ .$$

3) Soit M une matrice symétrique dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et x dans $\mathbf{R}^n$. D'après le théorème spectral on a $\mathbf{R}^n = \oplus^{\perp}_{\lambda\in\sigma(M)} \operatorname{Ker}(M - \lambda \mathrm{Id})$ et donc on peut écrire $x = \displaystyle\sum_{\lambda\in\sigma(M)} x_\lambda$ avec $(x_\lambda)_{\lambda\in\sigma(M)}$ une famille orthogonale de vecteurs propres vérifiant $Mx_\lambda = \lambda x_\lambda$. Il vient donc, par orthogonalité,

   $$\|Mx\|^2 = \left\|\sum_{\lambda\in\sigma(M)} \lambda x_\lambda\right\|^2 = \sum_{\lambda\in\sigma(M)} \lambda^2 \|x_\lambda\|^2$$

   et donc, par positivité, en notant $m = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M)\}$ (ce qui est licite par finitude de l'ensemble considéré),

   $$\|Mx\|^2 \leq m^2 \sum_{\lambda\in\sigma(M)} \|x_\lambda\|^2 = m^2 \|x\|^2 \ ,$$

   la dernière égalité résultant de l'orthogonalité de la famille $(x_\lambda)_{\lambda\in\sigma(M)}$. On en déduit $\|M\|_{op} \leq m$ par croissance de la racine carrée sur $\mathbf{R}_+$ et positivité des quantités étudiées. Soit enfin λ dans $\sigma(M)$ tel que $|\lambda| = m$ (ce qui est licite, toujours par finitude de l'ensemble considéré) et y dans $\operatorname{Ker}(M - \lambda\mathrm{Id})$, non nul. On dispose alors de x dans $\operatorname{Ker}(M - \lambda\mathrm{Id})$ unitaire tel que $y = \|y\|\, x$, puisque $\operatorname{Ker}(M - \lambda\mathrm{Id})$ est un espace vectoriel. Il vient $\|Mx\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\| = m$ et on en déduit $\boxed{\|M\|_{op} = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(M)\}.}$

4) Soit φ la forme linéaire sur $\mathbf{R}^n$ donnée par $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto \sum_{i=1}^n x_i$ et u le vecteur de $\mathbf{R}^n$ donné par $u={}^{\mathrm{t}}(1,\ldots,1)$. Par définition de J_n, pour x dans $\mathbf{R}^n$, on a $Jx=\varphi(x)u$ et donc $\mathrm{Ker}(J_n)=\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Im}(J_n)=\mathbf{R}u$. Il en résulte, puisque φ est non nul, que le noyau de J_n est de dimension $n-1$. Par exemple en utilisant la trace, on en déduit que l'autre valeur propre de J_n est n et, par exemple en utilisant l'orthogonalité des espaces propres de J_n donnée par le théorème spectal, que l'espace propre associé à n est $\mathbf{R}u$, i.e. $\mathrm{Im}(u)$. En résumé

$\boxed{\sigma(J_n)=\{0,n\}}$ si $n\geq 2$ et $\sigma(J_n)=\{n\}$ sinon, $\mathrm{Ker}(J_n)$ est de dimension $n-1$ et admet pour équation $\sum_{i=1}^n x_i=0$ et $\mathrm{Ker}(J_n-nI_n)$ est la droite engendrée par ${}^{\mathrm{t}}(1,\ldots,1)$.

Comme J_n est symétrique réelle, il résulte de la question précédente qu'on a $\boxed{\|J_n\|_{op}=n.}$

5) Soit i et j dans $[\![1;n]\!]$. On note $(e_1,\ldots,e_n)$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique de sorte qu'il vient, par inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|M_{i,j}|=|\langle e_i\,|\,Me_j\rangle|\leq \|Me_j\|\,\|e_i\|\leq \|M\|_{op}$$

puisqu'on a affaire à des vecteurs unitaires. Il en résulte $\boxed{\|M\|_{op}\geq \max\{|M_{i,j}|\mid 1\leq i,j\leq n\}.}$

6) Soit x dans $\mathbf{R}^n$, unitaire, et $(m_i)_{1\leq i\leq n}$ les vecteurs lignes de M, i.e. $m_i={}^{\mathrm{t}}(M_{i,1},\ldots,M_{i,n})$. Il vient alors en notant $\langle\cdot\,|\,\cdot\rangle$ le produit scalaire canonique, $\|Mx\|^2=\sum_{i=1}^n\langle m_i\,|\,x\rangle^2$ et donc, grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|Mx\|^2\leq \sum_{i=1}^n\|m_i\|^2=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2$$

avec égalité si x est colinéaire aux vecteurs lignes de M. Par positivité des quantités étudiées, on obtient donc l'inégalité recherchée avec égalité si et seulement si les vecteurs lignes de M sont colinéaires à un même vecteur, i.e. appartiennent à une même droite vectorielle ou encore si et seulement si le rang de la transposée de M, ou celui de M car ils sont égaux, est inférieur à 1. Autrement dit

$\boxed{\|M\|_{op}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}}$, avec égalité si et seulement M est de rang inférieur ou égal à 1.

7) Pour M dans Σ_n, l'inégalité précédente donne directement

$$\|M\|_{op}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n 1}=n$$

avec égalité si et seulement si M est de rang inférieur ou égal à 1 (pour la première inégalité) et tous ses coefficients sont de valeur absolue 1 (pour la seconde). Il y a donc égalité si et seulement si on dispose de $(\varepsilon_j)_{1\leq j\leq n}$ dans $\{\pm1\}^n$ tel que $(M_{1,j})_{1\leq j\leq n}=(\varepsilon_j)_{1\leq j\leq n}$ et si toutes les autres colonnes de M sont proportionnelles à cette colonne non nulle. Comme les coefficients de proportionnalité sont nécessairement de valeur absolue égale à 1, il y a égalité si et seulement si on dispose de $(\varepsilon_j)_{1\leq j\leq n}$ et $(\varepsilon'_i)_{1\leq i\leq n}$ dans $\{\pm1\}^n$ avec $\varepsilon'_1=1$ et tels que, pour tous i et j dans $[\![1;n]\!]$, $M_{i,j}=\varepsilon'_i\varepsilon_j$. En conclusion pour M dans Σ_n, on a

$\boxed{\|M\|_{op} \leq n \text{ avec égalité pour les } 2^{2n-1} \text{ matrices de la forme}}$

$$M = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & \cdots & \pm 1 \end{pmatrix}$$

(et où l'on peut fixer arbitrairement un des signes, par exemple le premier terme du vecteur ligne peut être fixé à 1).

PARTIE B - Variables aléatoires sous-gaussiennes

8) La fonction th est concave sur $\mathbf{R}_+$, par exemple parce que sa dérivée (à savoir $1/\operatorname{ch}^2$) est décroissante sur $\mathbf{R}_+$ et donc sous sa tangente en 0 : pour tout t dans $\mathbf{R}_+$, on a $\operatorname{th}(t) \leq t$. Par croissance de l'intégrale et parité de ch il vient, pour t dans $\mathbf{R}$,

$$\ln(\operatorname{ch}(t)) = \ln(\operatorname{ch}(|t|)) = \int_0^{|t|} \frac{\operatorname{ch}'(x)}{\operatorname{ch}(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{|t|} \operatorname{th}(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_0^{|t|} x\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}$$

et donc, par croissance de l'exponentielle, $\boxed{\text{pour tout } t \in \mathbf{R},\ \operatorname{ch}(t) \leq \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).}$

Remarque : un autre argument, moins élégant, utilise le développement en série entière des fonctions considérées. On a, pour t réel

$$\operatorname{ch}(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

et donc, puisqu'on a affaire à des quantités positives et que le produit des entiers de 1 *à* $2n$ *est inférieur à celui des entiers pairs compris entre les mêmes bornes,*

$$\operatorname{ch}(t) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} = e^{t^2/2}\ .$$

9) Soit t dans $\mathbf{R}$ et x dans $[-1;1]$. Alors $\frac{1+x}{2}$ et $\frac{1-x}{2}$ sont deux réels positifs de somme 1 et donc, par convexité de l'exponentielle sur $\mathbf{R}$ et donc en particulier entre t et $-t$, il vient

$$\exp(tx) = \exp\left(\frac{1+x}{2}t + \frac{1-x}{2}(-t)\right) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t)$$

i.e. $\boxed{\exp(tx) \leq \frac{1+x}{2}\exp(t) + \frac{1-x}{2}\exp(-t).}$

10) Soit X une variable aléatoire réelle bornée par 1 et centrée, et t un réel. La variable aléatoire $\exp(tX)$ est donc bornée et admet par conséquent une espérance. De plus, d'après ce qui précède, elle est majorée par $\operatorname{ch}(t) + \operatorname{sh}(t)X$ et donc, par croissance et linéarité de l'espérance, il vient $\mathbf{E}(\exp(tX)) \leq \operatorname{ch}(t)$, puisque X est centrée. On en déduit grâce à la question 8, que $\boxed{X \text{ est 1-sous-gaussienne.}}$
Soit maintenant X une variable aléatoire réelle bornée par α et centrée, avec $\alpha > 0$. Alors on peut appliquer le résultat précédent à $\frac{1}{\alpha}X$, qui est donc 1-sous-gaussienne. On en déduit pour t réel, $\mathbf{E}(\exp(tX)) = \mathbf{E}(\exp((\alpha t)X/\alpha)) \leq \exp((\alpha t)^2/2)$ et donc $\boxed{X \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne.}}$

11) Soit t réel. On a

$$\exp(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i) = \prod_{i=1}^{n}\exp(t\mu_i X_i)$$

et donc, par indépendance mutuelle de X_1, ..., X_n et grâce au lemme des coalitions, il vient

$$\mathbf{E}\left(\exp(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i)\right) = \prod_{i=1}^{n}\mathbf{E}\left(\exp(t\mu_i X_i)\right)$$

et donc, par positivité des exponentielles et en utilisant le caractère α-sous-gaussien,

$$\mathbf{E}\left(\exp(t\sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i)\right) \leq \prod_{i=1}^{n}\exp(\alpha^2\mu_i^2 t^2/2) = \exp(\alpha^2 t^2/2)$$

puisque $\sum_{i=1}^{n}\mu_i^2 = 1$. Il en résulte que $\boxed{\text{la variable aléatoire } \sum_{i=1}^{n}\mu_i X_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne.}}$

12) La fonction exponentielle est croissante et strictement positive, définie sur $\mathbf{R}$. Il en va de même, pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, de $x \mapsto \exp(tx)$ sur $\mathbf{R}$ et il résulte donc de l'inégalité de Markov $\mathbf{P}\left(X \geq \lambda\right) \leq \dfrac{\mathbf{E}\left(\exp(tX)\right)}{\exp(t\lambda)}$.
En utilisant le caractère α-sous-gaussien, il vient

$$\boxed{\mathbf{P}\left(X \geq \lambda\right) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right).}$$

On obtient une majoration optimale en posant $t = \lambda/\alpha^2$, ce qui est licite puisque c'est un réel strictement positif tout comme λ. Il vient alors $\mathbf{P}\left(X \geq \lambda\right) \leq \exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$. D'après la question précédente appliquée au cas $n = 1$ et $\mu_1 = -1$, $-X$ est également α-sous-gaussienne et donc ce qu'on vient de démontrer entraîne $\mathbf{P}\left(-X \geq \lambda\right) \leq \exp\left(-\dfrac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right)$. Par additivité des probabilités, il en résulte

$$\boxed{\mathbf{P}\left(|X| \geq \lambda\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).}$$

Le résultat admis est classique, voir par exemple la feuille de TD. Une démonstration simple est donnée par le théorème de sommation par paquets dans le cas positif. En effet $\sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbf{P}\left(X = k\right)$ *et* $\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(X \geq k\right)$ *sont deux façons de sommer la famille* $\left(\mathbf{P}\left(X = k\right)\mathbb{1}_{[\![1;k]\!]}(n)\right)_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$.

13) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$. Alors $[X]$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ et elle vérifie $[X] \leq X \leq [X] + 1$. Puisqu'on a affaire à des variables positives, on peut en prendre les espérances dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ et il vient par croissance de l'espérance $\mathbf{E}\left([X]\right) \leq \mathbf{E}\left(X\right) \leq 1 + \mathbf{E}\left([X]\right)$. Il en résulte en particulier que $\mathbf{E}\left(X\right)$ et $\mathbf{E}\left([X]\right)$ sont simultanément finis ou infinis. De plus on a pour tout k dans $\mathbf{N}$, $(X \geq k) = ([X] \geq k)$ et donc la formule admise donne

$$\mathbf{E}\left([X]\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\mathbf{P}\left(X \geq k\right) ,$$

les deux membres étant simultanément finis ou infinis. Autrement dit

X admet une espérance (finie) si et seulement si $\sum \mathbf{P}(X \geq k)$ converge et dans ce cas :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k) \leq \mathbf{E}(X) \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geq k) \ .$$

14) Pour k dans $\mathbf{N}^*$, par croissance stricte du logarithme, positivité de $\beta^2/2$ et croissance stricte de la racine carrée, il vient

$$\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k \iff \frac{\beta^2 X^2}{2} \geq \ln(k) \iff X^2 \geq \frac{2\ln(k)}{\beta^2} \iff |X| \geq \sqrt{\frac{2\ln(k)}{\beta^2}}$$

et donc, en utilisant la question 12 si $k > 1$, ou en remarquant $1 \leq 2$ si $k = 1$,

$$\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\ln(k)}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta}.}$

Si $\alpha\beta < 1$, alors $\eta > 1$ et donc la série $\sum k^{-\eta}$ est une série de RIEMANN convergente, de somme $\zeta(\eta)$ et donc, par comparaison entre séries à termes positifs, la série $\sum \mathbf{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right)$ est convergente.

D'après ce qui précède on en déduit que

$\boxed{\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \text{ est d'espérance finie majorée par } 1 + 2\zeta(\eta).}$

L'inégalité admise n'est pas compliquée. Pour $k \geq 2$ on a $k^2 \geq 2^k$ et donc $\zeta(2) \leq 1 + \frac{1}{2} < 2$, d'où $1 + 2\zeta(2) \leq 5$.

PARTIE C - Recouvrements de la sphère

15) On raisonne par l'absurde en supposant que, pour tout sous-ensemble fini A de K, K n'est pas inclus dans $\bigcup_{a\in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$. Soit alors a_1 un point de K. On construit alors une suite de points de K par récurrence de la façon suivante : si a_1, …, a_n sont construits, puisque $\{a_1, \ldots, a_n\}$ est fini, $K \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}$ n'est pas vide et on choisit arbitrairement a_{n+1} dans cet ensemble. Par construction pour n et m entiers avec $n < m$, on a $a_m \notin \bigcup_{i=1}^{m-1} B_{a_i,\frac{\varepsilon}{2}}$ et en particulier $\|a_n - a_m\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$. Une telle suite ne saurait avoir une valeur d'adhérence, ce qui contredit le théorème de BOLZANO-WEIRSTRASS puisque K est compact et (a_n) est à valeurs dans K. On en conclut que l'on peut trouver un sous-ensemble fini A de K tel que :

$\boxed{K \subset \bigcup_{a\in A} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}.}$

16) Soit A comme précédemment. À tout x de Λ on peut associer au moins un élément de A que l'on notera $a(x)$. Puisque $B_{a(x),\frac{\varepsilon}{2}}$ est de diamètre ε, pour tout y dans Λ distinct de x, on a $y \notin B_{a(x),\frac{\varepsilon}{2}}$ et donc $a(y) \neq a(x)$. De la sorte on a construit une application injective de Λ dans A et donc $\boxed{\Lambda \text{ est fini, de cardinal majoré par celui de } A.}$

Si de plus Λ est de cardinal maximal, pour tout k dans K, $\Lambda \cup \{k\}$ ne vérifie pas l'hypothèse et donc $\exists a \in \Lambda\ \|k - a\| \leq \varepsilon$. Autrement dit $\boxed{K \subset \bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\varepsilon}.}$

17) Soit a dans Λ et x dans $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$. Par inégalité triangulaire il vient $\|x\| \leq \|x - a\| + \|a\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 1$ et donc

$\boxed{B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \subset B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}.}$

De plus si a appartient à Λ, $B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}$ est fermé, en tant que boule fermée, et borné, par exemple inclus dans $B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}$. Donc d'après le théorème de HEINE-BOREL, c'est un compact puisque $\mathbf{R}^n$ est de dimension finie. De plus la famille finie de compacts $\left(B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right)_{a\in\Lambda}$ est formée d'ensembles deux à deux disjoints puisque, pour x dans $\mathbf{R}^n$ et a et b dans Λ, on a, par inégalité triangulaire,

$$x \in B_{a,\frac{\varepsilon}{2}} \cap B_{b,\frac{\varepsilon}{2}} \Longrightarrow \|a-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| \leq \varepsilon \Longrightarrow a = b\,.$$

On en déduit, en utilisant successivement les propriétés (i), (ii), (iii) et (i) de μ,

$$\mathrm{Card}(\Lambda)\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^n = \sum_{a\in\Lambda}\mu\left(B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \mu\left(\bigcup_{a\in\Lambda} B_{a,\frac{\varepsilon}{2}}\right) \leq \mu\left(B_{0,1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) = \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^n$$

et donc $\boxed{\mathrm{Card}(\Lambda) \leq \left(\dfrac{2+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n.}$

18) Soit $K = S^{n-1}$. C'est un compact, d'après la question 1, non vide puisque $n > 0$. On considère alors la partie de $\mathbf{N}$ donnée par $\left\{\mathrm{Card}(\Lambda) \;\middle|\; \Lambda \subset K \text{ et } \forall (x,y) \in K^2\,, \|x-y\| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow x = y\right\}$. Cet ensemble est non vide puisqu'il contient 0, pour $\Lambda = \emptyset$. D'après la question 16, c'est un ensemble majoré et on peut donc en considérer le maximum, noté m. On dispose alors de Λ_n inclus dans K vérifiant $\forall (x,y) \in K^2$, $\|x-y\| \leq \frac{1}{2} \Longrightarrow x = y$ et de cardinal m. Alors, d'après les questions 17 et 15 avec $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$, on a $\boxed{\mathrm{Card}(\Lambda_n) \leq 5^n \text{ et } S^{n-1} \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} B_{a,\frac{1}{2}}.}$

PARTIE D - Norme d'une matrice aléatoire

19) Soit i dans $[\![1;n]\!]$. On a $y_i = \displaystyle\sum_{j=1}^n M_{i,j}^{(n)} x_j$ et donc, par indépendance mutuelle de $\left(M_{i,j}^{(n)}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, on déduit d'une part grâce au lemme des coalitions que les variables $(y_1,\ldots,y_n)$ sont mutuellement indépendantes et d'autre part, grâce à la question 11 et au fait que x est unitaire, que $\boxed{y_i \text{ est } \alpha\text{-sous-gaussienne.}}$ Par indépendance et en utilisant l'inégalité d'ORLICZ, il vient par positivité

$$\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma\|y\|^2\right)\right) = \mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma\sum_{i=1}^n y_i^2\right)\right) = \prod_{i=1}^n \mathbf{E}\left(\exp(\gamma y_i^2)\right) \leq 5^n$$

et donc, puisque $\|y\|$ est une variable aléatoire, que $t \mapsto \exp(\gamma t^2)$ est une fonction croissante à valeurs strictement positives et grâce à l'inégalité de MARKOV, pour $r > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \frac{\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma\|y\|^2\right)\right)}{\exp(n\gamma r^2)} = \frac{5^n}{\exp(\gamma r^2)^n}$$

et donc

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\exp\left(\gamma\|y\|^2\right)\right) \leq 5^n \text{ et } \mathbf{P}\left(\|y\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n.}$$

20) Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. D'après la question 1 on dispose de x dans S^{n-1} tel que $\|Mx\| = \|M\|_{op}$. Par hypothèse sur Λ_n on dispose de a dans Λ_n tel que $x \in B_{a,\frac{1}{2}}$ et donc, grâce à la question 2, $\|Mx - Ma\| \leq \dfrac{1}{2}\|M\|_{op}$. Il en résulte par inégalité triangulaire $\|Ma\| \geq \|Mx\| - \|Mx - Ma\| \geq \dfrac{1}{2}\|M\|_{op}$. Par conséquent, pour tout r dans $\mathbf{R}_+^*$, si on a $\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}$, on dipose de a dans Λ_n tel que $\boxed{\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n}.}$

Pour r dans $\mathbf{R}_+^*$, on a donc

$$\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \subset \bigcup_{a\in\Lambda_n} \left(\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n}\right)$$

et ainsi, par sous-addivité de la probabilité et en utilisant l'inégalité précédente ainsi que l'hypothèse sur Λ_n

$$\mathbf{P}\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq \sum_{a\in\Lambda_n} \mathbf{P}\left(\left\|M^{(n)}a\right\| \geq r\sqrt{n}\right) \leq 5^n \left(5e^{-\gamma r^2}\right)^n$$

i.e. $\boxed{\mathbf{P}\left(\left\|M^{(n)}\right\|_{op} \geq 2r\sqrt{n}\right) \leq \left(25e^{-\gamma r^2}\right)^n.}$