Première composition
Mines-Ponts 2015 – MP

Opérateur de Volterra et équations différentielles

L'objectif de ce problème est l'étude d'un opérateur de Volterra appliqué notamment à la résolution de certaines équations différentielles.
On considère l'espace vectoriel E des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans E par :

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On note $\|f\| = \sqrt{\langle f \mid f \rangle}$ la norme associée à ce produit scalaire. Un endomorphisme V de E est dit *symétrique défini positif* si pour tous f, g dans E, on a : $\langle V(f) \mid g \rangle = \langle f \mid V(g) \rangle$ et si de plus $\langle V(f) \mid f \rangle > 0$ pour tout f dans E non nul.

Les parties I *et* II *sont mutuellement indépendantes.*

PARTIE I - Opérateur de Volterra

On note V et V^* les endomorphismes de E définis par les formules :

$$V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$V^*(f)(x) = \int_x^{\pi/2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tous f dans E et x dans $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

1) En observant que $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, montrer que pour tous f, g dans E, on a : $\langle V(f) \mid g \rangle = \langle f \mid V^*(g) \rangle$.
2) Montrer que l'endomorphisme $V^* \circ V$ est symétrique défini positif. En déduire que ses valeurs propres sont strictement positives.

Soit λ une valeur propre de $V^* \circ V$ et f_λ un vecteur propre associé à λ.

3) Montrer que f_λ est de classe C^2 et est solution de l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0$ avec les conditions $y(\frac{\pi}{2}) = y'(0) = 0$.
4) En déduire que λ est une valeur propre de $V^* \circ V$ si et seulement s'il existe n entier naturel tel que $\lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2}$. Préciser alors les vecteurs propres associés.

PARTIE II - Théorème d'approximation de Weierstrass

Soit n un entier strictement positif, x dans $[0; 1]$ et $f : [0; 1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et distribuées selon la même loi de Bernoulli de paramètre x. On note également : $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $Z_n = \dfrac{S_n}{n}$ et $B_n(f)(x) = \mathbf{E}\left(f(Z_n)\right)$.

5) Rappeler sans démonstration, la loi de S_n. En déduire, avec démonstration, les valeurs de l'espérance et de la variance de S_n en fonction de n et de x.

6) En utilisant l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV, montrer que pour tout α strictement positif

$$\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ \left|\frac{k}{n}-x\right|\geq\alpha}} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}$$

7) Montrer

$$B_n(f)(x)-f(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)$$

et en déduire que la suite $(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0;1]$. On pourra utiliser le résultat de la question précédente ainsi que le théorème de HEINE.

On a donc établi le *théorème de* WEIERSTRASS sur le segment $[0;1]$: toute fonction continue sur $[0;1]$ y est limite uniforme d'une suite de polynômes. On en déduit aisément, et on l'admet, le théorème d'approximation de WEIERSTRASS sur un segment quelconque $[a;b]$.

PARTIE III - Développement de $V^*\circ V(f)$ en série trigonométrique

On considère maintenant l'espace vectoriel G des fonctions réelles définies et continues sur l'intervalle $[0;\pi]$, muni du produit scalaire défini pour tous f, g dans G par :

$$\langle f\mid g\rangle_G=\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On note : $\|f\|_G=\sqrt{\langle f\mid f\rangle_G}$ la norme associée à ce produit scalaire.
Pour n entier, on définit la fonction c_n dans G par la formule $c_n(t)=\cos(nt)$ et on note $F_n=\mathrm{V}ect\,(c_0,\dots,c_n)$ le sous espace vectoriel de G engendré par $(c_0,\dots,c_n)$. On note également P_{F_n} la projection orthogonale de G sur F_n.

8) Montrer que si p est un polynôme de degré n entier, la fonction $t\longmapsto p(\cos(t))$ définie sur $[0;\pi]$ appartient à F_n.

9) Trouver une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de nombres réels strictement positifs telle que la suite $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ soit orthonormée. Déduire du théorème d'approximation de WEIERSTRASS que la suite orthonormée $(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale.

10) Soit f dans G, montrer que $\|f-P_{F_n}(f)\|_G$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Si de plus la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0;\pi]$ vers une fonction g, montrer $g=f$.

Pour tout x dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on définit la fonction g_x sur $[0;\pi]$ par la formule :

$$g_x(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\max(x,t) & \text{si } 0\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\\ -g_x(\pi-t) & \text{si } \dfrac{\pi}{2}\leq t\leq\pi\end{cases}$$

11) Soit n entier. Déterminer les coordonnées de $P_{F_n}(g_x)$ sur la base $(c_0,c_1,\dots,c_n)$ de F_n. En déduire pour tout t dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\pi}{2}-\max(x,t)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t)\ .$$

12) Montrer que pour tous f dans E et x dans $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$:

$$V^*\circ V(f)(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\max(x,t)\right)f(t)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la suite des coefficients $(a_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ pour laquelle on a

$$V^* \circ V(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) c_{2n+1} \ .$$

PARTIE IV - Équations différentielles du type Sturm-Liouville

Soit h dans E, λ réel et l'équation différentielle :

$$(S) \ \begin{cases} y'' + \lambda y + h = 0 \\ y(\frac{\pi}{2}) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

On définit, pour tout entier n, φ_n dans E par la formule : $\varphi_n = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} c_{2n+1}$.

13) Montrer pour tous f dans E et n entier, $\langle V^* \circ V(f) \,|\, \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle f \,|\, \varphi_n \rangle$.

14) Montrer que g est solution de l'équation différentielle (S) si et seulement si $g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h)$ et que dans ce cas, on a les formules suivantes pour tout entier n :

$$\left(1 - \frac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g \,|\, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle$$

et

$$g = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n \ .$$

15) On suppose dans cette question que λ n'est *pas* égal au carré d'un entier impair. Montrer que la série

$$\sum \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n$$

est normalement convergente. Exhiber alors une solution de (S).

On suppose maintenant qu'il existe p entier tel que $\lambda = (2p+1)^2$. Soit p un tel entier.

16) Montrer que si $\langle h \,|\, \varphi_p \rangle = 0$ alors (S) a une infinité de solutions, puis exhiber l'une d'entre elles. Que peut-on dire si $\langle h \,|\, \varphi_p \rangle \neq 0$?

Première composition – Mines-Ponts 2015 – MP

PARTIE I - Opérateur de Volterra

1) D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, pour f dans E, $V(f)$ et $-V^*(f)$ sont des primitives de f, la première s'annulant en 0 et la seconde s'annulant en $\pi/2$. Pour f et g dans E, on a donc $(V(f)V^*(g))' = fV^*(g) - V(f)g$ et, par intégration sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et annulation en 0 et $\pi/2$ de $V(f)V^*(g)$, il vient $\boxed{\langle V(f)\,|\,g\rangle = \langle f\,|\,V^*(g)\rangle.}$

2) Pour f et g dans E, on a d'après ce qui précède

$$\langle V^*\circ V(f)\,|\,g\rangle = \langle V(f)\,|\,V(g)\rangle = \langle f\,|\,V^*\circ V(g)\rangle$$

et donc $\langle V^*\circ V(f)\,|\,f\rangle = \|V(f)\|^2$. De plus $V(f)=0$ entraîne $f = V(f)' = 0$ et donc si f est non nul, $\langle V^*\circ V(f)\,|\,f\rangle > 0$, ce qui montre que $\boxed{V^*\circ V \text{ est symétrique défini positif.}}$

Il résulte alors du théorème spectral que $V^*\circ V$ est orthodiagonalisable et, si (λ, f) est un couple propre pour cet endomorphisme, on a $\lambda\,\|f\|^2 = \langle V^*\circ V(f)\,|\,f\rangle = \|V(f)\|^2$ et donc $\lambda > 0$ puisque f est non nul et qu'on vient de voir qu'alors $V(f)$ n'est pas nul. Il en résulte que

$\boxed{\text{les valeurs propres de } V^*\circ V \text{ sont strictement positives.}}$

3) Puisque $V^*\circ V(f_\lambda)$ est la primitive s'annulant en $\pi/2$ de la primitive s'annulant en 0 de λf_λ, qui est continue, elle est de classe C^2 et donc, puisque λ est non nul, f_λ l'est aussi et il vient, en dérivant deux fois :

$$f_\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\lambda}V^*\circ V(f_\lambda) = 0 \quad \text{et} \quad f'_\lambda = -\frac{1}{\lambda}V(f_\lambda)$$

puis

$$f'_\lambda(0) = -\frac{1}{\lambda}V(f_\lambda)(0) = 0 \quad \text{et} \quad f''_\lambda = -\frac{1}{\lambda}f_\lambda$$

i.e. $\boxed{f_\lambda \text{ est de classe } C^2 \text{ et vérifie } y'' + \dfrac{1}{\lambda}y = 0 \text{ et } y(\tfrac{\pi}{2}) = y'(0) = 0.}$

4) On en déduit, par intégration de l'équation différentielle, que f_λ est combinaison linéaire de $x\mapsto \cos(x/\sqrt{\lambda})$ et de $x\mapsto\sin(x/\sqrt{\lambda})$. En raison de la condition $f'_\lambda(0)=0$, f_λ est en fait un multiple de $x\mapsto\cos(x/\sqrt{\lambda})$ et la condition sur $f_\lambda(\pi/2)$ s'écrit $\frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}} \in \frac{\pi}{2} + \pi\mathbf{Z}$ et comme le membre de droite est positif on en déduit que nécessairement $\dfrac{1}{\sqrt{\lambda}} \in 1+2\mathbf{N}$. Réciproquement la fonction précédente convient, i.e.

$\boxed{\lambda \in \mathrm{Sp}(V^*\circ V) \text{ si et seulement s'il existe } n \text{ dans } \mathbf{N} \text{ tel que } \lambda = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \text{ et alors les vecteurs propres associés sont de la forme } x\mapsto\alpha\cos((2n+1)x), \text{ avec } \alpha\in\mathbf{R}^*.}$

PARTIE II - Théorème d'approximation de Weierstrass

5) $\boxed{S_n \text{ suit une loi binomiale de paramètres } (n,x).}$

Puisque S_n est bornée, elle admet des moments de tous ordres. Et on a, par indépendance et par linéarité de l'espérance

$$\mathbf{E}(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) \quad \text{et} \quad \mathrm{V}(S_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}(X_k)\ ,$$

i.e. $\boxed{\mathbf{E}(S_n) = nx \text{ et } \mathrm{V}(S_n) = nx(1-x).}$

6) Puisque S_n admet un moment d'ordre 2, par inégalité de Bienaymé-Tchebychev, il vient, pour α strictement positif,

$$\mathbf{P}\left(|S_n - nx| \geq n\alpha\right) \leq \frac{V(S_n)}{(n\alpha)^2} = \frac{nx(1-x)}{n^2\alpha^2} \ .$$

Or, par inégalité arithmético-géométrique, puisque x et $1-x$ sont positifs, on a $x(1-x) = \sqrt{x(1-x)}^2 \leq \left(\dfrac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$ avec égalité si et seulement si $x = 1-x = \dfrac{1}{2}$. De plus

$$(|S_n - nx| \geq n\alpha) = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha}} (S_n = k)$$

et donc, par additivité des probabilités, $\boxed{\displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \alpha}} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4n\alpha^2}.}$

7) D'après la formule de transfert, pour g continue de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$, on a

$$\mathbf{E}\left(g(Z_n)\right) = \mathbf{E}\left(g\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right)$$

et donc, en appliquant cette formule à $g = f - f(x)$ et en utilisant la linéarité de l'espérance, il vient

$$B_n(g)(x) = B_n(f)(x) - f(x)\mathbf{E}\left(1\right) = B_n(f)(x) - f(x)$$

puis $\boxed{\displaystyle B_n(f)(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left(f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right).}$

Soit ε strictement positif. Puisque f est continue sur le segment $[0;1]$, il résulte de la compacité de ce segment et du théorème de Heine, que f y est uniformément continue. Soit alors α tel que

$$\forall (t,u) \in [0;1]^2 \qquad |t-u| \leq \alpha \Longrightarrow |f(t) - f(u)| \leq \varepsilon \ .$$

Puisque $[0;1]$ est compact et f y est continue, il résulte du théorème de Weierstrass qu'il est y est bornée. En notant $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $[0;1]$, on a donc, pour $0 \leq k \leq n$, $\left|f\left(\dfrac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leq 2\|f\|_\infty$ par inégalité triangulaire. En séparant la somme précédente selon les valeurs de k vérifiant ou non $\left|\dfrac{k}{n} - x\right| < \alpha$, il vient, encore par inégalité triangulaire,

$$|B_n(f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \mathbf{P}\left(|S_n - nx| < n\alpha\right) + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\alpha^2}$$

et donc, puisqu'une probabilité est inférieure à 1 et pour n supérieur à $\dfrac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2}$, on a $|B_n(f)(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$. Comme cette majoration est indépendante de x, on en déduit que, pour le même n (dépendant de α, donc de ε, mais pas de x), on a $\|B_n(f) - f\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Donc

$\boxed{(B_n(f))_{n\in\mathbf{N}} \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0;1].}$

PARTIE III - Développement de $V^* \circ V(f)$ en série trigonométrique

8) Soit p un polynôme de degré n entier. La fonction $t \longmapsto p(\cos(t))$, définie sur $[0;\pi]$, appartient donc $\mathrm{V}ect\,(1, \cos, \dots, \cos^n)$. Or il résulte de la formule d'EULER et de celle du binôme de NEWTON que, pour k dans $[\![1;n]\!]$, on a

$$\cos^k = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{0 \leq j < \frac{k}{2}} \binom{k}{j} c_{n-2j} + \frac{\delta_{k\in 2\mathbf{Z}}}{2^k} \binom{k}{k/2} c_0$$

où, $\delta_{k\in 2\mathbf{Z}}$ vaut 1 ou 0 selon que k est pair ou non. En particulier $c_k \in F_n$ et donc $\boxed{p \circ \cos \text{ appartient à } F_n.}$

9) Pour n et m dans $\mathbf{N}$, on a $2c_n c_m = c_{n+m} + c_{|n-m|}$, d'après les formules d'addition du cosinus (et en utilisant la parité du cosinus) et donc, par intégration sur $[0;\pi]$ et par linéarité de l'intégrale, $2\,\langle c_n \mid c_m \rangle = \pi(\delta_{n+m} + \delta_{n-m})$, où δ_i vaut 1 ou 0 selon que i est nul ou pas. On en déduit que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est orthogonale, puis qu'on a $\|c_0\|^2 = \pi$ et $\|c_n\|^2 = \dfrac{\pi}{2}$ si $n > 0$. Par conséquent, en posant $\boxed{\alpha_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ et } \alpha_n = \sqrt{\dfrac{2}{\pi}} \text{ pour } n \in \mathbf{N}^*,\ (\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est orthonormée.}}$

Soit f dans G. Alors $f \circ \arccos$ est une fonction continue sur $[-1;1]$ par composition de fonctions continues et on dispose donc, grâce au théorème d'approximation de WEIERSTRASS, d'une suite p_n de fonctions polynomiales telle que $\lim\limits_n \sup\limits_{[-1;1]} |f \circ \arccos - p_n| = 0$ ou encore, puisque cos est à valeurs dans $[-1;1]$, $\lim\limits_n \sup\limits_{[0;\pi]} |f \circ \arccos \circ \cos - p_n \circ \cos| = 0$. Il résulte alors de l'inégalité de la moyenne qu'on a $\|f - p_n \circ \cos\|_G = o\,(1)$, et donc $d(f, F_n) = o\,(1)$, d'après la question précédente. Autrement dit l'adhérence de $\mathrm{V}ect\,(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ contient f, i.e. $\boxed{(\alpha_n c_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ est totale.}}$

10) D'après le théorème de PYTHAGORE $\|f - P_{F_n}(f)\|_G = d(f, F_n)$ et donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\lim \|f - P_{F_n}(f)\|_G = 0.}$

Si la suite $(P_{F_n}(f))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0;\pi]$ vers une fonction g, alors cette fonction est continue, en tant que limite uniforme de fonctions continues et, par inégalité triangulaire et d'après l'inégalité de la moyenne, on a

$$0 \leq \|f - g\|_G \leq \|f - P_{F_n}(f)\|_G + \|P_{F_n}(f) - g\|_G \leq \|f - P_{F_n}(f)\|_G + \sqrt{\pi}\,\|P_{F_n}(f) - g\|_\infty = o\,(1)$$

où la norme de la convergence uniforme est prise sur $[0;\pi]$, puisque le majorant est somme de deux termes tendant vers 0. Par encadrement des limites, $\|f - g\| = 0$ et donc $\boxed{g = f.}$

11) Soit x dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction g_x est bien définie en $\dfrac{\pi}{2}$ car les deux formules donnant sa valeur donnent toutes les deux 0. Soit h_x et k_x les restrictions de g_x à $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ respectivement. Comme, pour a et b réels on a $\max(a,b) = \dfrac{1}{2}(a + b + |b - a|)$, h_x est continue et donc g_x est continue sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$. Par composition avec des fonctions affines, la continuité de h_x entraîne celle de k_x et donc celle de g_x sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$ ainsi que sa continuité à droite en $\dfrac{\pi}{2}$. Par conséquent g_x appartient à G. Puisque la famille $(\alpha_k c_k)_{n\in\mathbf{N}}$ est totale, en particulier $(\alpha_k c_k)_{k\leq n}$ est une base orthonormée de F_n et on a

$$P_{F_n}(g_x) = \sum_{k=0}^{n} \langle g_x \mid \alpha_k c_k \rangle\, \alpha_k c_k$$

de sorte qu'en notant $(a_k)_{k\le n}$ les coordonnées cherchées, on a

$$\forall k \in [\![0;n]\!] \qquad a_k = \alpha_k^2 \int_0^\pi g_x(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme, pour t dans $[0;\pi]$ et k dans $[\![0;n]\!]$, on a $\cos(k(\pi-t)) = (-1)^k\cos(kt)$, il vient par changement de variable affine bijectif,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} g_x(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = (-1)^{k+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t$$

et $a_k = 0$ si k est pair et sinon, puisqu'en particulier k est non nul, il vient, par intégration par parties, ce qui licite car les fonctions affines et trigonométriques sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
a_k &= \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\int_0^x \cos(kt)\,\mathrm{d}t + \int_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos(kt)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(kx)}{k} - \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\frac{\sin(kx)}{k} + \int_x^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(kt)}{k}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\cos(kx)}{k^2}
\end{aligned}$$

par imparité de k et donc nullité de $\cos(k\pi/2)$. Finalement les coordonnées cherchées sont, en notant $\delta_{k\equiv 1 \pmod 2}$ la quantité valant 0 ou 1 selon que k est pair ou impair, $\boxed{\left(\dfrac{4\cos(kx)}{\pi k^2}\delta_{k\equiv 1 \pmod 2}\right)_{0\le k\le n}}$.

Autrement dit

$$P_{F_n}(g_x) = \sum_{0\le k\le \frac{n-1}{2}} \frac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2}c_{2k+1}\,.$$

En notant, pour k entier, $f_k = \dfrac{4\cos((2k+1)x)}{\pi(2k+1)^2}c_{2k+1}$, on a

$$\sup_{[0;\pi]}|f_k(t)| \le \frac{4}{\pi(2k+1)^2}$$

et donc la série $\sum f_k$ converge normalement sur $[0;\pi]$ par comparaison avec une série de Riemann convergente. Elle converge donc aussi uniformément, i.e. la suite $(P_{F_n}(g_x))_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur $[0;\pi]$. Il résulte de la question 10 que, pour tout t dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$$\boxed{\frac{\pi}{2} - \max(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2}\cos((2n+1)t).}$$

12) Soit f dans E et x dans $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. La fonction $V(f)$ est de classe C^1 sur $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ en tant que primitive d'une fonction continue sur cet intervalle et il vient par intégration par parties

$$\begin{aligned}
V^*\circ V(f)(x) &= \left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)V(f)(t)\right]_x^{\pi/2} + \int_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{V^* \circ V(f)(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right) f(t)\,\mathrm{d}t.}$

On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Pour n entier on a $\|g_x f - p_{F_n}(g_x) f\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g_x - p_{F_n}(g_x)\|_\infty$ de sorte que $p_{F_n}(g_x)f$ converge uniformément vers $g_x f$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On peut donc échanger limite et intégrale pour obtenir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g_x x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim \int_0^{\frac{\pi}{2}} p_{F_n}(g_x) f(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - \max(x,t)\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos((2n+1)x)}{(2n+1)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos((2n+1)t) f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Ainsi on a $V^* \circ V(f) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(f) c_{2n+1}$ pour $(a_n(f))_{n\in\mathbf{N}}$ donné par $\boxed{a_n(f) = \dfrac{4}{(2n+1)^2\pi} \langle f \mid c_{2n+1}\rangle.}$

La série précédente est normalement convergente puisque, par inégalite de Cauchy-Schwarz et comparaison à une série de Riemann convergente,

$$\|a_n(f) c_{2n+1}\|_\infty \leq \frac{4}{(2n+1)^2\pi} \|f\| \, \|c_{2n+1}\| = \frac{2}{(2n+1)^2\sqrt{\pi}} \|f\| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc on peut intervertir série et intégrale pour obtenir, pour n entier, $a_n(f) = \dfrac{4}{\pi} \langle V^* \circ V(f) \mid c_{2n+1}\rangle$.

Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (a_n(f)) \text{ est unique.}}$

PARTIE IV - Équations différentielles du type Sturm-Liouville

13) Soit f dans E et n entier. D'après la question 4, φ_n est vecteur propre pour $V^* \circ V$ pour la valeur propre $\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et, d'après la question 1, on a

$$\langle V^* \circ V(f) \mid \varphi_n\rangle = \langle V(f) \mid V(\varphi_n)\rangle = \langle f \mid V^* \circ V(\varphi_n)\rangle$$

et il vient $\boxed{\langle V^* \circ V(f) \mid \varphi_n\rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle f \mid \varphi_n\rangle.}$

14) Remarquons que, par définition, les solutions de (S) sont de classe C^2 sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Soit y un élément de ce dernier ensemble, on a par définition de V,

$$(y'' = -\lambda y - h \quad \& \quad y'(0) = 0) \iff y' = V(-\lambda y - h)\ .$$

Puis, par définition de V^*,

$$\left(y' = V(-\lambda y - h) \quad \& \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\right) \iff y = -V^* \circ V(-\lambda y - h)\ .$$

Par linéarité de $V^* \circ V$, on en déduit que g est solution de l'équation différentielle (S) si et seulement si $\boxed{g = \lambda V^* \circ V(g) + V^* \circ V(h).}$

Dans ce cas, pour tout entier n, on a, en utilisant la question 13, et par linéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}\langle g \,|\, \varphi_n \rangle &= \lambda \langle V^* \circ V(g) \,|\, \varphi_n \rangle + \langle V^* \circ V(h) \,|\, \varphi_n \rangle \\ &= \frac{\lambda}{(2n+1)^2} \langle g \,|\, \varphi_n \rangle + \frac{1}{(2n+1)^2} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle\end{aligned}$$

i.e. $\boxed{\left(1 - \dfrac{\lambda}{(2n+1)^2}\right) \langle g \,|\, \varphi_n \rangle = \dfrac{1}{(2n+1)^2} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle,}$ et d'après la question 12 et par linéarité du produit scalaire

$$\begin{aligned}g &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(g) c_{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(h) c_{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{(2n+1)^2 \pi} \langle \lambda g + h \,|\, c_{2n+1} \rangle \, c_{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-1}{(2n+1)^2} \langle g'' \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n \;.\end{aligned}$$

Or, pour n entier, par intégration par parties, puisque φ_n est de classe C^∞ sur $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ et puisque $g'(0) = \varphi_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, d'une part, et $\varphi_n'(0) = g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ d'autre part, il vient

$$\langle g'' \,|\, \varphi_n \rangle = -\langle g' \,|\, \varphi_n' \rangle = \langle g \,|\, \varphi_n'' \rangle = -(2n+1)^2 \langle g \,|\, \varphi_n \rangle$$

et donc $\boxed{g = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \langle g \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n.}$

15) On note $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme sur E. La suite (φ_n) est alors bornée pour cette norme et également orthonormée pour le produit scalaire sur E. On en déduit, par inégalité de Cauchy-Schwarz, qu'on a

$$\left\| \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n \right\|_\infty \leq \frac{\|h\|}{|(2n+1)^2 - \lambda|} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, entre séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n$ est $\boxed{\text{normalement convergente.}}$

On note g sa somme. Alors g appartient à E en tant que somme d'une série normalement, donc uniformément, convergente de fonctions dans E. Toujours par convergence uniforme, on peut intervertir somme et intégrale, de sorte qu'on a, pour tout entier n,

$$\langle g \,|\, \varphi_n \rangle = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(2m+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_m \rangle \langle \varphi_m \,|\, \varphi_n \rangle = \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle$$

et il résulte donc de la question 14 que $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle \, \varphi_n \text{ est solution de } (S).}$

16) Soit x un réel. Le problème de Cauchy donné par

$$y'' + \lambda y + h = 0 \qquad \text{et} \qquad y(0) - x = y'(0) = 0$$

admet une unique solution puisqu'on a affaire à une équation différentielle linéaire à coefficients constants. Soit g cette solution. En reprenant les calculs effectués en fin de question 14, il vient

$$\langle g'' \,|\, \varphi_p \rangle = -\left\langle g' \;\middle|\; \varphi_p' \right\rangle = -g\varphi_p'\left(\frac{\pi}{2}\right) + \left\langle g \;\middle|\; \varphi_p'' \right\rangle = -g\varphi_p'\left(\frac{\pi}{2}\right) - \lambda \langle g \,|\, \varphi_p \rangle$$

de sorte qu'on a

$$0 = \langle g'' + \lambda g + h \,|\, \varphi_p \rangle = \langle h \,|\, \varphi_p \rangle - g\varphi_p'\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

et donc, puisqu'on a $\varphi_p'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^p(2p+1) \neq 0$, il vient

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Longleftrightarrow \langle h \,|\, \varphi_p \rangle = 0$$

et donc g est solution de (S) si et seulement si $\langle h \,|\, \varphi_p \rangle = 0$. Comme, pour deux valeurs de x différentes, les fonctions ainsi obtenues sont distinctes, puisque prenant des valeurs différentes en 0, si $\langle h \,|\, \varphi_p \rangle = 0$, alors $\boxed{(S) \text{ a une infinité de solutions.}}$ Le raisonnement et les calculs de la question 15 montrent alors qu'une solution de (S) est donnée par $\boxed{\displaystyle\sum_{n \neq p} \frac{1}{(2n+1)^2 - \lambda} \langle h \,|\, \varphi_n \rangle \varphi_n.}$ Enfin, puisqu'une solution g de (S) est solution du problème de Cauchy précédent pour $x = g(0)$, on en déduit également que si on a $\langle h \,|\, \varphi_p \rangle \neq 0$, alors $\boxed{(S) \text{ n'admet pas de solution.}}$