Première composition de mathématiques
Mines-Ponts MP 2007

Dans tout le problème, $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers, $\mathbf{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs et N un entier supérieur ou égal à 2.

L'ensemble des classes d'équivalence pour la division euclidienne par N est noté $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$. L'élément générique de cet anneau sera noté $\overline{a}$. On note P l'ensemble des éléments de $\{1, \ldots, N-1\}$ qui sont premiers avec N. L'ensemble des éléments inversibles pour la multiplication de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est noté $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$. On rappelle que φ, l'indicatrice d'Euler, est telle que $\varphi(N)$ représente le cardinal de P. Si a divise b dans $\mathbf{Z}$, on notera $a \mid b$.

On suppose fixée une application χ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{R}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

A. $\chi(0) = 0$ et χ est non identiquement nul.

B. Pour tout a dans $\mathbf{Z}$, non premier avec N,
$$\chi(a) = 0 \,.$$

C. Pour tous entiers relatifs a et b,
$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) \,.$$

D. χ est N-périodique : pour tout a dans $\mathbf{Z}$,
$$\chi(a+N) = \chi(a) \,.$$

PARTIE I - Préliminaires

1. Rappeler le développement en série entière de arctan en 0,déterminer son rayon de convergence R et démontrer que cette série converge uniformément sur $[-R, R]$.
2. Soit $(u_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ deux suites réelles. Pour tout entier n supérieur à 1, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$. Montrer, pour tous entiers n et m vérifiant $2 \leq n < m$.
$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k(u_k - u_{k+1}) + u_m T_m \,.$$

PARTIE II - Cas particuliers

3. Calculer $\chi(1)$.
4. En supposant $N = 2$, déterminer χ.
   On suppose jusqu'à la fin de cette partie $N = 4$.
5. Montrer que $\chi(3)$ ne peut prendre que les valeurs 1 ou -1.
6. On suppose maintenant $\chi(3) = -1$. Montrer la convergence et calculer la valeur de la série
$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} \,.$$

PARTIE III - Convergence de la série $\sum_1^\infty \frac{\chi(n)}{n}$

Dans cette partie, a est un entier supérieur ou égal à 1 et premier avec N. Pour k dans $\{1, \dots, N-1\}$, on désigne par r_k le reste de la division euclidienne de ak par N.

7. En considérant le produit $\prod_{k \in P} ak$, montrer que $a^{\varphi(N)} - 1$ est divisible par N.
8. Montrer $|\chi(a)| = 1$.
9. Montrer que les r_k sont deux à deux distincts.
10. Établir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) .$$

On suppose dorénavant qu'il existe a premier avec N vérifiant $\chi(a) \neq 1$.

11. Pour tout entier n, calculer $\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k)$.
On pourra commencer par le cas $n = 0$.
12. Montrer, pour tout $m > 0$, l'inégalité

$$\left| \sum_{k=1}^{m} \chi(k) \right| \leq \varphi(N) .$$

13. Montrer que la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k} \right)_{n \geq 1}$ est convergente.

PARTIE IV - Comportement asymptotique

Pour tout entier n supérieur à 1, on pose

$$f_n = \sum_{d|n} \chi(d) ,$$

où, dans la définition, d décrit l'ensemble des diviseurs entiers (positifs) de n.

14. Soit n et m deux entiers strictement positifs, premiers entre eux. Montrer $f_{nm} = f_n f_m$.
15. Soit p un nombre premier et α dans $\mathbf{N}^*$. Calculer f_{p^α}.
16. Pour tout entier n supérieur à 1, établir l'encadrement :

$$0 \leq f_n \leq n .$$

17. Pour tout entier n supérieur à 1, montrer $f_{n^2} \geq 1$.
18. Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n x^n$.

On note $f(x)$ la somme de cette série.

19. Montrer, pour tout x dans $[1/2, 1[$:

$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2} \, \mathrm{d}u ,$$

où l'intégrale précédente est à comprendre comme la limite pour t tendant vers l'infini de l'intégrale entre $\sqrt{\ln(2)}$ et t.

Première composition de mathématiques – Mines-Ponts MP 2007

PARTIE I - Préliminaires

1. Le développement en série entière de arctan en 0 est donné par $\boxed{\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$ et, puisque le rapport $\frac{2n-1}{2n+1}$ tend vers 1 quand n tend vers l'infini, le critère de d'Alembert (comparaison à une série géométrique) montre que $\boxed{\text{son rayon de convergence est égal à 1.}}$
De plus, pour x dans $]-1,1[$, puisque la suite $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est de signe constant et décroit vers 0 en valeur absolue, le théorème de Leibniz pour les séries alternées montre qu'on a
$$\left| \arctan(x) - \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \right| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{2N+3}$$
et donc la série entière converge uniformément sur $]-1,1[$. Par continuité de arctan et par convergence uniforme de la série entière sur $]-1,1[$, cette dernière converge également en -1 et 1 et sa valeur y est égale à la limite de ses valeurs en ces points, à savoir la valeur de arctan en ces points. Autrement dit le développement en série entière est valide pour x dans $[-1,1]$.
Comme la suite $\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ est de signe constant et décroit vers 0 en valeur absolue y compris si $|x| = 1$, l'argument précédent montre qu'il y a en fait $\boxed{\text{convergence uniforme sur } [-1,1].}$
2. Soit n et m deux entiers vérifiant $2 \leq n < m$. On a
$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k &= \sum_{k=n}^{m} (T_k - T_{k-1}) u_k \\
&= \sum_{k=n}^{m} T_k u_k - \sum_{k=n-1}^{m-1} T_k u_{k+1} \\
&= u_m T_m + \sum_{k=n}^{m-1} T_k u_k - \sum_{k=n}^{m-1} T_k u_{k+1} - u_n T_{n-1} \\
&= -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m
\end{aligned}$$
i.e. $\boxed{\sum_{k=n}^{m} \alpha_k u_k = -u_n T_{n-1} + \sum_{k=n}^{m-1} T_k (u_k - u_{k+1}) + u_m T_m.}$

PARTIE II - Cas particuliers

3. Puisque χ n'est pas identiquement nul, on dispose de n dans $\mathbf{Z}$ tel que $\chi(n)$ est non nul. Comme $1 \times n = n$, la multiplicativité de χ entraîne $\chi(1)\chi(n) = \chi(n)$ et donc, puisque $\chi(n)$ est non nul, $\boxed{\chi(1) = 1.}$

4. Par 2-périodicité χ est nécessairement égal à la fonction indicatrice de l'ensemble $1+2\mathbf{Z}$ des entiers relatifs impairs. Réciproquement puisque 0 est pair, que 1 est impair, qu'un nombre impair est exactement un nombre premier à 2, qu'un produit de deux nombres est impair si et seulement si ces deux nombres le sont et, enfin, que l'addition de 2 à nombre préserve sa parité, la fonction indicatrice de $1+2\mathbf{Z}$, notée $\mathbb{1}_{1+2\mathbf{Z}}$ satisfait aux quatre propriétés requises dans le cas $N=2$, i.e. $\boxed{\chi = \mathbb{1}_{1+2\mathbf{Z}}.}$

5. Comme $3\times 3 = 9 = 1 + 4\times 2$, par multiplicativité et 4-périodicité, il vient $\chi(3)^2 = \chi(1) = 1$ et donc $\boxed{\chi(3) \in \{1, -1\}.}$

6. Les sommes partielles de la série considérée sont les mêmes que celles de la série alternée $\sum \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. Comme la suite $1/(2n+1)$ est décroissante et tend vers 0, le critère de Leibniz (critère spécial des séries alternées) permet de conclure que $\boxed{\sum_{n\geq 1} \dfrac{\chi(n)}{n} \text{ est convergente.}}$

D'après la question 1. la somme de cette série est arctan(1), i.e. $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\chi(n)}{n} = \dfrac{\pi}{4}.}$

PARTIE III - Convergence de la série $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{\chi(n)}{n}$

7. Puisque $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est un anneau, $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ est un groupe multiplicatif. En particulier l'application $x \mapsto \overline{a}x$ est une bijection de $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ sur lui-même. Or l'application de P dans $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ donnée par $k \mapsto \overline{k}$ est également une bijection et le morphisme canonique $n \mapsto \overline{n}$ de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ est un morphisme d'anneaux. Il en résulte

$$\overline{\prod_{k\in P}(ak)} = \prod_{k\in P}(\overline{a}\overline{k}) = \prod_{x\in \mathbf{Z}/N\mathbf{Z}}(\overline{a}x) = \prod_{x\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} x$$

et donc, puisque $\displaystyle\prod_{x\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}} x$ est régulier dans le groupe $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$, il vient $\overline{a}^{|P|} = \overline{1}$ ou encore, puisque $|P| = \varphi(N)$, $\boxed{N \text{ divise } a^{\varphi(N)} - 1.}$

8. Puisque $a^{\varphi(n)}$ diffère de 1 par un multiple de N, par N-périodicité et multiplicativité de χ, $\chi(a)^{\varphi(n)} = \chi\left(a^{\varphi(n)}\right) = \chi(1) = 1$ et donc $\chi(a)$ est une racine de l'unité. En particulier $\boxed{|\chi(a)| = 1.}$

9. Puisque $\overline{a}$ est inversible dans $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$, l'application $\tau_a : x \mapsto \overline{a}x$ est injective de $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ dans lui-même. Comme l'application π donnée par $k \mapsto \overline{k}$ est une bijection de $\{0,\dots,N-1\}$ dans lui-même et qu'on a $\overline{a}\overline{0} = \overline{0}$, l'application $\pi^{-1}\circ\tau_a\circ\pi$ est une injection de $\{1,\dots,N-1\}$ dans lui-même. Comme $\pi^{-1}\circ\tau_a\circ\pi(k) = \pi^{-1}(\overline{ak}) = r_k$, il en résulte que $\boxed{\text{les } r_k \text{ sont tous distincts.}}$

10. Par cardinalité, et d'après la question précédente, l'application $k \mapsto r_k$ est une bijection de $\{1,\dots,N-1\}$ sur lui-même. Or, par N-périodicité, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1}\chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1}\chi(r_k)$ et il vient

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N-1} \chi(ak) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)}$$

11. Par multiplicativité, l'identité précédente se récrit $\chi(a) \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = \sum_{k=1}^{N-1} \chi(k)$ et donc, puisqu'on dispose d'un entier a premier à N vérifiant $\chi(a) \neq 1$, on a $\sum_{k=1}^{N-1} \chi(k) = 0$ et aussi, puisque $\chi(0) = 0$, $\sum_{k=0}^{N-1} \chi(k) = 0$. Pour n entier, il vient par multiplicativité

$$\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = \sum_{k=0}^{N-1} \chi(n+k) = \chi(n) \sum_{k=0}^{N-1} \chi(k)\,,$$

d'où $\boxed{\sum_{k=n}^{n+N-1} \chi(k) = 0.}$

12. Soit m dans $\mathbf{N}^*$. On note $[\cdot]$ la partie entière. On écrit l'ensemble $[\![1, m]\!]$ comme la réunion disjointe de $[m/N]$ suites de N entiers successifs (le nombre de suites est donc éventuellement réduit à 0) et d'une suite de r_m entiers successifs (cette suite étant éventuellement vide). D'après ce qui précède la somme des valeurs de χ sur toute suite de N entiers consécutifs est nulle. Par définition de χ, χ s'annule sur les entiers non premiers à N et il en résulte $\sum_{k=1}^{m} \chi(k) = \sum_{\substack{1\leq k\leq r_m \\ k\wedge N=1}} \chi(k)$.
D'après la question 8. pour tout k apparaissant dans la somme on a $|\chi(k)| = 1$. De plus, comme $r_m \leq N-1$, le nombre total de k apparaissant dans la somme est inférieur au cardinal de P, i.e. $\varphi(N)$. Il résulte donc de l'inégalité triangulaire $\boxed{\left|\sum_{k=1}^{m} \chi(k)\right| \leq \varphi(N).}$

13. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on pose $T_n = \sum_{k=1}^{n} \chi(k)$. D'après les question 2. et 12., l'inégalité triangulaire et la décroissance de la fonction inverse on a, pour tous entiers n et m vériant $2 \leq n < m$,

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=n}^{m} \frac{\chi(k)}{k}\right| &\leq \frac{|T_{n-1}|}{n} + \sum_{k=n}^{m-1} |T_k| \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{|T_m|}{m} \\
&\leq \varphi(N) \left\{\frac{1}{n} + \sum_{k=n}^{m-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \frac{1}{m}\right\} \\
&\leq 2\frac{\varphi(N)}{n}
\end{aligned}$$

et donc, d'après le critère de Cauchy, $\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\chi(k)}{k}\right)_{n\geq 1} \text{ converge.}}$

PARTIE IV - Comportement asymptotique

14. Soit d un diviseur de nm. On pose $d_1 = d \wedge n$ et $d_2 = d \wedge m$. Comme d_1 divise n et d_2 divise m, une relation de Bézout entre n et m induit une relation de Bézout entre d_1 et d_2, donc $d_1 \wedge d_2 = 1$. Comme de plus $d_1|d$ et $d_2|d$, le lemme de Gauss entraîne $d_1d_2|d$. Réciproquement, d'après le théorème de Bézout, on dispose d'entiers u, v, x et y tels que $du + nv = d_1$ et $dx + my = d_2$, on en déduit par produit de ces deux relations que d_1d_2 s'écrit comme combinaison linéaire à coefficients entiers de d et nm et donc, puisque $d|nm$, que d divise d_1d_2. Par conséquent $d = d_1d_2$.

   On remarque également que si a divise n et b divise m, alors ab divise nm.

   On en déduit que l'application $(d_1, d_2) \mapsto d_1d_2$ définit une application bijective du produit cartésien des ensembles de diviseurs positifs de n et m sur l'ensemble des diviseurs positifs de nm dont la réciproque est l'application $d \mapsto (d \wedge n, d \wedge m)$.

   Il vient donc, par multiplicativité de χ,

$$\begin{aligned} f_{nm} &= \sum_{d|nm} \chi(d) \\ &= \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} \chi(d_1d_2) \\ &= \sum_{d_1|n} \sum_{d_2|m} \chi(d_1)\chi(d_2) \\ &= \left(\sum_{d_1|n} \chi(d_1)\right) \cdot \left(\sum_{d_2|m} \chi(d_2)\right) \\ &= f_nf_m\,, \end{aligned}$$

   i.e. $\boxed{f_{nm} = f_nf_m.}$

15. On a, par multiplicativité de χ et puisque $\chi(1) = 1$,

$$f_{p^\alpha} = \sum_{k=0}^{\alpha} \chi(p^k) = \sum_{k=0}^{\alpha} \chi(p)^k\ .$$

   Il en résulte $\boxed{\text{si } \chi(p) = 1, \text{ alors } f_{p^\alpha} = \alpha + 1, \text{ et sinon } f_{p^\alpha} = \dfrac{1 - \chi(p)^{\alpha+1}}{1 - \chi(p)}.}$

16. D'après l'expression précédente et la question 8., pour tout nombre premier p et tout α dans $\mathbf{N}^*$, on a $f_{p^\alpha} \in \{0, 1, \alpha + 1\}$ et donc $0 \leq f_{p^\alpha} \leq p^\alpha$. D'après la question 14., en utilisant la décomposition en nombres premiers, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on a, puisque qu'on multiplie des inégalités entres termes positifs, $\boxed{0 \leq f_n \leq n.}$

17. D'après la question 15. avec $\alpha = 2$, et puisque la fonction cube est l'identité sur $\{-1, 0, 1\}$, on a pour tout nombre premier p $f_{p^2} \in \{1, 3\}$. L'argument précédent permet de conclure, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $\boxed{f_{n^2} \geq 1.}$

18. D'après 16. le rayon de convergence de $\sum f_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum n x^n$, donc à 1. D'après la question précédente la série $\sum f_n$ est grossièrement divergente et donc le rayon de convergence de $\sum f_n x^n$ est inférieur à 1. Il est donc $\boxed{\text{égal à 1.}}$

19. Soit x dans $[1/2, 1[$. Par positivité de x et des termes de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$, on a, d'après la question 17.,
$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n^2} x^{n^2} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2} \ .$$
Les séries précédentes convergent puisqu'elles sont à termes positifs et sont dominées par la série convergente définissant $f(x)$.

Par continuité et décroissance de l'intégrande, on a, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$ $x^{n^2} \geq \displaystyle\int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$. Pour la même raison que précédemment, on en déduit par sommation
$$f(x) \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} x^{t^2}\,\mathrm{d}t$$
et donc, par changement de variable affine bijectif,
$$f(x) \geq \frac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\sqrt{-\ln(x)}}^{(n+1)\sqrt{-\ln(x)}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \ .$$
Comme x est supérieur à $1/2$, on a $-\ln(x) \leq \ln(2)$ et donc, pour m dans $\mathbf{N}^*$, il vient, par la relation de Chasles et positivité de l'intégrande,
$$\sum_{n=1}^{m} \int_{n\sqrt{-\ln(x)}}^{(n+1)\sqrt{-\ln(x)}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{-\ln(x)}}^{(m+1)\sqrt{-\ln(x)}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \geq \int_{\sqrt{\ln(2)}}^{(m+1)\sqrt{-\ln(x)}} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u \ .$$
La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \displaystyle\int_{\sqrt{\ln(2)}}^{t} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$ est croissante, par positivité de l'intégrande. Elle admet donc une limite en l'infini, éventuellement infinie. L'inégalité précédente montre que cette fonction est majorée par $f(x)$ pour une suite de points tendant vers l'infini, c'est donc que la limite est finie et majorée par $f(x)$, i.e. $\boxed{f(x) \geq \dfrac{1}{\sqrt{-\ln(x)}} \displaystyle\int_{\sqrt{\ln(2)}}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.}$