Deuxième composition de mathématiques
Mines-Ponts 2006 – MP

Le but de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique fin des racines de la dérivée du polynôme de degré $n+1$,

$$P_n = X(X-1)\cdots(X-n)\,,$$

lorsque n tend vers l'infini.
Pour tout réel x, $[x]$ désignera la partie entière de x. On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ quand } n \longrightarrow +\infty\ .$$

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I - Quelques propriétés des racines de P_n

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, P'_n admet exactement une racine $x_{n,k}$ dans chacun des intervalles $]k; k+1[$, pour $k = 0, \ldots, n-1$.
   Notons $\alpha_{n,k} = x_{n,k} - k \in\ ]0; 1[$, la partie fractionnaire de $x_{n,k}$.
2. Pour $n \geq 1$, en calculant les coefficients de degré $n-1$ et n de P'_n, exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k}$, puis $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}$ en fonction de n.
3. En comparant P_n et $P_n(n-X)$, exprimer $x_{n,n-1-k}$ en fonction de $x_{n,k}$, pour tout $n \geq 1$, et pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.
4. Déterminer la valeur de $\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-1-k}$.
   Le but des questions suivantes est de montrer que, n étant fixé, la suite des $\alpha_{n,k}$ croît lorsque k croît de 0 à $n-1$.
5. Pour tout $n \geq 1$, dresser, en fonction de la parité de n, le tableau de variation de P_n.
   On y fera apparaître les réels $x_{n,k}$ *pour* $k = 0, 1, \ldots, n-1$ *ainsi que les entiers* $0, 1, \ldots, n$. *On pourra s'inspirer du modèle de la figure* 1.
6. En déduire le signe de $(-1)^{n-k} P_n(x_{n,k})$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$.
7. En utilisant la relation $P_n = (X-n)P_{n-1}$, déterminer le signe de $(-1)^{n-k} P'_n(x_{n-1,k})$ pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$.
8. En déduire que pour $k = 0, 1, \ldots, n-2$, on a $x_{n-1,k} > x_{n,k}$.
9. En utilisant l'identité $P_n = XP_{n-1}(X-1)$, déterminer, en fonction de k et n, le signe de $(-1)^{n-k} P'_n(1 + x_{n-1,k-1})$ pour $k = 1, \ldots, n-1$.
10. En déduire que pour $k = 1, \ldots, n-1$, on a $x_{n,k} > 1 + x_{n-1,k-1}$.
11. Conclure.

PARTIE II - Un développement asymptotique

Pour $x \in \mathbf{R}$, on considère la fonction h_x définie sur R_+^* par $h_x(t) = t^{x-1}e^{-t}$.

12. Déterminer $\mathcal{E} = \{x \in \mathbf{R} \mid h_x \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}_+^*\}$.

Pour $x \in \mathcal{E}$, on pose

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t\ .$$

13. Montrer que Γ est strictement positive sur $\mathcal{E}$.
14. Montrer que Γ est deux fois dérivable sur $\mathcal{E}$.
15. Exprimer pour tout $x \in \mathcal{E}$, $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et $\Gamma(x)$.

On admet que la fonction Γ satisfait, pour tout $x \in]0;1[$, la formule :

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \tag{A}$$

Désormais, on pose, pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\ .$$

16. Montrer que Ψ est strictement croissante.
17. Établir, que pour tout $x \in \mathcal{E}$,

$$\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}\ .$$

Le but des questions suivantes est de montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\lim_{m\to+\infty}\left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j} - \ln(m)\right] = 0\ .$$

On pose pour tout $x > 0$,

$$\varphi(x) = \Psi(x) - \ln(x)\ .$$

18. Montrer que la série de terme général $(\varphi(n+1) - \varphi(n))$ converge.
19. Montrer que la suite $(\varphi(n), n \geq 1)$ converge lorsque l'entier n tend vers l'infini. Soit C sa limite.
20. Établir que l'on a aussi :

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x) = C\ .$$

21. Montrer que si on a $C \neq 0$, alors

$$\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \sim_{+\infty} Cx\ .$$

22. Montrer $C = 0$.
23. Conclure en considérant $\Psi(x+m+1)$.

PARTIE III - Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

On notera cot la fonction définie sur $]0;\pi[$ par $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$. Cette fonction est une bijection de $]0;\pi[$ sur $\mathbf{R}$. On notera Arccot sa fonction réciproque.

24. En considérant la fraction $\dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer

$$\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,k}+j} - \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1-\alpha_{n,k})+j} = 0\ .$$

25. Pour $t \in]0;1[$ fixé, on pose $u_n = \alpha_{n,[nt]}$. Démontrer

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right] = 0\ .$$

26. Démontrer que la suite $(u_n, n \geq 1)$ est convergente et calculer sa limite, que l'on notera $F(t)$.

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\cdots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\cdots$
P_n'												
P_n												

Figure 1 – Modèle de tableau de variation

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – MINES-PONTS 2006 – MP

PARTIE I - Quelques propriétés des racines de P_n'.

1) Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et k dans $[\![0; n-1]\!]$. Toute fonction polynomiale étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, P_n' est continue sur $[k; k+1]$ et dérivable sur $]k; k+1[$. Comme $P_n(k) = P_n(k+1) = 0$, d'après le théorème de ROLLE, on dispose de $x_{n,k}$ dans $]k; k+1[$ tel que $P_n'(x_{n,k}) = 0$.
On obtient de la sorte n racines, à savoir $(x_{n,k})_{0\leq k\leq n-1}$. Comme P_n' est un polynôme de degré n, ces racines sont simples et forment exactement l'ensemble de ses racines, i.e. pour $0 \leq k \leq n-1$, $\boxed{P_n' \text{ admet exactement une racine dans chacun des intervalles }]k; k+1[.}$

2) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Comme P_n est unitaire et comme son coefficient de degré n est $-n(n+1)/2$, P_n' admet $n+1$ et $-n^2(n+1)/2$ comme coefficients de degrés n et $n-1$ respectifs. Il résulte des relations de VIÈTE (relations coefficients-racines) qu'on a $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} = \frac{n^2}{2}.}$ et il vient directement $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} x_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{n^2}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$, i.e. $\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \frac{n}{2}.}$

3) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a $P_n(n-X) = (-1)^{n+1}P_n$ et donc $P_n'(n-X) = (-1)^n P_n'$. En particulier les racines de P_n' sont symétriques par rapport à $n/2$ et donc, pour $0 \leq k \leq n-1$, $\boxed{x_{n,n-k-1} = n - x_{n,k}.}$

4) Il résulte directement de ce qui précède qu'on a $\boxed{\alpha_{n,k} + \alpha_{n,n-k-1} = 1.}$

5) Comme P_n et P_n' sont simplement scindés, leurs signes sont alternés dans les intervalles entre deux racines consécutives. Comme leurs coefficients dominants sont positifs, il en résulte que P_n' est strictement positif sur les intervalles $]x_{n-1}; +\infty[$, $]x_{n-3}; x_{n-2}[$ etc. et strictement négatif sur les intervalles $]x_{n-2}; x_{n-1}[$, $]x_{n-4}; x_{n-3}[$ etc. Comme par ailleurs P_n s'annule en les entiers compris entre 0 et n, il vient : si n est pair, le tableau est le suivant

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\cdots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\cdots$
P_n'		$+$	0	$-$	0	$\cdots$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\cdots$
P_n	$-\infty$ ↗	0 ↗	•	↘ 0 ↘	•	$\cdots$	↗ 0 ↗	•	↘ 0 ↘	•	↗ 0 ↗	$\cdots$

et si n est impair, le tableau est alors le suivant

x	$-\infty$	0	$x_{n,0}$	1	$x_{n,1}$	$\cdots$	$2k$	$x_{n,2k}$	$2k+1$	$x_{n,2k+1}$	$2k+2$	$\cdots$
P_n'		$-$	0	$+$	0	$\cdots$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\cdots$
P_n	$+\infty$ ↘	0 ↘	•	↗ 0 ↗	•	$\cdots$	↘ 0 ↘	•	↗ 0 ↗	•	↘ 0 ↘	$\cdots$

6) Puisque P_n est du signe de $(-1)^{n-k}$ sur $]k; k+1[$, pour $0 \leq k \leq n-1$,
$\boxed{\text{le signe de } (-1)^{n-k}P_n(x_{n,k}) \text{ est strictement positif.}}$

7) Soit k entier compris entre 0 et $n-2$. En dérivant la relation $P_n = (X-n)P_{n-1}$, il vient $P'_n = P_{n-1} + (X-n)P'_{n-1}$ et, en spécialisant cette relation en $x_{n-1,k}$, il s'ensuit $P'_n(x_{n-1,k}) = P_{n-1}(x_{n-1,k})$. Donc les signes de $(-1)^{n-k}P'_n(x_{n,k})$ et de $(-1)^{n-1-k}P_{n-1}(x_{n-1,k})$ sont opposés, et par conséquent, d'après ce qui précède, $\boxed{(-1)^{n-k}P'_n(x_{n-1,k}) < 0.}$

8) Soit k entier compris entre 0 et $n-2$. Comme $x_{n-1,k}$ est dans l'intervalle $]k;k+1[$ et comme P_n est de signe constant sur cet intervalle, $P_n(x_{n-1,k})$ est du signe de $P_n(x_{n,k})$, i.e. de celui de $(-1)^{n-k}$ et donc P_n et P'_n sont de signes opposés en $x_{n-1,k}$ (sans être nuls). Il résulte du tableau de variation qu'on a $\boxed{x_{n-1,k} > x_{n,k}.}$

9) Soit k entier compris entre 1 et $n-1$. En dérivant la relation $P_n = XP_{n-1}(X-1)$, il vient $P'_n = P_{n-1}(X-1) + XP'_{n-1}(X-1)$ et, en spécialisant cette relation en $1+x_{n-1,k-1}$, il s'ensuit $P'_n(1+x_{n-1,k-1}) = P_{n-1}(1+x_{n-1,k-1})$. D'après la question 6), il en résulte $\boxed{(-1)^{n-k}P'_n(1+x_{n-1,k-1}) > 0.}$

10) Soit k entier compris entre 1 et $n-1$. Comme $x_{n-1,k-1}$ est dans l'intervalle $]k-1;k[$, $1+x_{n-1,k-1} \in\ ]k;k+1[$. D'après ce qui précède P_n et P'_n sont de même signe en $1+x_{n-1,k-1}$ (sans être nuls) et donc $\boxed{1+x_{n-1,k-1} < x_{n,k}.}$

11) D'après les questions 8) et 10), on a $\alpha_{n-1,k-1} < \alpha_{n,k}$ si $1 \le k \le n-1$ et $\alpha_{n,k} < \alpha_{n-1,k}$ si $0 \le k \le n-2$. Il vient donc

$$\alpha_{n,0} < \alpha_{n-1,0} < \alpha_{n,1} < \cdots < \alpha_{n,n-2} < \alpha_{n-1,n-2} < \alpha_{n-1,n-1}$$

et donc $\boxed{(\alpha_{n,k})_{0\le k\le n-1} \text{ est strictement croissante.}}$

PARTIE II - Un développement asymptotique

12) Soit x dans $\mathbf{R}$. La fonction h_x est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est donc localement intégrable. Au voisinage de l'infini, on a $h_x(t) = o(t^{-2})$ et au voisinage de 0 à droite, on a $h_x(t) \sim t^{x-1}$ et donc, d'après le critère de RIEMANN, h_x est intégrable au voisinage de l'infini et de 0 à droite si et seulement si $x > 0$, i.e. $\boxed{\mathcal{E} = \mathbf{R}_+^*.}$

13) Pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, h_x est une fonction continue strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc son intégrale est strictement positive, i.e. $\boxed{\Gamma \text{ est strictement positive sur } \mathcal{E}.}$

14) Soit t dans $\mathbf{R}_+^*$. Alors $x \mapsto h_x(t)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée d'ordre k est donnée par $x \mapsto (\ln(t))^k h_x(t)$. Toutes ces fonctions sont donc continues en t. Soit maintenant $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbf{R}_+^*$. Par monotonie des fonctions puissances, on a, pour k dans $\mathbf{N}$ et t dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$\left|(\ln(t))^k h_x(t)\right| \le |\ln(t)|^k e^{-t}\max(t^{a-1}, t^{b-1}) \le |\ln(t)|^k e^{-t}(t^{a-1} + t^{b-1}) \,.$$

Or, pour c dans $\mathbf{R}_+^*$, $|\ln|^k h_c$ est continue sur $\mathbf{R}_+^*$, est dans $o(t^{-2})$ au voisinage de l'infini et est équivalente à $|\ln(t)|^k t^{c-1}$ au voisinage de 0 à droite et y est donc dans $o(t^{-1+c/2})$. D'après le critère de RIEMMANN $|\ln|^k h_c$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc $|\ln|^k (h_a + h_b)$ aussi.
Le théorème de LEIBNIZ permet donc de conclure que Γ est de classe C^∞ sur $[a;b]$. C'est donc vrai sur $\mathbf{R}_+^*$ et en particulier $\boxed{\Gamma \text{ est deux fois dérivable sur } \mathcal{E}.}$

15) Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. On a $h'_{x+1} = xh_x - h_{x+1}$. Comme $x+1-1>0$, on a $\lim_{0^+} h_{x+1} = \lim_{+\infty} h_{x+1} = 0$ et le théorème de LEIBNIZ-NEWTON (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral) donne par intégration sur $[a;b]$, avec $[a;b]$ un segment inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, puis par passage à la limite pour a tendant vers 0 à droite et b tendant vers $+\infty$, $0 = \Gamma(x+1) - x\Gamma(x)$, i.e. $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$

16) Puisque Γ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et ne s'y annule pas, Ψ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée est $(\Gamma\Gamma'' - (\Gamma')^2)/\Gamma^2$. De plus, d'après le théorème de LEIBNIZ, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} h_x(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)h_x(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} \ln(t)^2 h_x(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Or h_x est positive, donc on peut écrire $\ln .h_x = (\ln .h_x^{1/2})h_x^{1/2}$. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ donne, par intégration

$$\Gamma'(x)^2 \leq \Gamma(x)\Gamma''(x)\,.$$

De plus les intégrandes étant continus et les fonctions $\ln .h_x^{1/2}$ et $h_x^{1/2}$ n'étant pas proportionnelles, l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ est en fait stricte. Il en résulte que Ψ' est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et donc $\boxed{\Psi \text{ est strictement croissante.}}$

17) D'après 15), on a, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\ln(\Gamma(x+1)) = \ln(x) + \ln(\Gamma(x))$, puisque Γ est strictement positive. Il en résulte par dérivation (les fonctions considérées étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$) $\boxed{\Psi(x+1) = \Psi(x) + \frac{1}{x}.}$

18) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a, d'après 17),

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \Psi(n+1) - \Psi(n) - \ln(n+1) + \ln(n) = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc, par comparaison à une série de RIEMANN convergente, la série $\sum_{n\geq 1}(\varphi(n+1) - \varphi(n))$ est absolument convergente. En particulier $\boxed{\sum_{n\geq 1}(\varphi(n+1) - \varphi(n)) \text{ converge.}}$

19) La suite des sommes partielles de $\sum_{n\geq 1}(\varphi(n+1) - \varphi(n))$ est la suite $(\varphi(n+1) - \varphi(1))_{n\in\mathbf{N}}$. Par linéarité de la limite, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (\varphi(n))_{n\geq 1} \text{ converge.}}$

20) Soit x un réel et $n = [x]$. Par croissance de Ψ, on a $\Psi(n) - \ln(x) \leq \varphi(x) \leq \Psi(n+1) - \ln(x)$ et donc $\varphi(n) + \ln(n/x) \leq \varphi(x) \leq \varphi(n+1) + \ln((n+1)/x)$. Soit $C = \lim_n \varphi(n)$. Les deux termes encadrant $\varphi(x)$ sont de la forme $C + o(1)$ puisque n tend vers l'infini avec x et n/x tout comme $(n+1)/x$ tendent vers 1 quand x tend vers l'infini. D'après le théorème d'encadrement des limites $\boxed{\lim_{+\infty} \varphi = C.}$

21) Si on a $C \neq 0$, comme la fonction constante égale à C est de signe constant, est localement intégrable sur $[1;+\infty[$ mais n'y est pas intégrable, et comme $\varphi \sim C$ au voisinage de $+\infty$, par sommation des relations d'équivalence dans le cas divergent, il vient $\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \sim \int_1^x C\,\mathrm{d}t = C(x-1) \sim Cx$ et donc, au voisinage de l'infini, $\boxed{\int_1^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \sim Cx.}$

22) Soit n dans $\mathbf{N}^*$. On a, puisque $\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$,

$$\int_1^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t = [\ln(\Gamma(t)) - t(\ln(t)-1)]_1^n = \ln(\Gamma(n)) - n\ln(n) + n - 1\ .$$

De 15), on déduit par une récurrence immédiate, $\Gamma(n) = (n-1)!$ et donc $\ln(\Gamma(n)) = \ln(n!\,) - \ln(n)$. Il vient

$$\int_1^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \ln(n!\,) - (n+1)\ln(n) + n - 1 = \ln\left(\frac{n!\,e^n}{n^{n+1}}\right) - 1\ .$$

On fait maintenant varier n. D'après la formule de Stirling, on a

$$\frac{n!e^n}{n^{n+1}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(1 + o\,(1))$$

et donc,
$$\ln\left(\frac{n!e^n}{n^{n+1}}\right) = -\frac{1}{2}\ln(n) + \frac{1}{2}\ln(2\pi) + o\,(1) = -\frac{1}{2}\ln(n) + O\,(1)\ .$$

En particulier $\displaystyle\frac{1}{n}\int_1^n \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ admet 0 comme limite. Il résulte de 21) qu'on ne saurait donc avoir $C \neq 0$ et il vient $\boxed{C = 0.}$

23) Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Une récurrence immédiate sur m dans $\mathbf{N}$ donne, à partir de 17), pour m dans $\mathbf{N}$,

$$\Psi(x+m+1) = \Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j}$$

et donc

$$\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln(m) = \Psi(x+m+1) - \ln(m) = \varphi(x+m+1) + \ln\left(\frac{x+m+1}{m}\right)$$

et donc, puisque d'après 22) le membre de droite a une limite quand m vers l'infini, à savoir 0, il en va de même pour le membre de gauche, i.e. $\boxed{\displaystyle\lim_{m\to+\infty}\left[\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m}\frac{1}{x+j} - \ln(m)\right] = 0.}$

PARTIE III - Comportement asymptotique des $\alpha_{n,k}$

24) D'après la formule de dérivation d'un produit, on a

$$P_n' = \sum_{k=0}^{n} X(X-1)\cdots(X-k+1)(X-k-1)\cdots(X-n)$$

et donc, en tant que fraction rationnelle, $\displaystyle\frac{P_n'}{P_n} = \sum_{j=0}^{n}\frac{1}{X-j}$. Soit k dans $[\![0; n-1]\!]$. Alors $x_{n,k}$ est racine de P_n' mais pas de P_n et on peut donc spécialiser l'identité précédente en $x_{n,k}$. Il vient $0 = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{\alpha_{n,k} + k - j}$ et donc, par réindexation, $0 = \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,k} + j} + \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{\alpha_{n,k} - j - 1}$ ou encore $\boxed{\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\alpha_{n,k} + j} - \sum_{j=0}^{n-k-1} \frac{1}{(1 - \alpha_{n,k}) + j} = 0.}$

25) D'après 23), pour x dans $]0;1[$ et m dans $\mathbf{N}$, on a

$$\Psi(x) + \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{x+j} - \ln(m) = \varphi(x+m+1) + \ln\left(\frac{x+m+1}{m}\right)$$

et donc le membre de gauche est somme d'un élément de $\varphi([m;+\infty[)$ et d'un élément de $[0;\ln(1+2/m)]$ et il en résulte que la limite obtenue en 23) est uniforme sur $]0;1[$.
Puisque u_n et $1-u_n$ sont à valeurs dans $]0;1[$, par convergence uniforme

$$\Psi(u_n) + \sum_{j=0}^{[nt]} \frac{1}{u_n + j} - \ln([nt]) - \left(\Psi(1-u_n) + \sum_{j=0}^{n-[nt]-1} \frac{1}{1-u_n+j} - \ln(n-[nt]-1)\right)$$

tend vers 0 puisque $[nt]$ tend vers l'infini. Or, d'après la question précédente, cette expression est en fait égale à $\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln\left(\frac{1 + [nt]/n - 1/n}{[nt]/n}\right)$. De plus $[nt]/n$ tend alors vers t et donc, par continuité du logarithme, $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\Psi(u_n) - \Psi(1-u_n) + \ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right] = 0.}$

26) D'après la formule (A), faisant apparaître des fonctions de classe C^∞ sur $]0;1[$ et à valeurs positives, on a, par dérivation logarithmique, pour tout x dans $]0;1[$, $\Psi(x) - \Psi(1-x) = -\pi\cot(\pi x)$. On déduit de la question précédente que $\pi\cot(\pi u_n)$ admet $\ln((1-t)/t)$ comme limite. Par continuité de la fonction Arccotangente,

$$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*} \text{ converge et sa limite } F(t) \text{ est donnée par } F(t) = \frac{1}{\pi}\operatorname{Arccot}\left(\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1-t}{t}\right)\right).}$$