Première composition
ENSAE 1997 – MP

Dans ce problème on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$ (d entier naturel non nul) et $B(x,r)$ la boule euclidienne ouverte dans $\mathbf{R}^d$ de centre x dans $\mathbf{R}^d$ et de rayon r strictement positif.

PARTIE I

I.1) Soit F une partie bornée de $\mathbf{R}^d$, non vide. Démontrer que, pour tout δ dans $\mathbf{R}_+^*$, l'ensemble d'entiers $\mathcal{M}(\delta,F)$ donné par

$$\mathcal{M}(\delta,F)=\left\{N\in\mathbf{N}^*\ \middle|\ \exists(x_1,\dots,x_N)\in(\mathbf{R}^d)^N, F\subset\bigcup_{i=1}^N B(x_i,\delta)\right\}$$

est non vide.

On désigne par $N(\delta,F)$ le plus petit entier N appartenant à $\mathcal{M}(\delta,F)$. On note

$$\mathrm{B}-\dim(F)=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}}\frac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)}$$

quand la limite écrite existe.

I.2) Soit F, F' et F'' trois parties bornées de $\mathbf{R}^d$ non vides telles que $\mathrm{B}-\dim(F)$ et $\mathrm{B}-\dim(F')$ existent et soit λ un réel non nul. On pose $\lambda F=\{\lambda x\,|\,x\in F\}$. Montrer

I.2.a) si $F\subset F'$ alors $\mathrm{B}-\dim(F)\le \mathrm{B}-\dim(F')$;

I.2.b) $\mathrm{B}-\dim(\lambda F)$ existe et $\mathrm{B}-\dim(\lambda F)=\mathrm{B}-\dim(F)$;

I.2.c) $\mathrm{B}-\dim(F\cup F')$ existe et $\mathrm{B}-\dim(F\cup F')=\max\{\mathrm{B}-\dim(F),\mathrm{B}-\dim(F')\}$;

I.2.d) si $F\subset F''\subset F'$ et $\mathrm{B}-\dim(F)=\mathrm{B}-\dim(F')$ alors $\mathrm{B}-\dim(F'')$ existe et $\mathrm{B}-\dim(F'')=\mathrm{B}-\dim(F)$.

I.3) Calculer $\mathrm{B}-\dim(F)$ quand F est une partie finie de $\mathbf{R}^d$.

Soit $(v_1,\dots,v_d)$ une base de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^d$. Pour δ réel strictement positif et k_1, …, k_d entiers relatifs on pose

$$C(k_1,\dots,k_d,\delta)=\{\lambda_1 v_1+\cdots+\lambda_d v_d\,|\,\forall i\in[\![1;d]\!]\ \lambda_i\in[k_i\delta;k_i\delta+\delta]\}$$

et on appelle δ-cube une telle partie de $\mathbf{R}^d$. On note $C_\delta(v_1,\dots,v_d)$ l'ensemble des δ-cubes. Pour F partie non vide bornée de $\mathbf{R}^d$, on note $A(\delta,F)$ le nombre de δ-cubes dont l'intersection avec F est non vide :

$$\begin{aligned}A(\delta,F)&=\mathrm{Card}\,(\{C\in C_\delta(v_1,\dots,v_d)\,|\,C\cap F\neq\emptyset\})\\&=\mathrm{Card}\left(\left\{(k_1,\dots,k_d)\in\mathbf{Z}^d\ \middle|\ C(k_1,\dots,k_d,\delta)\cap F\neq\emptyset\right\}\right).\end{aligned}$$

I.4.a) Montrer que l'application de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}_+$ qui, à tout élément x de $\mathbf{R}^d$ s'écrivant $x=x_1v_1+\cdots+x_dv_d$ associe le réel positif $\sup_{1\le i\le d}|x_i|$ est une norme sur $\mathbf{R}^d$. On la note $\|\cdot\|_\infty$. Cette norme est-elle équivalente à la norme euclidienne ?

I.4.b) Montrer qu'il existe un réel positif γ ne dépendant que de d et du choix de v_1, …, v_d tel que, pour tout $\delta>0$ et tout x dans $\mathbf{R}^d$, on ait

$$A(\delta,B(x,\delta))\le\gamma\,.$$

I.4.c) Montrer qu'il existe deux constantes γ_1, γ_2 strictement positives ne dépendant que de d et du choix de v_1, …, v_d telles que, pour toute partie bornée F de $\mathbf{R}^d$ et tout δ strictement positif, on ait

$$\gamma_1 A(\delta,F)\le N(\delta,F)\le\gamma_2 A(\delta,F)\,.$$

I.4.d) Soit F une partie bornée de $\mathbf{R}^d$. Montrer que $\mathrm{B}-\dim(F)$ existe si et seulement si $\dfrac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)}$ admet une limite lorsque δ tend vers 0 par valeurs supérieures et que dans ce cas on a

$$\mathrm{B}-\dim(F) = \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \ .$$

I.5) Soit L un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^d$ de dimension p supérieure à 1 et de base $(v_1, \ldots, v_p)$.

I.5.a) Pour $\alpha > 0$ et pour

$$U_\alpha = \{\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p \,|\, \forall i \in [\![1; p]\!] \,, \lambda_i \in [-\alpha; \alpha]\} \ ,$$

estimer $A(\delta, U_\alpha)$ puis $\mathrm{B}-\dim(U_\alpha)$.

I.5.b) Pour tout R strictement positif, montrer qu'il existe α_1 et α_2 strictement positifs tels que

$$U_{\alpha_1} \subset L \cap B(0, R) \subset U_{\alpha_2} \ .$$

I.5.c) En déduire que, pour tout $R > 0$, $\mathrm{B}-\dim(L \cap B(0, R)) = p$.

PARTIE II

Soit E une partie compacte non vide de $\mathbf{R}^d$. On considère des applications S_1, $\ldots$, S_m de E dans E pour lesquelles il existe des constantes c_1, $\ldots$, c_m dans $[0; 1[$ telles que

$$\forall i \in [\![1; m]\!] \, \forall (x, y) \in E^2 \quad \|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i \|x - y\| \ .$$

On note $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts non vides de E. Pour A dans $\mathcal{K}$ on pose

$$\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^{m} S_i(A) \ .$$

II.1) Montrer que φ est une application de $\mathcal{K}$ dans lui-même.

Pour $k \geq 1$, on définit $\varphi^k = \varphi \circ \cdots \circ \varphi$ (k termes) et on pose

$$F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \varphi^k(E) \ .$$

II.2) Montrer que F est un compact non vide et vérifie $\varphi(F) = F$.

Pour A dans $\mathcal{K}$ et $\mu > 0$ on pose

$$A^\mu = \left\{ y \in \mathbf{R}^d \;\middle|\; \exists x \in A, \|x - y\| \leq \mu \right\}$$

et, pour B dans $\mathcal{K}$,

$$d(A, B) = \inf \left\{ \mu \in \mathbf{R}_+^* \;\middle|\; A \subset B^\mu \text{ et } B \subset A^\mu \right\} \ .$$

II.3) Montrer, pour A et B dans $\mathcal{K}$,

$$d(A, B) = 0 \Longleftrightarrow A = B \ .$$

II.4) Pour tous A_1, $\ldots$, A_m, B_1, $\ldots$, B_m dans $\mathcal{K}$, montrer

$$d\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i, \bigcup_{i=1}^{m} B_i \right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(A_i, B_i) \ .$$

II.5) Trouver une constante M dans $[0;1[$ ne dépendant que de $c_1, \ldots, c_m$ telle que pour A et B dans $\mathcal{K}$ on ait

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) \leq M d(A, B) .$$

II.6) Montrer que F est l'unique compact non vide dans E tel que $\varphi(F) = F$.

II.7) Montrer

$$\lim_{k \to +\infty} d(\varphi^k(E), F) = 0 .$$

On suppose désormais qu'en plus des hypothèses précédentes, pour tout i dans $[\![1; m]\!]$, S_i est une bijection de $\mathbf{R}^d$ dans lui-même telle que pour tous x et y dans $\mathbf{R}^d$,

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i \|x - y\| ,$$

avec $c_1, \ldots, c_m$ dans $]0;1[$, et les ensembles $S_1(E), \ldots, S_m(E)$ sont disjoints.

II.8.a) Montrer qu'il existe un unique s_0 dans $\mathbf{R}_+$ tel que

$$\sum_{i=1}^{m} c_i^{s_0} = 1 .$$

II.8.b) On suppose

$$N(\delta, F) \underset{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}}{\sim} C\delta^{-s}$$

avec C et s dans $\mathbf{R}_+$. Montrer

$$s = \mathrm{B} - \dim(F) = s_0 .$$

Première composition – ENSAE 1997 – MP

PARTIE I

I.1) Soit δ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\mathcal{M}(\delta, F)$ soit vide. On construit alors (x_n) à valeurs dans F par récurrence en choisissant x_N arbitraire dans $F \setminus \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \delta)$, la réunion étant vide par convention si $N = 0$. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose d'une valeur d'adhérence de (x_n), disons ℓ, et alors la boule $B(\ell, \frac{\delta}{2})$ contient alors une infinité de termes de (x_n) et donc d'au moins deux. Leur distance mutuelle est alors strictement inférieure à δ, par inégalité triangulaire, et cette contradiction montre que $\boxed{\mathcal{M}(\delta, F) \text{ est non vide.}}$

I.2.a) Si $F \subset F'$ alors pour tout δ dans $\mathbf{R}_+^*$ on a $\mathcal{M}(\delta, F') \subset \mathcal{M}(\delta, F)$ car un recouvrement de F' est aussi un recouvrement de F, et donc $N(\delta, F) \leq N(\delta, F')$ par décroissance de l'infimum. Par croissance et négativité stricte du logarithme sur $]0;1[$, on en déduit que, pour δ dans cet intervalle, on a $\dfrac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \leq \dfrac{\ln(N(\delta, F'))}{-\ln(\delta)}$. Par passage à la limite, supposées exister, il vient $\boxed{\mathrm{B}-\dim(F) \leq \mathrm{B}-\dim(F').}$

I.2.b) Par bijectivité des homothéties de rapport non nul et homogénéité de la norme, on a pour tous x dans E et δ dans $\mathbf{R}_+^*$, $\lambda B(x, \delta) = B(\lambda x, |\lambda|\,\delta)$ et on en déduit $\mathcal{M}(|\lambda|\,\delta, \lambda F) = \mathcal{M}(\delta, F)$, puis $N(|\lambda|\,\delta, \lambda F) = N(\delta, F)$ et donc

$$\frac{\ln(N(\delta, \lambda F))}{-\ln(\delta)} = \frac{\ln(N(\delta\,|\lambda|^{-1}, F))}{-\ln(\delta) + \ln(|\lambda|)}$$

et comme $-\ln(\delta) + \ln(|\lambda|) = -\ln(\delta) + \mathrm{O}(1) \sim -\ln(\delta)$ au voisinage de 0 à droite, le membre de droite admet $\mathrm{B}-\dim(F)$ comme limite, i.e. $\boxed{\mathrm{B}-\dim(\lambda F) \text{ existe et vaut } \mathrm{B}-\dim(F).}$

I.2.c) Soit δ dans $\mathbf{R}_+^*$. On a $\mathcal{M}(\delta, F \cup F') \subset \mathcal{M}(\delta, F) + \mathcal{M}(\delta, F)$, où la somme des deux ensembles est l'ensemble des sommes d'éléments de chaque ensemble, puisque pour $(x_1, \ldots, x_{N+N'})$ dans $\mathbf{R}^d$, on a

$$\left(F \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \delta) \text{ et } F' \subset \bigcup_{i=N+1}^{N+N'} B(x_i, \delta)\right) \Longrightarrow F \cup F' \subset \bigcup_{i=1}^{N+N'} B(x_i, \delta)$$

et on en déduit $N(\delta, F \cup F') \leq N(\delta, F) + N(\delta, F')$. Comme en question 2a, N est une fonction croissante de sa deuxième variable et ainsi

$$\begin{aligned} \max(N(\delta, F), N(\delta, F')) \leq N(\delta, F \cup F') &\leq N(\delta, F) + N(\delta, F') \\ &\leq \max(N(\delta, F), N(\delta, F')) + \min(N(\delta, F), N(\delta, F')) \end{aligned}$$

Par croissance et négativité stricte du logarithme sur $]0;1[$, il vient

$$\max\left(\frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)}, \frac{\ln(N(\delta, F'))}{-\ln(\delta)}\right) \leq \frac{\ln(N(\delta, F \cup F''))}{-\ln(\delta)} \leq$$
$$\frac{\ln(\max(N(\delta, F), N(\delta, F')))}{-\ln(\delta)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{\min(N(\delta,F),N(\delta,F'))}{\max(N(\delta,F),N(\delta,F'))}\right)}{-\ln(\delta)}.$$

Le deuxième terme du membre de droite est alors dans $\frac{\mathrm{O}(1)}{-\ln(\delta)}$, donc dans $\mathrm{o}(1)$. Par théorème d'encadrement des limites, on en déduit que

$\boxed{\mathrm{B}-\dim(F \cup F') \text{ existe et vaut } \max(\mathrm{B}-\dim(F), \mathrm{B}-\dim(F')).}$

I.2.d) La démonstration donnée en question 2a montre que pour δ dans $]0;1[$, on a

$$\frac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta,F''))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta,F'))}{-\ln(\delta)}$$

et donc par théorème d'encadrement des limites, $\boxed{\mathrm{B}-\dim(F'') \text{ existe et vaut } \mathrm{B}-\dim(F).}$

I.3) En prenant des boules centrées en les points de F, on obtient un recouvrement de F et donc pour tout δ dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $N(\delta,F) \leq \mathrm{Card}(F)$ et donc $\dfrac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)} = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{-\ln(\delta)}\right) = \mathrm{o}(1)$. Il en résulte $\boxed{\mathrm{B}-\dim(F) = 0.}$

I.4.a) L'application est bien définie car d est fini, et positive par positivité de la valeur absolue. Pour x et y dans $\mathbf{R}^d$ et λ dans $\mathbf{R}$, on dispose de (x_i) et (y_i) tels que $x = x_1v_1+\cdots+x_dv_d$ et $y = y_1v_1+\cdots+y_dv_d$. On a alors $x+y = (x_1+y_1)v_1+\cdots+(x_d+y_d)v_d$ et $\lambda x = \lambda x_1v_1+\cdots+\lambda x_dv_d$ et donc : par positivité de $|\lambda|$, $\sup|\lambda x_i| = |\lambda|\sum|x_i|$ et, par inégalité triangulaire,

$$\forall i \in [\![1;d]\!]\ |x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i| \leq \sup|x_j| + \sup|y_j| \ ,$$

d'où par passage au supremum $\sup|x_i+y_i| \leq \sup|x_j|+\sup|y_j|$. On en conclut que $\boxed{\|\cdot\|_\infty \text{ est une norme sur } \mathbf{R}^d.}$ Comme $\mathbf{R}^d$ est de dimension finie, toutes les normes sur $\mathbf{R}^d$ sont équivalentes, et ainsi $\boxed{\|\cdot\|_\infty \text{ est équivalente à } \|\cdot\|.}$

I.4.b) Puisqu'on a affaire à des normes équivalentes, on dispose de M dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que la boule $B(0,1)$ est incluse dans la boule de centre 0 et de rayon M pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par homogénéité des normes, on en déduit que pour x dans $\mathbf{R}^d$ et δ dans $\mathbf{R}_+^*$, $B(x,\delta)$ est inclus dans le cube de centre x et de rayon $M\delta$, i.e. les vecteurs $(y_1,\ldots,y_d)$ de $\mathbf{R}^d$ tels que, pour tout i dans $[\![1;d]\!]$, $|y_i - x_i| \leq M\delta$ et donc $\left[\frac{x_i}{\delta}-M\right]\delta \leq y_i \leq \left[\frac{x_i}{\delta}+M\right]\delta+\delta$. Par conséquent, pour $k_1,\ldots,k_d$ entiers, $C(k_1,\ldots,k_d,\delta)\cap B(x,\delta)$ est vide si pour un indice i on a $k_i > \left[\frac{x_i}{\delta}+M\right]$ ou $k_i < \left[\frac{x_i}{\delta}-M\right]$. Comme $\left[\frac{x_i}{\delta}+M\right]-\left[\frac{x_i}{\delta}-M\right] \leq \frac{x_i}{\delta}+M-(\frac{x_i}{\delta}-M-1)$, il y a donc au plus $(2M+1)^d$ δ-cubes qui rencontrent $B(x,\delta)$. Ainsi en posant $\gamma = (2M+1)^d$, on a $\boxed{A(\delta,B(x,\delta)) \leq \gamma.}$

I.4.c) Soit F une partie bornée de $\mathbf{R}^d$ et δ dans $\mathbf{R}_+^*$. Alors F est inclus dans la réunion de $N(\delta,F)$ boules euclidiennes de rayon δ, chacune d'elles rencontrant au plus γ δ-cubes et donc F rencontre au plus $(1+\gamma)N(\delta,F)$ δ-cubes. On peut ainsi poser, par positivité stricte de $1+\gamma$, $\gamma_1 = \frac{1}{1+\gamma}$ et γ_1 ne dépend que de d et $v_1,\ldots,v_d$.

Remarquons que si C et C' sont deux δ-cubes, C' est l'image de C par une translation, disons de vecteur a, alors si C est recouvert par des boules, C' l'est par les boules images par la translation de vecteur a et réciproquement, de sorte qu'on a $N(\delta,C) = N(\delta,C')$. De plus, par définition de $A(\delta,F)$, F est inclus dans la réunion des $A(\delta,F)$ δ-cubes qui le rencontrent et donc, dans la réunion des $A(\delta,F)N(\delta,C)$ boules euclidiennes qui recouvrent ces δ-cubes, i.e. en posant $\gamma_2 = N(\delta,C)$ pour un C quelconque dans $C_\delta(v_1,\ldots,v_d)$, on a $N(\delta,F) \leq \gamma_2 A(\delta,F)$. On a en particulier $\gamma_2 = N(\delta,C(0,\ldots,0,\delta))$ et donc, d'après les éléments donnés en question 2b, $\gamma_2 = N(1,\delta^{-1}C(0,\ldots,0,\delta))$. Comme on a $\delta^{-1}C(0,\ldots,0,\delta) = C(0,\ldots,0,1)$, γ_2 ne dépend que de d et $v_1,\ldots,v_d$ et $\boxed{\gamma_1 A(\delta,F) \leq N(\delta,F) \leq \gamma_2 A(\delta,F).}$

I.4.d) D'après ce qui précède et par croissance et négativité stricte du logarithme sur $]0;1[$, on a

$$\frac{\ln(A(\delta,F))}{-\ln(\delta)} - \frac{\ln(\gamma_1)}{\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(A(\delta,F))}{-\ln(\delta)} - \frac{\ln(\gamma_2)}{\ln(\delta)}$$

et donc $\dfrac{\ln(A(\delta,F))}{-\ln(\delta)} - \dfrac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)} = \mathrm{o}\,(1)$, de sorte que les deux termes de la différence ont une limite simultanément et qu'elle est alors identique, i.e.

$$\boxed{\mathrm{B}-\dim(F) \text{ et } \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \frac{\ln(A(\delta,F))}{-\ln(\delta)} \text{ existent simultanément et sont alors égaux.}}$$

I.5.a) Soit $k_1, \ldots, k_d$ des entiers. Alors $C(k_1,\ldots,k_d,\delta)$ rencontre U_α si et seulement si pour tout entier i dans $[\![1;p]\!]$ on a $k_i\delta \leq \alpha$ et $(k_i+1)\delta \geq -\alpha$, i.e. $-\left[\frac{\alpha}{\delta}\right] - 1 \leq k_i \leq \left[\frac{\alpha}{\delta}\right]$, et donc

$$\boxed{A(\delta,U_\alpha) = 2^p\left(1+\left[\tfrac{\alpha}{\delta}\right]\right)^p.}$$

On a $1+\left[\frac{\alpha}{\delta}\right] = \delta^{-1}\left(\delta+\delta\left[\frac{\alpha}{\delta}\right]\right)$ et le terme entre parenthèses est compris entre $\alpha+\delta$ et $\alpha+2\delta$ et est donc équivalent à α. Il en résulte $A(\delta,U_\alpha) = (2\alpha)^p\delta^{-p}(1+\mathrm{o}\,(1))$, puis $\ln(A(\delta,U_\alpha)) = -p\ln(\delta)+\mathrm{O}\,(1)$ et donc, d'après la question précédente $\boxed{\mathrm{B}-\dim(U_\alpha) \text{ existe et vaut } p.}$

I.5.b) Soit R strictement positif. D'après l'équivalence des normes vue en question 4a, la boule $B(0,R)$ contient une boule de centre 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et est contenue dans une autre telle boule. On note α_1 et α_2 leurs rayons et on a alors directement $\boxed{U_{\alpha_1} \subset L\cap B(0,R) \subset U_{\alpha_2}.}$

I.5.c) D'après la question 5a, on a $\mathrm{B}-\dim(U_{\alpha_1}) = \mathrm{B}-\dim(U_{\alpha_2}) = p$, et il résulte de la question précédente et de la question 2d qu'on a $\boxed{\mathrm{B}-\dim(L\cap B(0,R)) = p.}$

PARTIE II

II.1) Soit A dans $\mathcal{K}$ et (x_n) une suite à valeurs dans $\varphi(A)$. On dispose de i dans $[\![1;m]\!]$ et d'une suite extraite de (x_n) à valeurs dans $S_i(A)$. On note (y_n) cette suite extraite et on dispose de (a_n) à valeurs dans A telle que $(y_n) = (S_i(a_n))$. Comme A est compact, on dispose d'une sous-suite de (a_n) convergeant dans A. On note (b_n) cette sous-suite et a sa limite, de sorte qu'on a $b_n - a = \mathrm{o}\,(1)$. Comme $\|S_i(b_n) - S_i(a)\| = \mathrm{O}\,(\|b_n - a\|)$, on en déduit qu'on dispose d'une sous-suite de (y_n) convergeant vers $S_i(a)$, donc dans $\varphi(A)$, ce qui montre que $\varphi(A)$ est compact. Comme A est non vide, $\varphi(A)$ l'est aussi. Comme S_i est à valeurs dans E, φ aussi et donc $\boxed{\varphi \text{ est une application de } \mathcal{K} \text{ dans lui-même.}}$

Remarque : les fonctions S_i sont lipschitziennes donc continues et il résulte du théorème de Weierstrass que $S_i(A)$ est alors compact non vide et donc $\varphi(A)$ aussi en tant que réunion d'images continues de compacts non vides.

II.2) D'après ce qui précède $\varphi(E)$ est un compact non vide de E et donc, par récurrence immédiate, il en va de même pour $\varphi^k(E)$ pour tout entier k strictement positif. Leur intersection est donc une intersection de fermés, donc fermées, dans le compact $\varphi(E)$ et est donc compacte. Soit (x_k) une suite telle que $x_k \in \varphi^k(E)$ pour tout k dans $\mathbf{N}^*$. En particulier (x_k) est à valeurs dans E. Par compacité on dispose de a valeur d'adhérence de (a_k). Comme $\varphi(E) \subset E$, pour tout entier k, on a $\varphi^{k+1}(E) \subset \varphi^k(E)$ et donc la suite $(\varphi^k(E))$ est une suite décroissante de compacts de E, de sorte que, pour tout k, a est limite d'une suite à valeurs dans $\varphi^k(E)$ à partir du rang k. Comme ce dernier est fermé, on a $a \in \varphi^k(E)$ et donc $a \in F$. Ainsi $\boxed{F \text{ est un compact non vide.}}$ Soit x dans F et k dans $\mathbf{N}^*$. On a donc $x \in \varphi^k(E)$ et donc $\varphi(x) \in \varphi^{k+1}(E) \subset \varphi^k(E)$, puis $\varphi(x) \in F$. Ainsi $\varphi(F) \subset F$. De plus on dispose de y_k dans $\varphi^{k-1}(E)$ et i_k dans $[\![1;m]\!]$ tels que $x = S_{i_k}(y_k)$. Puisque $[\![1;m]\!]$ est fini, il est compact, et donc (i_k, y_k) est une suite à valeurs dans le compact $[\![1;m]\!]\times E$. On dispose d'une sous-suite convergente et donc d'une sous-suite de (j_k, z_k) avec (j_k) stationnaire tendant vers i dans $[\![1;m]\!]$ et (z_k) convergeant vers z dans F, pour les mêmes arguments que ceux invoqués pour a précédemment. On a alors $\|S_i(z_k) - S_i(a)\| = \mathrm{O}\,(\|z_k - a\|) = \mathrm{o}\,(1)$ et comme $S_i(z_k) = x$ par construction, on a $x = S_i(a)$ et donc $x \in \varphi(F)$, puis $F \subset \varphi(F)$. Finalement $\boxed{\varphi(F) = F.}$

II.3) Soit A et B dans $\mathcal{K}$. Par construction A^μ est fonction croissante de μ et donc l'ensemble

$$\left\{\mu \in \mathbf{R}_+^* \;\middle|\; A \subset B^\mu \text{ et } B \subset A^\mu\right\}$$

est un intervalle non majoré de $\mathbf{R}_+^*$. La quantité $d(A,B)$ est donc nulle si et seulement si cet ensemble est $\mathbf{R}_+^*$, i.e. $A \subset \bigcap\limits_{\mu>0} B^\mu$ et $B \subset \bigcap\limits_{\mu>0} A^\mu$. Par définition cela équivaut à $A \subset \overline{B}$ et $B \subset \overline{A}$. Comme un compact est fermé, ceci équivaut à $A \subset B$ et $B \subset A$, i.e. $\boxed{d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B.}$

II.4) Si μ est un réel strictement supérieur à $\max\limits_{1\leq i\leq m}(d(A_i,B_i))$, alors pour tout i dans $[\![1;m]\!]$, $A_i \subset B_i^\mu$ et donc $\bigcup\limits_{i=1}^m A_i \subset \left(\bigcup\limits_{i=1}^m B_i\right)^\mu$, et réciproquement $B_i \subset A_i^\mu$ et $\bigcup\limits_{i=1}^m B_i \subset \left(\bigcup\limits_{i=1}^m A_i\right)^\mu$, de sorte que $d\left(\bigcup\limits_{i=1}^m A_i, \bigcup\limits_{i=1}^m B_i\right)$ est inférieur à μ. Par passage à l'infimum, il vient $\boxed{d\left(\bigcup\limits_{i=1}^m A_i, \bigcup\limits_{i=1}^m B_i\right) \leq \max\limits_{1\leq i\leq m}(d(A_i,B_i)).}$

II.5) Par hypothèse, pour i dans $[\![1;m]\!]$, S_i envoie une boule de rayon μ dans une boule de rayon inférieur à $c_i\mu$ et donc, pour A et B dans $\mathcal{K}$, $A \subset B^\mu \Longleftrightarrow A \subset \bigcup\limits_{b\in B} B(b,\mu) \Longrightarrow S_i(A) \subset \bigcup\limits_{b\in B} B(S_i(b), c_i\mu)$ et il vient $d(S_i(A), S_i(B) \leq c_i d(A,B)$ et donc, grâce à la question précédente, en posant $M = \max(c_1,\ldots,c_m)$, on a $\boxed{0 \leq M < 1 \text{ et } d(\varphi(A),\varphi(B)) \leq M d(A,B).}$

II.6) Soit G dans $\mathcal{K}$ tel que $\varphi(G) = G$. Comme $\varphi(F) = F$, la relation précédente donne $d(F,G) \leq M d(F,G)$ et donc, puisque M appartient à $[0;1[$, $d(F,G) = 0$. Il résulte de la question 3 qu'on a $F = G$. Comme F est point fixe de φ d'après la question 2, $\boxed{F \text{ est l'unique compact non vide de } E \text{ tel que } \varphi(F) = F.}$

II.7) On a par récurrence immédiate, d'après la question 5, pour tout entier k dans $\mathbf{N}^*$, $d(\varphi^k(E), \varphi^k(F)) = M^k d(E,F)$ et donc, puisque $\varphi^k(F) = F$, $d(\varphi^k(E), F) = \mathrm{O}\left(M^k\right) = \mathrm{o}\left(1\right)$, i.e. $\boxed{d(\varphi^k(E), F) \to 0.}$

II.8.a) Par continuité et décroissance stricte des exponentielles de base dans $]0;1[$, la fonction $s \mapsto \sum\limits_{i=1}^m c_i^s$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ et réalise donc une bijection sur son image, d'après le théorème de la bijection. En 0 elle vaut m, donc est supérieure ou égale à 1, et sa limite en l'infini est nulle, donc 1 fait partie de son image et ainsi $\boxed{\text{il existe un unique } s_0 \text{ dans } \mathbf{R}_+ \text{ tel que } \sum\limits_{i=1}^m c_i^{s_0} = 1.}$

II.8.b) On a alors $\delta^s N(\delta,F) = C + \mathrm{o}\left(1\right)$, puis $s\ln(\delta) + \ln(N(\delta,F)) = \mathrm{O}\left(1\right)$ et donc $\dfrac{\ln(N(\delta,F))}{-\ln(\delta)} = s + \mathrm{o}\left(1\right)$, i.e. $\boxed{\mathrm{B}-\dim\left(F\right) \text{ existe et vaut } s.}$ Par hypothèse sur les S_i, F est inclus dans une réunion de boules euclidiennes de rayon δ si et seulement si $S_i(F)$ est inclus dans la réunion des boules images et celles-ci sont de rayon $c_i\delta$ et donc $N(\delta, S_i(F)) = N(\delta/c_i, F)$. Par disjonction des images par S_i, pour δ assez petit, $N(\delta,F)$ est la somme des $N(\delta, S_i(F))$ et il vient

$$\delta^{-s} N(\delta,F) = \sum_{i=1}^m \delta^{-s} N(\delta, S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \delta^{-s} N(\delta,F)$$

i.e. en passant à la limite en δ, $C = C\sum\limits_{i=1}^m c_i^s$. Comme C ne saurait être nul car $N(\delta,F)$ est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$, et par unicité de s_0, il vient $\boxed{\mathrm{B}-\dim\left(F\right) = s = s_0.}$