Deuxième composition de mathématiques
ENS 2007 – MP

Nous notons $\mathcal{C}^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$ l'ensemble des fonction continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, et $\mathcal{C}^k(\mathbf{R},\mathbf{C})$ le sous-espace des fonctions k fois continûment dérivables, pour un entier $k \geq 1$. L'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$ est l'intersection de tous les sous-espaces $\mathcal{C}^k(\mathbf{R},\mathbf{C})$. Nous adoptons la notation $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)|$ pour une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$.

On dira qu'une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ est hölderienne d'exposant $\alpha \in]0;1]$, si la quantité $N_\alpha(f)$ définie par

$$N_\alpha(f) = \sup_{x,y\in\mathbf{R},\ x\neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

est finie. On note $\mathcal{H}^\alpha(\mathbf{R},\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions hölderiennes d'exposant α. Une fonction f hölderienne d'exposant 1 est dite lipschitzienne. Dans tout le problème, on suppose donné une fonction g dans $\mathcal{H}^1(\mathbf{R},\mathbf{C})$, 1-périodique, ainsi que deux nombres réels a, b avec $0 < a \leq 1$ et $b > 1$. On cherche à étudier certaines propriétés de régularité de la fonction « de type Weierstrass » définie, pour x réel, par

$$W(x) = \sum_{n\geq 0} b^{-an} g(b^n x)\ . \tag{1}$$

Dans la partie I, on se concentre sur des propriétés de régularité élémentaires des fonctions W.

Les parties II, III et IV ont pour but de montrer que la fonction W n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$, dans le cas particulier où g est une fonction cosinus.

La partie V montre que dans un cas plus général, l'alternative suivante est vérifiée : ou bien W est lipschitzienne, ou bien elle n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$.

Les différentes parties sont raisonnablement indépendantes entre elles, de sorte que chaque partie peut être abordée directement, en admettant, pour les parties III et IV, les résultats de la partie précédente.

PARTIE I - Généralités

1. Montrer que la série de la formule (1) définit bien une fonction W de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, qui de plus est continue et bornée.
2. Dans cette question seulement, on suppose que b est un entier naturel strictement plus grand que 1. Montrer que W est 1-périodique.
3. Pour une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, on définit la fonction Tf de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ par

$$Tf(x) = b^{-a} f(bx)\ .$$

La fonction g étant fixée par l'énoncé, on considère alors l'équation dont l'inconnue est la fonction f :

$$f = g + Tf\ . \tag{2}$$

3a. Montrer que W satisfait l'équation (2).

3b. Montrer que W est l'unique solution de l'équation (2) qui soit continue et bornée.

4. Dans cette question on suppose $a < 1$.

4a. Montrer, pour tout N dans $\mathbf{N}^*$ et tous x, y réels,

$$|W(x)-W(y)| \leq N_1(g)\frac{b^{(1-a)N}}{b^{1-a}-1}|x-y| + \frac{2\|g\|_\infty}{1-b^{-a}} b^{-aN}\ .$$

4b. En déduire $W \in \mathcal{H}^a(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

5. On suppose à présent $a = 1$ et $g \in \mathcal{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

5a. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous x et h réels :

$$|g(x+h) + g(x-h) - 2g(x)| \leq C\,|h|^2 \ .$$

5b. En s'inspirant de la question 4, montrer qu'il existe une constante $C' > 0$ telle que pour tous x et h réels avec $|h| \leq 1$,

$$|W(x+h) + W(x-h) - 2W(x)| \leq C'\,|h| \ .$$

PARTIE II - Inversion de Fourier

Soit f dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$. On définit une fonction $\mathcal{F}f$ sur $\mathbf{R}$, appelée *transformée de* FOURIER de f, par la formule

$$\mathcal{F}f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-iyx)\,\mathrm{d}x \ .$$

On note également, pour tout $y \in \mathbf{R}$, $\overline{\mathcal{F}}f(y) = \mathcal{F}f(-y)$.
Le but de cette partie est de montrer la formule dite d'inversion de FOURIER (question 6) pour des fonctions assez régulières. Dans toute cette partie, on considère une fonction f dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ vérifiant $\lim_{|x|\to\infty} |x^2 f(x)| = 0$.

1a. Montrer que, pour tout $h > 0$, la série de terme général $f(nh)$, $n \geq 0$ est sommable.

1b. Montrer $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0} \sum_{n\in\mathbf{N}} hf(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

1c. Montrer $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0} \sum_{n\in\mathbf{Z}} hf(nh) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Dans les questions 2 à 4 on fixe T, avec $T > 0$, et on pose $f_T(x) = \displaystyle\sum_{k\in\mathbf{Z}} f(x + kT)$. Montrer que cette formule définit une fonction f_T continue sur $\mathbf{R}$ et T-périodique. (On pourra étudier la sommabilité de façon indépendante de x variant dans un intervalle compact de $\mathbf{R}$.)

3. On note, pour n dans $\mathbf{Z}$, $c_n(f_T) = \displaystyle\frac{1}{T}\int_0^T f_T(x) \exp\left(-\frac{2i\pi n x}{T}\right)\mathrm{d}x$. Montrer soigneusement l'égalité $c_n(f_T) = \displaystyle\frac{\sqrt{2\pi}}{T}\mathcal{F}f\left(\frac{2\pi n}{T}\right)$.

4. On suppose de plus, et jusqu'à la fin de cette partie, que $\mathcal{F}f$ est une fonction continue vérifiant, comme pour f, $\lim_{|y|\to\infty} |y^2 \mathcal{F}f(y)| = 0$.

   On note, pour x réel et N entier, $S_{N,T}(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} c_n(f_T) \exp\left(\frac{2i\pi n x}{T}\right)$.

4a. Montrer que la suite de fonctions $(S_{N,T})_{N\geq 0}$ converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

4b. Montrer $\displaystyle\lim_{N\to\infty} \int_0^T |f_T(x) - S_{N,T}(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$.

4c. En déduire que, pour tout x réel, $f_T(x) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f_T) \exp\left(\frac{2i\pi n x}{T}\right)$.

5. Montrer que pour tout x réel, $f_T(x)$ converge vers $f(x)$ lorsque $T \to \infty$.
6. Déduire des précédentes questions que l'on a la *formule d'inversion* $f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f$.

PARTIE III - Construction d'une ondelette

1. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telles que, pour tous entiers naturels m et n, $\left|x^n f^{(m)}(x)\right|$ tend vers 0 lorsque $|x| \to \infty$.

1a. Montrer que, pour f dans $\mathcal{S}$, on a $\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ et que, pour tout y dans $\mathbf{R}$, on a $(\mathcal{F}f)^{(n)}(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} (-ix)^n f(x) \exp(-iyx)\,\mathrm{d}x$.

1b. Montrer que, pour $f \in \mathcal{S}$, on a $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}$.

2. Soit ψ_0 la fonction définie de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ par $x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$

2a. Montrer que ψ_0 est continue sur $\mathbf{R}$.

2b. Montrer que ψ_0 est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et que sa dérivée d'ordre n s'exprime sous la forme $R_n(x)\exp(-1/x)$, où R_n est une fraction rationnelle.

2c. Montrer que ψ_0 est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$.

2d. Soient $a < b$ deux réels. Construire une fonction de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ prenant des valeurs réelles, strictement positive sur $]a; b[$ et nulle ailleurs.

3. Soit b dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une fonction Ψ_b dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ intégrable sur $\mathbf{R}$ ainsi que $x \mapsto x\Psi_b(x)$, telle que $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \Psi_b(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}} x\Psi_b(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et dont la transformée de FOURIER est strictement positive sur $]1/b; b[$ et nulle ailleurs. On pourra utiliser la formule d'inversion de la question II.6.

PARTIE IV - Non dérivabilité de W dans le cas $g(x) = \cos(2\pi x)$

Dans cette partie, on suppose que la fonction g est donnée par $g(x) = \cos(2\pi x)$. On se propose de montrer que la fonction W associée n'est dérivable en aucun point.

1. Soit f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$ une fonction continue, bornée, dérivable en un point x réel. Montrer que l'on peut écrire pour tout $h \in \mathbf{R}$, $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon_x(h)$, où ε_x est une fonction continue bornée sur $\mathbf{R}$, de limite nulle en 0.

2. Dans cette question, on considère une fonction continue Ψ_b dans $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ telle que construite en III.3. Soit f une fonction continue bornée de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. Pour $\alpha > 0$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose $c(\alpha, x) = \dfrac{1}{\alpha^2} \displaystyle\int_{\mathbf{R}} f(y)\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\mathrm{d}y$.

2a. Montrer que la définition de $c(\alpha, x)$ a bien un sens.

2b. Le réel x étant fixé, montrer que si f est dérivable en x, alors $c(\alpha, x) \to 0$ quand $\alpha \to 0$.

3. On rappelle qu'on a $0 < a \leq 1$, $b > 1$ et $W(x) = \displaystyle\sum_{n \geq 0} b^{-an} \cos(2\pi b^n x)$.

3a. Montrer que W n'est pas dérivable en 0.

3b. Montrer que W n'est dérivable en aucun point de $\mathbf{R}$.

PARTIE V - Une alternative pour W

Dans cette partie, on se place à nouveau dans le cas général d'une fonction g lipschitzienne 1-périodique. On suppose par ailleurs $0 < a < 1$, $b \in \mathbf{N}$ et $b > 1$, de sorte que W est 1-périodique d'après I.2.

1. On suppose qu'il existe trois réels x, h, u avec h et u strictement positifs, tels que

$$\frac{|W(x+h) - W(x)|}{h} \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a} - 1}(1+u) \ .$$

   Montrer $\dfrac{|W(b^{-1}(x+h)) - W(b^{-1}x)|}{b^{-1}h} \geq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1 + b^{1-a}u)$. On pourra utiliser le fait que W vérifie l'équation (2).

2. On suppose que la quantité $N_1(W)$, éventuellement infinie, est strictement plus grande que $N_1(g)/(b^{1-a} - 1)$.

2a. Montrer qu'il existe x_0, u et h vérifiant $x_0 \in \mathbf{R}$, $u > 0$ et $h \in]0; 1[$ tels que

$$\frac{|W(x_0+h) - W(x_0)|}{h} \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a} - 1}(1+u) \ .$$

2b. Les nombres h et u étant fixés par la question précédente, montrer qu'il existe ℓ vérifiant $\ell > 1$ tel que pour tout intervalle I de longueur $\ell(I)$ vérifiant $\ell(I) > \ell$, il existe un réel x_I vérifiant $\{x_I, x_I + h\} \subset I$ et $\dfrac{|W(x_I + h) - W(x_I)|}{h} \geq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+u)$.

2c. Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$ ouvert de longueur $\ell(J)$ vérifiant $\ell(J) < 1$, et N l'unique entier tel que $\ell b^{-N} < \ell(J) \leq \ell b^{-N+1}$, où ℓ est défini dans la question précédente. En considérant l'intervalle défini par $I = b^N J = \left\{ b^N x \;\middle|\; x \in J \right\}$, montrer que l'on peut trouver deux nombres distincts x_J et y_J dans J, tels que $\dfrac{|W(x_J) - W(y_J)|}{|x_J - y_J|} \geq \dfrac{uN_1(g)b^{N(1-a)}}{b^{1-a}-1}$.

2d. En déduire qu'il existe une constante C strictement positive ne dépendant que de g, a et b telle que, pour tout intervalle J de longueur $\ell(J)$ véifiant $\ell(J) < 1$, on a

$$\sup_{x \in J} W(x) - \inf_{x \in J} W(x) \geq C\ell(J)^a \ .$$

3. Déduire des question précédentes que l'on a l'alternative suivante pour W :
   (i) ou bien W est lipschitzienne avec $N_1(W) \leq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}$,
   (ii) ou bien W n'est nulle part dérivable.

4. Donner un exemple de fonction g, non constante, où le premier point de l'alternative précédente est vérifié.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – ENS 2007 – MP

PARTIE I - Généralités

1. On remarque qu'une fonction f continue sur $\mathbf{R}$ et 1-périodique est bornée sur $\mathbf{R}$. En effet, par périodicité, on a $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et donc, d'après le théorème de WEIERSTRASS, la continuité de f et la compacité de $[0;1]$ entrainent que f est bornée sur $\mathbf{R}$.

   Pour n dans $\mathbf{N}$ on note g_n la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g_n(x) = b^{-an}g(b^n x)$. Puisque g est 1-périodique et continue, elle est bornée sur $\mathbf{R}$. Il vient $\|g_n\|_\infty = b^{-an}\|g\|_\infty$ et donc, puisqu'on a $b > 1$ et $a > 0$, on a affaire à une série de fonctions normalement convergente sur $\mathbf{R}$ par comparaison à une série géométrique de raison b^{-a} comprise dans l'intervalle $]0;1[$. Comme il s'agit de fonctions continues, leur somme l'est aussi et, par passage à la limite dans l'inégalité triangulaire $\|W\|_\infty \le \|g\|_\infty \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-an}$ et donc $\boxed{W \text{ est une fonction de } \mathbf{R} \text{ dans } \mathbf{C} \text{ continue et bornée.}}$

2. On reprend les notations précédentes, i.e. $g_n(x) = b^{-an}g(b^n x)$. Pour n entier et x réel on a $b^n \in \mathbf{N}$, puisque b est entier, et donc $g_n(x+1) = g_n(x)$, i.e. g_n est 1-périodique. Par passage à la limite dans les sommes partielles, elles-mêmes 1-périodiques en tant que sommes de telles fonctions, $\boxed{W \text{ est 1-périodique.}}$

3a. On reprend les notations précédentes, i.e. $g_n(x) = b^{-an}g(b^n x)$. Pour n entier on a donc $Tg_n = g_{n+1}$ et donc aussi $g_0 + T\left(\sum_{k=0}^{n} g_k\right) = \sum_{k=0}^{n+1} g_k$. Par passage à la limite en n on en déduit $\boxed{W = g + TW.}$

3b. Soit f une solution continue et bornée de l'équation (2). On a alors $f - W = Tf - TW$. Or la pré-composition et la post-composition par une homothétie étant linéaires et la première préservant la norme tandis que la seconde la multiplie par le module du rapport d'homothétie, T est une application linéaire et multiplie les normes par b^{-1}. Il en résulte $\|f - W\| = \|T(f-W)\| = b^{-1}\|f - W\|$ et donc, puisque $b \neq 1$, $\|f - W\| = 0$, i.e. $\boxed{W \text{ est l'unique solution de l'équation continue et bornée de (2).}}$

4a. Soit N dans $\mathbf{N}^*$ et x et y réels. Par inégalité triangulaire et puisque $0 < b^{-a} < 1$, on a

$$
\begin{aligned}
|W(x) - W(y)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} b^{-an}(g(b^n x) - g(b^n y))\right| \\
&\le \sum_{n=0}^{+\infty} b^{-an}|g(b^n x) - g(b^n y)| \\
&\le \sum_{n=0}^{N-1} b^{-an}|g(b^n x) - g(b^n y)| + \sum_{n=N}^{+\infty} b^{-an}\left(|g(b^n x)| + |g(b^n y)|\right) \\
&\le \sum_{n=0}^{N-1} b^{-an}N_1(g)|b^n x - b^n y| + 2\sum_{n=N}^{+\infty} b^{-an}\|g\|_\infty \\
&\le N_1(g)|x-y|\sum_{n=0}^{N-1} b^{(1-a)n} + 2\|g\|_\infty \sum_{n=N}^{+\infty} b^{-an}
\end{aligned}
$$

D'où, puisque $b^{1-a} > 1$, $|W(x) - W(y)| \leq N_1(g)\,|x-y|\,\dfrac{b^{(1-a)N}-1}{b^{1-a}-1} + 2\,\|g\|_\infty \dfrac{b^{-aN}}{1-b^{-a}}$ et donc, par positivité de $N_1(g)\,|x-y|\,\dfrac{1}{b^{1-a}-1}$, il vient

$$\boxed{|W(x)-W(y)| \leq N_1(g)\frac{b^{(1-a)N}}{b^{1-a}-1}\,|x-y| + \frac{2\,\|g\|_\infty}{1-b^{-a}} b^{-aN}.}$$

4b. Soit x et y réels distincts et N dans $\mathbf{N}^*$. D'après ce qui précède on a

$$\frac{|W(x)-W(y)|}{|x-y|^a} \leq N_1(g)\frac{1}{b^{1-a}-1}(b^N\,|x-y|)^{1-a} + \frac{2\,\|g\|_\infty}{1-b^{-a}}(b^N\,|x-y|)^{-a}$$

et donc si $1 < b^N\,|x-y| \leq b$, il vient

$$\frac{|W(x)-W(y)|}{|x-y|^a} \leq N_1(g)\frac{b^{1-a}}{b^{1-a}-1} + \frac{2\,\|g\|_\infty}{1-b^{-a}}\,.$$

Si $|x-y| < 1$, comme $b > 1$, alors en posant $N = \left\lceil 1 - \dfrac{\ln|x-y|}{\ln(b)} \right\rceil$, on a $N \in \mathbf{N}^*$ et $1 < b^N\,|x-y| \leq b$. Si, au contraire, $|x-y| \geq 1$, on a directement

$$\frac{|W(x)-W(y)|}{|x-y|^a} \leq |W(x)-W(y)| \leq 2\,\|W\|_\infty$$

et donc, pour tous x et y réels distincts on a

$$\frac{|W(x)-W(y)|}{|x-y|^a} \leq \max\left(N_1(g)\frac{b^{1-a}}{b^{1-a}-1} + \frac{2\,\|g\|_\infty}{1-b^{-a}}, 2\,\|W\|_\infty\right)\,.$$

D'où $\boxed{W \in \mathcal{H}^a(\mathbf{R},\mathbf{C}).}$

5a. Puisque g est 1-périodique, il en est de même pour g'' et donc, d'après la remarque effectuée en question 1, g'' est bornée sur $\mathbf{R}$. Soit alors x et h réels. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, on a

$$g(x+h)+g(x-h)-2g(x) = \int_x^{x+h} g' + \int_x^{x-h} g' = h\int_0^1 \left(g'(x+th)-g'(x-th)\right)\mathrm{d}t\,,$$

en utilisant des changements de variables affines et la linéarité de l'intégrale. Puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbf{R}$, on peut appliquer l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE (dite des accroissements finis) à g' en particulier entre $x+th$ et $x-th$, pour $0 \leq t \leq 1$ et il vient, pour de tels t, $|g'(x+th)-g'(x-th)| \leq 2\,|h|\,\|g''\|_\infty\,t$ et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$|g(x+h)+g(x-h)-2g(x)| \leq |h|\int_0^1 |g'(x+th)-g'(x-th)|\,\mathrm{d}t \leq 2h^2\,\|g''\|_\infty \int_0^1 t\,\mathrm{d}t$$

et donc, en posant $C = \|g''\|_\infty$, on a $\boxed{|g(x+h)+g(x-h)-2g(x)| \leq C\,|h|^2.}$

5b. Soit N dans $\mathbf{N}^*$ et x et h réels. Par inégalité triangulaire et puisque $0 < b^{-1} < 1$, on obtient en coupant la somme en deux comme en question 4,

$$\begin{aligned}
|W(x+h)+W(x-h)-2W(x)| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} b^{-n}\,|g(b^n(x+h))+g(b^n(x-h))-2g(b^n x)| \\
&+ \sum_{n=N}^{+\infty} b^{-n}\,(|g(b^n(x+h))|+|g(b^n(x-h))|+2\,|g(b^n x)|) \\
&\leq Ch^2\sum_{n=0}^{N-1} b^n + 4\,\|g\|_\infty \sum_{n=N}^{+\infty} b^{-n} \\
&\leq Ch^2\frac{b^N}{b-1} + 4\,\|g\|_\infty \frac{b^{-N}}{1-b^{-1}}\,.
\end{aligned}$$

Pour h vérifiant $|h| \leq 1$, on applique ce qui précède pour N dans $\mathbf{N}^*$ vérifiant $b^{-N} < |h| \leq b^{1-N}$, i.e. $N = 1 + [-\ln|h|\,/\ln(b)]$, et il vient $N > 0$ et

$$|W(x+h)+W(x-h)-2W(x)| \leq C\,|h|\,\frac{b}{b-1} + 4\,\|g\|_\infty\,|h|\,\frac{1}{1-b^{-1}}$$

et donc, en posant $C' = (C + 4\,\|g\|_\infty)\dfrac{b}{b-1}$, on a

$$\boxed{C' > 0 \text{ et } |W(x+h)+W(x-h)-2W(x)| \leq C'\,|h|.}$$

PARTIE II - Inversion de Fourier

1a. Soit h dans $\mathbf{R}_+^*$. Par hypothèse sur f on a $f(x) = o\left(x^{-2}\right)$ en $+\infty$ et donc aussi $f(nh) = o\left(n^{-2}\right)$ et donc, par comparaison à une série de Riemann convergente, la série

$$\boxed{\textstyle\sum_{n\geq 0} f(nh) \text{ est absolument convergente.}}$$

1b. Soit $A =]0;1]$. Pour h dans A on pose f_h la fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $f_h(t) = f(h\,[t/h])$. Puisque la fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ (puisqu'elle l'est en restriction à tout segment), les fonctions f_h le sont aussi. De plus on a, pour t fixé dans $\mathbf{R}$ et h dans A, par positivité de h :

$$\frac{t}{h} - 1 < \left[\frac{t}{h}\right] \leq \frac{t}{h} \quad \text{et} \quad t - h < h\left[\frac{t}{h}\right] \leq t\,,$$

d'où, par continuité de f, $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0} f_h(t) = f(t)$, i.e. la fonction f continue (et donc continue par morceaux) sur $\mathbf{R}$ est limite simple des fonctions f_h pour h dans A tendant vers 0.
Au voisinage de l'infini on a $(1+x^2)f(x) = o\left(1+x^{-2}\right) = o\,(1)$ et donc la fonction $x \mapsto (1+x^2)f(x)$ est bornée sur $\mathbf{R}$, i.e. on dispose de C dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout x réel, $|f(x)| \leq \dfrac{C}{1+x^2}$. En effet puisque $(1+x^2)f(x)$ tend vers 0 en l'infini, on dispose de M tel que, pour $|x| > M$, on ait $(1+x^2)\,|f(x)| \leq 1$. Comme par ailleurs, par compacité de $[-M;M]$ et continuité de f donc de $x \mapsto (1+x^2)f(x)$, et d'après le théorème de

Weierstrass, cette dernière fonction est bornée sur $[-M;M]$, et donc aussi sur $\mathbf{R}$. En particulier $\|f\|_\infty \leq C$ et donc $|f_h|$ est majoré par C sur $[-1;1]$.
On en déduit, pour h dans A et t réel, qu'on a, en utilisant l'encadrement précédent, $t-1 < h\left[\dfrac{t}{h}\right] \leq t$ et donc, pour $t \geq 1$, $\left|h\left[\dfrac{t}{h}\right]\right| \geq t-1 = |t|-1$ et, pour $t \leq -1$, $\left|h\left[\dfrac{t}{h}\right]\right| \geq |t| \geq |t|-1$. Il en résulte

$$|f_h(t)| \leq \frac{C}{1+(h\,[t/h])^2} \leq \frac{C}{1+(|t|-1)^2}\mathbb{1}_{|t|>1} + C\mathbb{1}_{|t|\leq 1}\ .$$

En posant $\varphi(t) = \dfrac{C}{1+(|t|-1)^2}\mathbb{1}_{|t|>1} + C\mathbb{1}_{|t|\leq 1}$ on définit une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$ (et même continue, mais ce n'est pas utile), positive et intégrable sur $\mathbf{R}$ d'après le critère de Riemann puisque $\varphi(t) = O\left(t^{-2}\right)$ en l'infini. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre et il vient d'une part que les fonctions f_h pour h dans A sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$ et qu'on a $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0}\int_0^{+\infty} f_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
Puisqu'on a affaire à une fonction intégrable, pour h dans A, et en utilisant la question précédente, on a, puisque f_h est en escalier sur tout segment et par relation de Chasles,

$$\int_0^{+\infty} f_h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty}\int_0^{(N+1)h} f_h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{N} hf(nh) = \sum_{n\in\mathbf{N}} hf(nh)$$

et donc $\boxed{\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0}\sum_{n\in\mathbf{N}} hf(nh) = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.}$

1c. Pour h dans $\mathbf{R}_+^*$, la famille $(f(nh))_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les deux familles $(f(nh))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(f(-nh))_{n\in\mathbf{N}^*}$ le sont puisque toute sous-famille d'une famille sommable l'est et la réunion d'un nombre fini de familles sommables l'est aussi. Or en appliquant ce qui précède à la fonction $x \mapsto f(-x)$ on obtient que $(f(-nh))_{n\in\mathbf{N}}$, et donc aussi $(f(-nh))_{n\in\mathbf{N}^*}$, est sommable et qu'on a $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0}\sum_{n\in\mathbf{N}} hf(-nh) = \int_0^{+\infty} f(-x)\,\mathrm{d}x$ ou encore $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0}\sum_{n\in\mathbf{Z}_-^*} hf(nh) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ par changement de variable linéaire, changement d'indice et puisque $\displaystyle\lim_{h\to 0,\ h>0} hf(0) = 0$. En sommant avec ce qui précède, il vient

$$\boxed{\lim_{h\to 0,\ h>0}\sum_{n\in\mathbf{Z}} hf(nh) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

2. Comme remarqué dans la question précédente, pour x dans $\mathbf{R}$, la famille $(f(x+kT))_{k\in\mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les familles restreintes à k positif ou k négatif le sont et donc, par indépendance de l'ordre de sommation pour les familles sommables, si et seulement si les séries $\sum_{k\geq 0} f(x+kT)$ et $\sum_{k<0} f(x+kT)$ sont absolument convergentes. Et dans ce cas la

somme de la famille complète est la somme des sommes de ces deux séries. On va de plus montrer que les deux séries de fonctions sont uniformément convergentes sur tout compact, ce qui montrera d'une part que f_T est définie sur $\mathbf{R}$ et d'autre part que c'est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ puisque les fonctions $x \mapsto f(x+kT)$ le sont pour tout k dans $\mathbf{Z}$.

De plus la sommabilité de $(f(x+kT))_{k\in\mathbf{Z}}$ entraîne celle de $(f(x+(k+1)T))_{k\in\mathbf{Z}}$ (elle lui est même équivalente) puisque $k \mapsto k+1$ est une bijection de $\mathbf{Z}$ sur lui-même, et les sommes de ces deux familles sont égales, i.e. f_T est T-périodique.

Soit donc I un segment de $\mathbf{R}$. On pose $I = [a;b]$. Comme dans la question précédente, on dispose de C dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\left\|(1+x^2)f(x)\right\|_\infty \leq C$. Alors pour x dans I et k dans $\mathbf{Z}$ vérifiant $|k| \geq \dfrac{1}{T}\max(|a|,|b|)$ on a $a+kT \leq x+kT \leq b+kT$ et les trois termes sont de même signe, donc $|x+kT| \geq \min\left(|kT+a|,|kT+b|\right)$. On en déduit que les séries $\sum_{k\geq 0} f(x+kT)$ et $\sum_{k<0} f(x+kT)$ sont normalement convergentes, de termes généraux majorés en valeur absolue par $\dfrac{C}{1+\min\left(|kT+a|,|kT+b|\right)^2}$, et cette dernière expression est dans $O\left(k^{-2}\right)$, donc convergente par comparaison avec une série de Riemann convergente et par positivité des termes. Donc $\boxed{f_T \text{ est continue sur } \mathbf{R} \text{ et } T\text{-périodique.}}$

3. Puisque les séries $\sum_{k\geq 0} f(x+kT)$ et $\sum_{k<0} f(x+kT)$ sont normalement convergentes sur le segment $[0;T]$, d'après ce qui précède, il en va de même pour les séries $\sum_{k\geq 0} f(x+kT)\exp\left(-\dfrac{2i\pi nx}{T}\right)$ et $\sum_{k<0} f(x+kT)\exp\left(-\dfrac{2i\pi nx}{T}\right)$ puisque les termes généraux ont mêmes modules et donc mêmes normes que les précédents, et donc on peut intégrer terme à terme, i.e.

$$c_n(f_T) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^T f(x+kT)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x\ .$$

Par changement de variable affine on a, pour k dans $\mathbf{Z}$,

$$\int_0^T f(x+kT)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x = \int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x$$

par T-périodicité de $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{2i\pi nx}{T}\right)$. Comme f est intégrable sur $\mathbf{R}$, il en va de même pour $x \mapsto f(x)\exp\left(-\dfrac{2i\pi nx}{T}\right)$ puisque ces deux fonctions ont même module et donc, par relation de Chasles

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x &= \lim_{N\to+\infty}\int_{-NT}^{(N+1)T} f(x)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{N\to+\infty}\sum_{k=-N}^{N}\int_{kT}^{(k+1)T} f(x)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^T f(x+kT)\exp\left(-\frac{2i\pi nx}{T}\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

et donc $\boxed{c_n(f_T) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{T}\mathcal{F}f\left(\dfrac{2\pi n}{T}\right).}$

4a. Par hypothèse sur $\mathcal{F}f$ c'est une fonction continue, tout comme $y \mapsto (1+y^2)\mathcal{F}f(y)$ et on en déduit qu'on dispose de C dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout y dans $\mathbf{R}$, $|\mathcal{F}f(y)| \leq \dfrac{C}{1+y^2}$.

Par conséquent pour n dans $\mathbf{Z}$ et x réel, on a $\left|c_n(f_T)\exp\left(\dfrac{2i\pi nx}{T}\right)\right| \leq \dfrac{\sqrt{2\pi}CT}{T^2+4\pi^2n^2}$. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série de fonctions

$$1 + \sum_{n\in\mathbf{N}^*}\left(c_n(f_T)\exp\left(\frac{2i\pi nx}{T}\right) + c_{-n}(f_T)\exp\left(\frac{-2i\pi nx}{T}\right)\right)$$

est normalement convergente sur $\mathbf{R}$ et donc en particulier elle est uniformément convergente sur $\mathbf{R}$. Autrement dit $\boxed{S_{N,T} \text{ converge uniformément sur } \mathbf{R}.}$

4b. Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une famille de complexes quelconques. Pour N dans $\mathbf{N}$ on pose $P_N(x) = \displaystyle\sum_{n=-N}^{N} a_n \exp\left(\frac{2i\pi nx}{T}\right)$ et alors P_N définit une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et T-périodique. Par linéarité de l'intégrale on a

$$\int_0^T f_T(x)\overline{P_N(x)}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f_T)\overline{a_n} = \int_0^T S_{N,T}(x)\overline{P_N(x)}\,\mathrm{d}x$$

et

$$\int_0^T \overline{f_T(x)}P_N(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n(f_T)}a_n = \int_0^T \overline{S_{N,T}(x)}P_N(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

i.e.

$$\int_0^T \left(f_T(x) - S_{N,T}(x)\right)\overline{P_N(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^T \overline{(f_T(x) - S_{N,T}(x))}P_N(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

En particulier, puisque $|f_T - P_N|^2 = |(f_T - S_{N,T}) - (P_N - S_{N,T})|^2$, en appliquant ce qui précède à la famille $(a_n - c_n(f_T))_{n\in\mathbf{Z}}$, il vient par linéarité de l'intégrale et puisque, si a et b sont deux complexes, on a $|a-b|^2 = |a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + \overline{b}^2$,

$$\int_0^T |f_T(x) - P_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^T |f_T(x) - S_{N,T}(x)|^2\,\mathrm{d}x + \int_0^T |P_N(x) - S_{N,T}(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

et, en particulier,

$$\int_0^T |f_T(x) - S_{N,T}(x)|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_0^T |f_T(x) - P_N(x)|^2\,\mathrm{d}x\,.$$

On en déduit, en prenant $P_N = S_{m,T}$ pour $m < N$, que $\left(\displaystyle\int_0^T |f_T(x) - S_{N,T}(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)_{N\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante et positive. Par conséquent pour démontrer que sa limite est nulle il suffit, par encadrement des limites, d'exhiber une suite de fonctions du type P_N telle que $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\int_0^T |f_T(x) - P_N(x)|^2\,\mathrm{d}x = 0$. Par inégalité de la moyenne si on a $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\|f_T - P_N\|_\infty = 0$, alors on aura a fortiori le résultat voulu.

On pose, pour N dans $\mathbf{N}$, $Q_N(x) = \left(\dfrac{1+\cos(2\pi x/T)}{2}\right)^N$. Cela définit une fonction continue et T-périodique sur $\mathbf{R}$, positive et non identiquement nulle sur $[0;T]$ de sorte qu'en posant $c_N = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T Q_N$, on a $c_N > 0$ et on peut poser $R_N = \dfrac{1}{c_N} Q_N$. Enfin on pose $P_N(x) = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f_T(t) R_N(x-t)\,\mathrm{d}t$. En utilisant la formule d'Euler et la linéarité de l'intégrale, on constate que P_N est bien de la forme requise. Par T périodicité de f_T et P_N et par changement de variable affine il vient, pour x réel,

$$P_N(x) = \frac{1}{T}\int_{x-T}^{x} f_T(x-t) R_N(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T f_T(x-t) R_N(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

On en déduit, pour x réel, par inégalité triangulaire et positivité de R_N,

$$\begin{aligned} |f_T(x) - P_N(x)| &= \frac{1}{T}\left|\int_0^T \left(f_T(x-t) - f_T(x)\right) R_N(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le \frac{1}{T}\int_0^T |f_T(x-t) - f_T(x)|\, R_N(t)\,\mathrm{d}t\ . \end{aligned}$$

Soit maintenant ε dans $\mathbf{R}_+^*$. Puisque f est continue sur $\mathbf{R}$, elle est uniformément continue sur $[0;T]$ d'après le théorème de Heine. On dispose donc de δ dans $\mathbf{R}_+^*$ un module d'uniforme continuité associé à ε. En particulier, pour tout x réel et tout t dans $[0;\delta]$ ou dans $[T-\delta;T]$, on a, en utilisant la T-périodicité dans le second cas, $|f_T(x-t) - f_T(x)| \le \varepsilon$. La relation de Chasles et l'inégalité de la moyenne entraînent donc, pour tout x réel, par positivité de R_N,

$$|f_T(x) - P_N(x)| \le \frac{\varepsilon}{T}\left(\int_0^\delta R_N + \int_{T-\delta}^T R_N\right) + \frac{2(T-2\delta)}{T}\sup_{[0;T]}|f_T| \sup_{[\delta;T-\delta]} R_N$$

d'où, par positivité de R_N et puisque $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T R_N = 1$ et $-1 \le \cos(2\pi t/T) \le \cos(2\pi\delta/T)$ pour $\delta \le t \le T-\delta$,

$$\|f_T - P_N\|_\infty \le \frac{\varepsilon}{T}\int_0^T R_N + \frac{2}{c_N}\sup_{[0;T]}|f_T|\, Q_N(\delta) \le \varepsilon + \frac{2}{c_N}\sup_{[0;T]}|f_T| \left(\frac{1+\cos(2\pi\delta/T)}{2}\right)^N\ .$$

Enfin on a, par changement de variable affine, croissance de l'intégrale et en utilisant $0 \le \sin \le 1$ sur $[0;\pi]$,

$$c_N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos(t)}{2}\right)^N \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right)^{2N}\mathrm{d}t \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos\left(\frac{t}{2}\right)^{2N}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t$$

et donc $\dfrac{1}{c_N} \le \dfrac{(2N+1)\pi}{2}$, par positivité des deux termes et en reconnaissant la dérivée de $t \mapsto \cos\left(\dfrac{t}{2}\right)^{2N+1}$. Par croissance comparée, puisque $0 \le \dfrac{1+\cos(2\pi\delta/T)}{2} < 1$, on dispose donc de n dans $\mathbf{N}$ tel que, pour $N \geq n$, on ait $\|f_T - P_N\|_\infty \leq 2\varepsilon$. Ainsi $\lim\limits_{N\to\infty} \|f_T - P_N\|_\infty = 0$ et $\boxed{\lim\limits_{N\to\infty} \int_0^T |f_T(x) - S_{N,T}(x)|^2 \,\mathrm{d}x = 0.}$

4c. En reprenant les notations utilisées pour répondre à la question 4a, on a pour tout x réel, $|S_{N,T}(x)| \leq \sqrt{2\pi}CT \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} \dfrac{1}{T^2+4\pi^2n^2}$ et donc la suite de fonctions $(S_{N,T})_{N\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues, convergeant uniformément, d'après 4a, et uniformément majorées par une constante, notée K. De la convergence uniforme on déduit que la limite, notée g, de cette suite est une fonction continue sur $[0;T]$. Par ailleurs la suite de fonctions $((f_T - S_{N,T})^2_{N\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions continues sur $[0;T]$, de limite $(f_T - g)^2$ également continue sur $[0;T]$ et majorées indépendamment de N par $(|f_T| + K)^2$, par inégalité triangulaire et croissance du carré sur $\mathbf{R}_+$. On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, puisque cette fonction majorante est continue, positive et donc aussi intégrable sur $[0;T]$, et déduire de la question précédente qu'on a $\displaystyle\int_0^T |f_T - g|^2 = 0$. Comme on a affaire à un intégrande continu et positif, on en déduit qu'il est nul, i.e. $f_T = g$ sur $[0;T]$ et donc aussi sur $\mathbf{R}$ par T-périodicité : pour x réel, $\boxed{f_T(x) = \sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} c_n(f_T)\exp\left(\dfrac{2i\pi nx}{T}\right).}$

5. Soit x un réel. Pour T dans $\mathbf{R}_+^*$, on note g_T la fonction $t \mapsto f(x + [t]\,T)$. C'est une fonction continue par morceaux (sur tout segment) sur $\mathbf{R}$ et on a $\lim\limits_{T\to+\infty} g_T = f(x)\mathbb{1}_{[0;1[}(t)$. On note, comme en 2, $C = \left\|(1+t^2)f(t)\right\|_\infty$. Alors, pour $|t| \geq 1 + |x|$, on a $|t| \geq 1$ et donc, de $t - 1 < [t] \leq t$, on tire $|[t]| \geq |t|$ si $t < 0$ et $|[t]| \geq t - 1$ si $t \geq 1$. Dans les deux cas on a $|[t]| \geq |t| - 1 \geq |x|$ et donc, pour $T \geq 1$, on a $|T\,[t]| \geq |[t]| \geq |x|$ et il vient

$$|g_T(t)| \leq \frac{C}{1 + (|T\,[t]| - |x|)^2} \leq \frac{C}{1 + (|t| - |x| - 1)^2}$$

d'où, pour t réel et $T \geq 1$

$$|g_T(t)| \leq \frac{C}{1 + (|t| - |x| - 1)^2} + C\mathbb{1}_{[-1-|x|;1+|x|]}(t)$$

et cette majoration par une fonction indépendante de T (pour $T \geq 1$) par une fonction continue par morceaux sur $\mathbf{R}$, positive et dans $O\left(t^{-2}\right)$ en l'infini, donc intégrable d'après le critère de Riemann, permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre. Par conséquent $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g_T$ tend vers $f(x)$. Or, par construction, on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} g_T = f_T(x)$ et donc $\boxed{f_T \text{ converge simplement vers } f.}$

6. D'après la question 4 on a, pour x réel et $T > 0$,

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{2\pi}{T} \mathcal{F}f\left(n\frac{2\pi}{T}\right) \exp\left(ixn\frac{2\pi}{T}\right),$$

i.e. en posant $h = \dfrac{2\pi}{T}$ et $g(y) = \mathcal{F}f(y)\exp(ixy)$, $\sqrt{2\pi} f_T(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} hg(nh)$. Or, par hypothèse, $\mathcal{F}f$ vérifie les mêmes hypothèses que g et $y \mapsto \exp(ixy)$ est une fonction continue sur $\mathbf{R}$ de module constant égal à 1, donc on peut appliquer le résultat de la question 1c à g et il vient $\lim_{T\to+\infty} \sqrt{2\pi} f_T(x) = \int_{\mathbf{R}} \mathcal{F}f(y)\exp(ixy)\,\mathrm{d}y$, ou encore $\boxed{f = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}f.}$

PARTIE III - Construction d'une ondelette

1a. Soit f dans $\mathcal{S}$. On pose $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\exp(-ixy)$. Puisque f et l'exponentielle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$, il en va de même pour g par rapport à ses deux variables. De plus, pour n dans $\mathbf{N}$, $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} f(x,y) = (-ix)^n g(x,y)$. Puisque f appartient à $\mathcal{S}$, on a pour tout y réel $\left|\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} f(x,y)\right| = |x^n f(x)| = o\left(x^{-2}\right)$ et donc cette majoration indépendante de y par une fonction positive, continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, par critère de RIEMANN, permet d'appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégral et donc, pour n entier et y réel,

$$\boxed{\mathcal{F}f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C}) \text{ et } (\mathcal{F}f)^{(n)}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} (-ix)^n f(x)\exp(-iyx)\,\mathrm{d}x.}$$

1b. Soit f dans $\mathcal{S}$. Pour n dans $\mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}(ix)^n f(x)$, ce qui définit une fonction dans $\mathcal{S}$, comme on le vérifie par exemple avec la formule de dérivation d'un produit.
Pour y dans $\mathbf{R}$ et n dans $\mathbf{N}$ on a, par intégration par parties, ce qui est légitime puisqu'on a affaire à des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$,

$$y\int f_n(x)\exp(-ixy)\,\mathrm{d}x = if_n(x)\exp(-ixy) - i\int f_n'(x)\exp(-ixy)\,\mathrm{d}x$$

et donc puisque le premier terme du membre de droite tend vers 0 en l'infini, car f est dans $\mathcal{S}$, et par intégrabilité de f_n et de toutes ses dérivées, car les éléments de $\mathcal{S}$ et leurs dérivées sont tous continus et dans $o\left(x^{-2}\right)$ en l'infini, il vient

$$y(\mathcal{F}f)^{(n)}(y) = -i(\mathcal{F}f_n')(y)$$

et aussi, par récurrence immédiate, pour m dans $\mathbf{N}$,

$$y^m(\mathcal{F}f)^{(n)}(y) = (-i)^m(\mathcal{F}f_n^{(m)})(y)$$

et

$$\left|y^m(\mathcal{F}f)^{(n)}(y)\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbf{R}} \left|f^{(m)}(x)\right|\mathrm{d}x\ .$$

On en déduit que les fonctions $y \mapsto \left|y^{m+1}(\mathcal{F}f)^{(n)}(y)\right|$ sont bornées et donc aussi que les fonctions $y \mapsto \left|y^m(\mathcal{F}f)^{(n)}(y)\right|$ tendent vers 0 en l'infini, en tant que $O\left(|y|^{-1}\right)$, i.e. $\boxed{\mathcal{F}f \in \mathcal{S}.}$

2a. Puisque l'exponentielle et la fonction nulle sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$ et la fonction inverse l'est sur l'ouvert $\mathbf{R}^*$, il en va de même pour ψ_0 sur $\mathbf{R}^*$. Enfin puisque $\lim_{-\infty}\exp = 0$, il vient $\lim_{0^+}\psi_0 = 0 = \psi_0(0) = \lim_{0^-}\psi_0$ et donc $\boxed{\psi_0 \text{ est continue sur } \mathbf{R}.}$

2b. On a justifié précédemment que ψ_0 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$. On démontre par récurrence sur n dans $\mathbf{N}$ le prédicat $(\mathbf{H}_n)$: il existe P_n un polynôme dans $\mathbf{R}[X]$ tel que, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\psi_0^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp(-1/x)$. Le prédicat $(\mathbf{H}_0)$ est vrai en prenant $P_0 = 1$. Soit alors n dans $\mathbf{N}$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vrai et P_n un polynôme tel que, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\psi_0^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{x^{2n}}\exp(-1/x)$. Par dérivation sur l'ouvert $\mathbf{R}_+^*$ il vient, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\psi_0^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_n'(x)x^2 - 2nxP_n(x) + P_n(x)}{x^{2n+2}}\exp(-1/x)$ et donc $(\mathbf{H}_{n+1})$ est vérifié en posant $P_{n+1} = X^2P_n' + (1-2nX)P_n$. Par principe de récurrence on en déduit en particulier que

$\boxed{\psi_0 \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}_+^* \text{ et que sa dérivée d'ordre } n \text{ s'exprime sous la forme } R_n(x)\exp(-1/x), \text{ où } R_n \text{ est une fraction rationnelle.}}$

2c. D'après ce qui précède, pour n dans $\mathbf{N}$, R_n n'a de pôle qu'en 0 et donc, par croissance comparée $\lim_{0^+}\psi_0^{(n)} = 0$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, dans le cadre C^n, on en déduit que $(\psi_0)_{|\mathbf{R}^*}$ est prolongeable en une fonction de classe C^n sur $\mathbf{R}$. Comme ψ_0 est continue, ce prolongement est ψ_0 elle-même, i.e. $\boxed{\psi_0 \text{ est dans } \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C}).}$

2d. Pour x dans $\mathbf{R}$ on pose $f(x) = \psi_0(x-a)\psi_0(b-x)$. Alors puisque les fonctions affines et ψ_0 sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}^*$, il en va de même pour f. Par construction ψ_0 est strictement positive sur $\mathbf{R}_+^*$ et nulle ailleurs et donc

$\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}_+) \text{ et } f \text{ est strictement positive sur }]a;b[\text{ et nulle ailleurs.}}$

3. Si $b \leq 1$, la fonction nulle convient. Sinon on dispose d'après la question précédente de f dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}_+)$, strictement positive sur $]-b;-1/b[$ et nulle ailleurs. En particulier c'est une fonction dans $\mathcal{S}$ et on peut poser $\Psi_b = \mathcal{F}f$. Alors Ψ_b est dans $\mathcal{S}$ et donc f et Ψ_b sont dans $o\left(x^{-2}\right)$ au voisinage de $\pm\infty$ et donc on peut appliquer la formule d'inversion. Il vient, pour x réel, $\mathcal{F}\Psi_b(x) = f(-x)$. On en déduit que $\mathcal{F}\Psi_b$ est strictement positive sur $]1/b;b[$ et nulle ailleurs. Enfin on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}}\Psi_b = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\Psi_b(0) = \sqrt{2\pi}f(0) = 0$ et

$$\int_{\mathbf{R}} x\Psi_b(x)\,\mathrm{d}x = i\sqrt{2\pi}(\mathcal{F}\Psi_b)'(0) = i\sqrt{2\pi}f'(0) = 0\ .$$

En particulier

$\boxed{\Psi_b \text{ est continue et intégrable sur } \mathbf{R} \text{ ainsi que } x \mapsto x\Psi_b(x). \text{ De plus } \int_{\mathbf{R}}\Psi_b(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}}x\Psi_b(x)\,\mathrm{d}x = 0 \text{ et la transformée de Fourier de } \Psi_b \text{ est strictement positive sur }]1/b;b[\text{ et nulle ailleurs.}}$

PARTIE IV - Non dérivabilité de W dans le cas $g(x) = \cos(2\pi x)$

1. D'après la caractérisation de CARATHÉODORY de la dérivabilité en x, on dispose de φ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$, continue et égale à $f'(x)$ en x et telle que, pour h dans $\mathbf{R}$ on a $f(x+h) = f(x)+h\varphi(x+h)$. On pose alors $\varepsilon_x(h) = \varphi(x+h)-f'(x)$ et donc ε_x est une fonction continue en 0 et y valant 0. De plus pour h non nul on a $\varepsilon_x(h) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x)$ et donc ε_x est continue sur

l'ouvert $\mathbf{R}^*$ par stabilité par opérations algébriques. Puisque ε_x est continue en 0, on dispose d'un voisinage de 0 où elle est bornée par 1, et donc de a dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que la boule ouverte de centre 0 et de rayon a soit incluse dans ce voisinage. Pour $|h| \geq a$ on a $|\varepsilon_x| \leq \dfrac{2}{a}\|f\|_\infty + |f'(x)|$, ce qui montre que ε_x est bornée sur le complémentaire du voisinage précédent, et donc sur tout $\mathbf{R}$. Par conséquent $\boxed{\varepsilon_x \text{ est continue bornée sur } \mathbf{R}\text{, de limite nulle en } 0.}$

2a. Pour $\alpha > 0$ et x réel, les termes sont bien définis et l'intégrande est une fonction continue, puisque f et Ψ_b le sont, donc localement intégrable sur $\mathbf{R}$. De plus, pour y réel, $\left|f(y)\Psi_b\left(\dfrac{y-x}{\alpha}\right)\right| \leq \|f\|_\infty \left|\Psi_b\left(\dfrac{y-x}{\alpha}\right)\right|$. Le majorant est une fonction intégrable puisque Ψ_b l'est et par changement de variable affine bijectif et donc, par comparaison entre fonctions positives, l'intégrande est intégrable sur $\mathbf{R}$. En particulier
$\boxed{\text{la définition de } c(\alpha, x) \text{ a bien un sens.}}$

2b. Si f est dérivable en x on dispose de ε_x comme dans la question précédente. De plus par changement de variable affine il vient

$$c(\alpha, x) = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}} f(x+\alpha t)\Psi_b(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(x)}{\alpha}\int_{\mathbf{R}} \Psi_b + f'(x)\int_{\mathbf{R}} t\Psi_b(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\mathbf{R}} \varepsilon_x(\alpha t)t\Psi_b(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc, par définition de Ψ_b,

$$c(\alpha, x) = \int_{\mathbf{R}} \varepsilon_x(\alpha t)\Psi_b(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Puisque ε_x est bornée, l'intégrande est majoré indépendamment de α, et en valeur absolue, par $t \mapsto |t\Psi_b(t)|$, à savoir par une fonction continue, positive et intégrable sur $\mathbf{R}$ par construction de Ψ_b. De plus c'est une fonction continue de α et de t, donc on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètre et il vient, par continuité de ε_x en 0 et donc puisque, pour tout t réel, $\lim_{\alpha\to 0}\varepsilon_x(\alpha t) = 0$, $\boxed{\lim_{\alpha\to 0} c(\alpha, x) = 0.}$

3a. On suppose W dérivable en 0. D'après la question I.1, W est continue et bornée sur $\mathbf{R}$. On peut alors appliquer ce qui précède, i.e.

$$\lim_{\alpha\to 0\,,\alpha>0} \frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbf{R}} W(y)\Psi_b\left(\frac{y}{\alpha}\right)\mathrm{d}y = 0\ .$$

Par définition l'intégrande est la somme de la série de fonctions

$$\sum_{n\geq 0} b^{-an}\cos(2\pi b^n y)\Psi_b\left(\frac{y}{\alpha}\right)\ .$$

Le terme général de cette série est borné par la fonction $y \mapsto b^{-an}\left|\Psi_b\left(\dfrac{y}{\alpha}\right)\right|$, qui est intégrable par construction de Ψ_b et par changement de variable affine. On en déduit qu'on a affaire à une série de fonctions continues sur $\mathbf{R}$ et intégrables, et que l'intégrale de la valeur absolue du terme général est majorée par le terme général d'une série convergente, à savoir $b^{-an}\int_{\mathbf{R}}|\Psi_b|$. Par conséquent on peut appliquer le théorème de convergence normale pour l'intégration des séries de fonctions, i.e. intervertir signes somme et intégral. Il vient, par changement de variable affine puis en utilisant la formule d'Euler

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbf{R}} W(y)\Psi_b\left(\frac{y}{\alpha}\right)\mathrm{d}y &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{-an}}{\alpha^2}\int_{\mathbf{R}}\cos(2\pi b^n y)\Psi_b\left(\frac{y}{\alpha}\right)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{-an}}{\alpha}\int_{\mathbf{R}}\cos(2\pi b^n \alpha t)\Psi_b(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} b^{-an}\frac{\mathcal{F}\Psi_b(2\pi b^n\alpha)+\mathcal{F}\Psi_b(-2\pi b^n\alpha)}{2\alpha}
\end{aligned}$$

et donc, en utilisant la nullité de $\mathcal{F}\Psi_b$ en dehors de $]1/b;b[$, il vient pour n dans $\mathbf{N}$, $c((2\pi b^n)^{-1},0) = \sqrt{2\pi^3}b^{(1-a)n}\mathcal{F}(\Psi_b)(1)$. Comme $1-a>0$, $b>1$ et $\mathcal{F}(\Psi_b)(1)>0$, on a simultanément $\lim(2\pi b^n)^{-1}=0$ et $\lim c((2\pi b^n)^{-1},0)=+\infty$. Cette contradiction assure que $\boxed{W \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$

3b. Soit x un réel. Pour n dans $\mathbf{N}$ et y dans $\mathbf{R}$, on a

$$\left|b^{-an}\cos(2\pi b^n y)\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\right| \leq b^{-an}\left|\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\right|$$

de sorte que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} b^{-an}\cos(2\pi b^n y)\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)$ est encore normalement convergente et il vient, en notant $c(\alpha,x) = \displaystyle\frac{1}{\alpha^2}\int_{\mathbf{R}} W(y)\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\mathrm{d}y$, ce qui est licite puisque W est continue et bornée,

$$\begin{aligned}
c(\alpha,x) &= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{-an}}{\alpha^2}\int_{\mathbf{R}}\cos(2\pi b^n y)\Psi_b\left(\frac{y-x}{\alpha}\right)\mathrm{d}y \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{b^{-an}}{\alpha}\int_{\mathbf{R}}\cos(2\pi b^n(x+\alpha t)\Psi_b(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{2\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} b^{-an}\frac{\exp(2i\pi b^n x)\mathcal{F}\Psi_b(2\pi b^n\alpha)+\exp(-2i\pi b^n x)\mathcal{F}\Psi_b(-2\pi b^n\alpha)}{2\alpha}
\end{aligned}$$

et il vient encore $\left|c((2\pi b^n)^{-1},0)\right| = \sqrt{2\pi^3}b^{(1-a)n}\mathcal{F}(\Psi_b)(1)$, de sorte qu'on en déduit grâce à la question précédente que W ne saurait être dérivable en x, i.e.

$\boxed{W \text{ n'est dérivable en aucun point de } \mathbf{R}.}$

PARTIE V - Une alternative pour W

1. Puisque W vérifie l'équation 2, on a

$$\frac{W(b^{-1}(x+h))-W(b^{-1}x)}{b^{-1}h} = b^{1-a}\frac{W(x+h)-W(x)}{h} + \frac{g(b^{-1}(x+h))-g(b^{-1}x)}{b^{-1}h}$$

et donc, par inégalité triangulaire et définition de $N_1(g)$,

$$\frac{|W(b^{-1}(x+h)) - W(b^{-1}x)|}{b^{-1}h} \geq \frac{N_1(g)b^{1-a}}{b^{1-a}-1}(1+u) - N_1(g) \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+b^{1-a}u)\ .$$

Donc $\boxed{\dfrac{|W(b^{-1}(x+h)) - W(b^{-1}x)|}{b^{-1}h} \geq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+b^{1-a}u).}$

2a. Puisqu'on a $N_1(W) > \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}$, par définition de N_1, on dispose de s et t réels distincts tels que

$$\frac{|W(s)-W(t)|}{|s-t|} > \frac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}\ .$$

On pose alors $x = \min(s,t)$, $k = |s-t|$ et $v = \dfrac{b^{1-a}\,|W(s)-W(t)|}{kN_1(g)}$ de sorte qu'on a $x \in \mathbf{R}$, $k > 0$, $v > 0$ et $\dfrac{|W(x+k)-W(x)|}{k} \geq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+v)$.
Par récurrence immédiate, en utilisant la question précédente, il vient pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\dfrac{|W(b^{-n}(x+k) - W(b^{-n}x)|}{b^{-n}k} \geq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+b^{n(1-a)}v)$. Pour $n = \max\left(0; 1+\left[\dfrac{\ln(k)}{\ln(b)}\right]\right)$, en posant $x_0 = b^{-n}x$, $h = b^{-n}k$ et $u = b^{n(1-a)}v$, il vient

$$\boxed{x_0 \in \mathbf{R},\ u>0,\ h \in]0;1[\text{ et } \frac{|W(x_0+h)-W(x_0)|}{h} \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+u).}$$

2b. On pose $\ell = 1+h$. Soit I de longueur $\ell(I)$ avec $\ell(I) > \ell$. On dispose de a et b dans I tels que $a < a+\ell < b$. On pose alors, en prenant x_0, h et u comme précédemment, $n = [a+1-x_0]$ de sorte qu'on a $a < x_0+n \leq a+1$ et aussi $a < x_0+n < x_0+n+h \leq a+1+h < b$. On pose $x_I = x_0+n$ et alors $\{x_I, x_I+h\} \subset I$. De plus, par 1-périodicité de W, il vient $\dfrac{|W(x_I+h)-W(x_I)|}{h} = \dfrac{|W(x_0+h)-W(x_0)|}{h}$ et donc

$$\boxed{\frac{|W(x_I+h)-W(x_I)|}{h} \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+u).}$$

2c. L'entier N suggéré par l'énoncé existe bien et vaut $1+\left[\dfrac{\ell-\ell(J)}{\ln(b)}\right]$, ce qui est licite puisque $\ell > 1 > \ell(J)$ et $b > 1$. On pose alors $x_J = b^{-N}(x_I+h)$ et $y_J = b^{-N}x_I$. Alors x_J et y_J appartiennent à J, par définition, et sont distincts. De plus, par positivité des termes apparaissant, en utilisant la propriété obtenue par récurrence à partir de la question 1,

$$\frac{|W(x_J)-W(y_J)|}{|x_J-y_J|} \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}(1+b^{N(1-a)}u) \geq \frac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}b^{N(1-a)}u\,,$$

i.e. $\boxed{\dfrac{|W(x_J)-W(y_J)|}{|x_J-y_J|} \geq \dfrac{uN_1(g)b^{N(1-a)}}{b^{1-a}-1}.}$

2d. Soit J un intervalle de longueur strictement inférieure à 1. D'après ce qui précède, et puisque $b^{-N} > \dfrac{\ell(J)}{b\ell}$ et $|x_J - y_J| = b^{-N}h$, on a

$$|W(x_J) - W(y_J)| \geq \frac{uN_1(g)b^{N(1-a)}}{b^{1-a}-1} b^{-N}h \geq \frac{uN_1(g)h}{b^{1-a}-1}\left(\frac{\ell(J)}{b\ell}\right)^a$$

i.e. en posant $C = \dfrac{uN_1(g)h}{(b^{1-a}-1)b^a\ell^a}$, on a $|W(x_J) - W(y_J)| \geq C\ell(J)^a$. Alors $C > 0$ et C ne dépend que de g, a et b. Par ailleurs on a

$$|W(x_J) - W(y_J)| = \max\left(W(x_J); W(y_J)\right) - \min\left(W(x_J); W(y_J)\right) \leq \sup_J W - \inf_J W$$

et donc $\boxed{\sup_{x\in J} W(x) - \inf_{x\in J} W(x) \geq C\ell(J)^a.}$

3. D'après la question précédente, si W n'est pas lipschitzienne ou bien si elle l'est mais $N_1(W) > \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}$, alors pour tout intervalle de J un intervalle de longueur strictement inférieure à 1, $\sup_{x\in J} W(x) - \inf_{x\in J} W(x) \geq C\ell(J)^a$. Soit alors x un réel en lequel W est dérivable. Étant continue et bornée, on peut appliquer le résultat de la question IV.1 et il vient, pour s et t réels,

$$W(s) - W(t) = (s-t)W'(x) + (s-x)\varepsilon_x(s-x) + (t-x)\varepsilon_x(t-x)$$

et donc, pour tout intervalle J contenant x, s et t, on a

$$|W(s) - W(t)| \leq \ell(J)\left(|f'(x)| + 2\left\|\varepsilon_x\right\|_\infty\right) .$$

En particulier, pour en notant $J_n = \left[x - \dfrac{1}{n}; x + \dfrac{1}{n}\right]$, on a

$$\frac{C}{n^a} \leq \sup_{J_n} W - \inf_{J_n} W \leq \frac{|f'(x)| + 2\left\|\varepsilon_x\right\|_\infty}{n}$$

et ceci est une contradiction. Il en résulte que

$\boxed{\text{si } W \text{ n'est pas lipschitzienne avec } N_1(W) \leq \dfrac{N_1(g)}{b^{1-a}-1}, \text{ alors } W \text{ n'est nulle part dérivable.}}$

Remarque : tel quel on n'a pas affaire à une réelle alternative. Néanmoins la démonstration du fait qu'on a vraiment une alternative relève de la culture générale hors-programme et ne saurait être un attendu du concours. La démonstration, due à Fryge Riesz, est donnée en fin de problème.

4. Soit g la fonction définie par $g(x) = \cos(2\pi x) - T\cos(2\pi x)$, i.e. $g(x) = \cos(2\pi x) - b^{-a}\cos(2\pi bx)$. Alors g est 1-périodique et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, donc est lipschitzienne. En fait $N_1(g) \leq 2\pi(1 + b^{1-a})$, mais ce n'est pas nécessaire. On a $g(0) - g(1/b) = 1 - \cos(2\pi/b)$ et comme $b > 1$, il en résulte que g n'est pas constante. De plus, par unicité des solutions continues bornées de l'équation (2), on a alors $W(x) = \cos(2\pi x)$. Puisque W est dérivable sur $\mathbf{R}$, $\boxed{\text{le premier point de l'alternative précédente est vérifié.}}$

Démonstration du théorème de LEBESGUE

On remarque tout d'abord qu'une fonction lipschitizienne est proche d'une fonction monotone. En effet si f est k-lipschitizienne, alors $x \mapsto f(x) + kx$ est croissante, par définition. On peut le voir ainsi : une fonction est k-lipschitizienne si ses taux d'accroissement sont toujours compris entre $-k$ et k, tandis qu'une fonction est monotone si ses taux d'accroissement sont toujours positifs, et une homothétie a des taux d'accroissement constants.

Par conséquent si W est lipschitizienne, alors $x \mapsto W(x) + N_1(W)x$ est monotone et $2N_1(W)$-lipschitizienne, i.e. ses taux d'accroissement sont compris entre 0 et $2N_1(W)$. On va démontrer qu'une fonction monotone et lipschitizienne est dérivable presque partout et donc en particulier en au moins un point. C'est une version, un peu affaiblie, d'un théorème d'Henri LEBESGUE affirmant qu'une fonction monotone (pas nécessairement continue) a la même propriété et qui permet de l'affirmer également pour les fonctions à variations bornées ou les fonctions absolument continues. La suite de cette démonstration est recopiée du magnifique livre de Fryge RIESZ et Béla SZŐKEFALVI-NAGY « Leçons d'analyse fonctionnelle », en français. Les notes sont les miennes.

Par ensemble de mesure nulle, on entend d'après LEBESGUE les ensembles des valeurs x qu'on peut enfermer en un nombre fini ou une suite dénombrable d'intervalles de manière que leur longueur totale, c'est-a-dire la somme de leurs longueurs, soit arbitrairement petite. [a] Il découle immédiatement de cette définition que tout sous-ensemble d'un tel ensemble est aussi de mesure nulle.

II en est de même quant à la reunion d'un nombre fini ou d'une suite dénombrable de tels ensembles ; en effet, on n'aura qu'à enfermer ces ensembles respectivement en des systèmes d'intervalles dont la longueur totale ne dépasse pas $\varepsilon/2^n$; la longueur totale de tous ces intervalles, enfermant la réunion de nos ensembles, ne dépassera pas alors la quantité ε. En particulier, chaque ensemble fini ou dénombrable de valeurs x est de mesure nulle.

Quelquefois [b] il sera avantageux de présenter notre définition sous la forme suivante. L'ensemble E est de mesure nulle, si l'on peut l'enfermer dans une suite d'intervalles de longueur totale finie de sorte que tout point de E soit intérieur à une infinité de ces intervalles. Les deux définitions sont équivalentes. En effet, la seconde implique la première, puisque quand tous les points de E appartiennent à une infinité d'intervalles de longueur totale finie, on pourra abaisser cette longueur totale à volonté en supprimant un nombre fini d'intervalles [c]. Inversement, quand E est de mesure nulle d'après la première définition, on n'aura qu'a l'enfermer successivement en des systèmes d'intervalles dont la longueur totale reste respectivement inférieure à $1/2^n$, et s'il était nécessaire, d'élargir les intervalles à gauche et à droite par exemple en redoublant leurs longueurs ; la réunion de tous ces systèmes satisfera alors aux exigences de la seconde définition.

a. En langage plus formalisé : une partie E de $\mathbf{R}$ est de mesure nulle si pour tout ε strictement positif on peut trouver $(I_n)_{n\in I}$ avec I au plus dénombrable, I_n des intervalles réels, $I_n =]a_n; b_n[$, tels que $E \subset \bigcup_{n\in I} I_n$ et la famille $(b_n - a_n)_{n\in I}$ est sommable de somme inférieure à ε.

b. Ce paragraphe est inutile pour la suite

c. Plus formellement soit $(I_n)_{n\in I}$ avec I au plus dénombrable, I_n des intervalles réels, $I_n =]a_n; b_n[$, tels qu'on ait la propriété $\mathcal{P}(I)$ suivante : $E \subset \bigcup_{n\in I} I_n$, la famille $(b_n - a_n)_{n\in I}$ est sommable et tout point de x est intérieur à une infinité d'intervalles I_n. Pour tout J inclus dans I la famille $(b_n - a_n)_{n\in J}$ est sommable et on note $\sigma(J)$ sa somme. On considère alors l'ensemble M des $\sigma(J)$ pour J inclus dans I vérifiant la propriété $\mathcal{P}(J)$. Alors M est non vide car il contient $\sigma(I)$ et minoré par 0. On peut donc considérer α sa borne inférieure. Si α est nul, alors E est de mesure nulle. On suppose donc $\alpha \neq 0$ et on va aboutir à une contradiction. Par définition de la borne inférieure on dispose de J inclus dans I tel que $\sigma(J) \leq 3\alpha/2$. De plus comme tout x dans E appartient à une infinité d'éléments de J, pour toute partie finie K de J, on a encore $\mathcal{P}(J \setminus K)$. En particulier $\sigma(J \setminus K) \geq \alpha$ et donc $\sigma(K) \leq \alpha/2$. Or, par définition de la somme d'une famille sommable ceci entraîne $\sigma(J) \leq \alpha/2$, ce qui est une contradiction.

Le terme « presque partout » (en abréviation : p. p.) est utilisé pour dire que le fait en question subsiste partout, sauf peut-être en tous les points d'un ensemble de mesure nulle. Avant de démontrer le théoreme fondamental de LEBESGUE, montrons d'abord que, dans une certaine direction, il donne le maximum et ne pourra être perfectionné. En effet, étant donné un ensemble E de mesure nulle, nous allons construire une fonction croissante qui n'admet pas de derivée finie en les points de E (à vrai dire, notre fonction admet en ces points une derivée infinie). À cet effet, on n'aura qu'à enfermer E en des intervalles au sens de la seconde définition et à poser $f(x)$ égale à la somme des longueurs des intervalles ou des segments d'intervalles situés à gauche du point x ; la fonction ainsi définie jouira évidemment de la propriété exigée.
Nous allons démontrer la dérivabilité presque partout des fonctions monotones et cela sans nous reporter à la théorie de l'intégration. Les premières démonstrations qui tiennent compte de pareille indépendance, sont dues à FABER et à G. C. YOUNG et W. H. YOUNG. Pour la commodité du langage nous supposerons d'abord qu'i1 s'agisse d'une fonction continue et monotone et nous indiquerons seulement à la fin les modifications, d'ailleurs presque évidentes, qu'on aura à faire pour lever l'hypothèse de la continuité.
La démonstration sera fondée sur un théorème auxiliaire que voici :
Lemme. [d] Soit g une fonction continue, définie dans l'intervalle $[a; b]$, et soit E l'ensemble des points x intérieurs à cet intervalle et tels qu'il existe un y situé à droite de x, de sorte que $g(y) > g(x)$. L'ensemble E est alors ou bien vide ou bien c'est un ensemble ouvert, c'est-à-dire qu'il se décompose en un nombre fini ou une infinité dénombrable d'intervalles ouverts et disjoints $]a_k; b_k[$, et l'on a pour tous ces intervalles $g(a_k) \leq g(b_k)$.
Pour démontrer ce lemme, observons d'abord que l'ensemble E est ouvert puisque si $y > x_0$ et $g(y) > g(x_0)$, alors, à cause de la continuité, les relations $y > x$, $g(y) > g(x)$ restent valables lorsque x varie dans le voisinage du point x_0. Cela étant soit $]a_k; b_k[$ l'un quelconque des intervalles ouverts dont se compose E ; alors le point b_k n'appartiendra pas à cet ensemble. Soit x un point intermédiaire entre a_k et b_k ; nous allons prouver $g(x) \leq g(b_k)$; l'inégalité à démontrer s'ensuivra en faisant tendre x vers a_k. À cet effet, soit, entre x et b_k, x_1 le point le plus proche de ce dernier pour lequel $g(x_1) > g(x)$; nous avons a montrer que x_1 coïncide avec b_k. Or, s'il n'en était pas ainsi, les points y_1 qui correspondent à x_1 par l'hypothèse du théorème devraient être situés au-delà de b_k et, comme de plus b_k n'appartient pas à l'ensemble E, on aurait $g(x_1) < g(y_1) \leq g(b_k) < g(x_1)$, ce qui implique contradiction.
On peut d'ailleurs montrer et le lecteur s'en rendra aisément compte qu'on a précisement $g(a_k) = g(b_k)$, sauf peut-être si $a_k = a$. Cependant ce fait est sans conséquence pour l'application qui suit.
Cela étant, soit f une fonction continue et monotone sur $[a; b]$; pour fixer les idées, nous la supposons non décroissante. Pour examiner la dérivabilité de f, nous allons comparer ses nombres dérivés. Comme on sait, on appelle nombres dérivés supérieur et inférieur à droite et on désigne respectivement par Λ_d et λ_d la plus grande et la plus petite des limites du rapport $\dfrac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right)$ pour $h > 0$, $h \to 0$, et on définit d'une manière analogue les nombres dérivés à gauche Λ_g et λ_g. Des valeurs infinies sont admises [e] Une dérivée finie et déterminée existe en tout point x où les quatre

[d]. Ce lemme est connu sous le nom de « lemme du soleil levant », ou encore « vue sur la mer ».

[e]. Plus formellement on pose p la fonction pente, i.e. $p(x, y) = \dfrac{f(x) - (y)}{x - y}$. Pour $h > 0$ et x dans $[a; b]$ on note $P_d(x, h)$ l'ensemble des valeurs de $p(x, y)$ pour y vérifiant $x < y$ et $|y - x| < h$, et de même $P_g(x, h)$ en remplaçant $x < y$ par $y < x$; alors les ensembles $P_d(x, h)$ et $P_g(x, y)$ sont bornés par hypothèse si f est lipschitizienne, et on

nombres dérivés ont la même valeur finie. Pour démontrer le théorème de Lebesgue, on n'aura qu'à démontrer que l'on a presque partout

$$\Lambda_d < +\infty \qquad \Lambda_d \leq \lambda_g \ .$$

En effet, en appliquant la seconde inégalité à la fonction $x \mapsto -f(-x)$, il résulte que l'on a aussi p. p. $\Lambda_g \leq \lambda_d$, et en combinant le tout, on obtient

$$\Lambda_d \leq \lambda_g \leq \Lambda_g \leq \lambda_d \leq \Lambda_d < +\infty$$

donc ce sont précisément les signes d'égalité qui doivent être valables, ce qu'il fallait démontrer [f].
Pour verifier la première assertion, c'est-à-dire que l'ensemble E_∞ des points x pour lesquels $\Lambda_d = +\infty$, est de mesure nulle, observons que cet ensemble est compris dans l'ensemble E_C pour lequel $\Lambda_d > C$, C désignant une quantité choisie aussi grande qu'on voudra. Or la relation $\Lambda_d > C$ implique l'existence d'un $y > x$, tel que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} > C$, c'est-à-dire que $g(y) > g(x)$, où l'on a posé $g(x) = f(x) - Cx$. Donc, l'ensemble E_C est emboîté dans les intervalles $]a_k ; b_k[$ de notre théorème auxiliaire, et d'après ce théorème on a

$$f(b_k) - Cb_k \geq f(a_k) - Ca_k$$

c'est-à-dire que

$$C(b_k - a_k) \leq f(b_k) - f(a_k) \ .$$

Cela donne, par addition,

$$C \sum_k (b_k - a_k) \leq \sum \left[f(b_k) - f(a_k)\right] \leq f(b) - f(a) \,,$$

ce qui montre que, pour C suffisamment grand, la longueur totale des intervalles $]a_k ; b_k[$ sera aussi petite que l'on voudra. C'est-à-dire que l'ensemble E_∞ est de mesure nulle.
La seconde assertion se vérifie par un raisonnement analogue mais répeté alternativement sous deux formes différentes. Soit $c < C$ deux quantités positives. Formons d'abord la fonction $g(x) = -f(-x) + cx$ et soit Σ_1 le système des intervalles qui y correspondent par notre théorème auxiliaire ou plutôt celui de leurs symétriques par rapport à l'origine ; alors, pour des raisons analogues à celles de tout à l'heure, Σ_1 renfermera tous les x pour lesquels $\lambda_g < c$. Soit de plus Σ_2 le système formé des intervalles $]a_{k,\ell} ; b_{k,\ell}[$ qui correspondent à la fonction $g(x) = f(x) - Cx$, mais considérée séparément à l'intérieur de chaque intervalle $]a_k ; b_k[$. On aura alors pour ces intervalles

$$f(b_k) - f(a_k) \leq c(b_k - a_k) \quad \text{et} \quad C(b_{k,\ell} - a_{k,\ell}) \leq f(b_{k,\ell}) - f(a_{k,\ell})$$

---

peut considérer $\alpha_d(x, h)$ et $\beta_d(x, h)$ la borne inférieure et la borne supérieure de $P_d(x, h)$, et de même pour $\alpha_g(x, h)$ et $\beta_g(x, h)$ par rapport à $P_g(x, h)$. Si f n'est pas lipschitizienne, ce qui est le cas dans le théorème général, on admet des valeurs infinies. Alors, puisque les ensembles $P_d(x, h)$ et $P_g(x, h)$ croissent avec h, α est décroissant avec h et β est croissant avec h. Par monotonie on définit $\Lambda_d(x) = \lim_{0^+} \beta_d(x, h)$, $\lambda_d(x) = \lim_{0^+} \alpha_d(x, h)$, $\Lambda_g(x) = \lim_{0^+} \beta_g(x, h)$ et $\lambda_g(x) = \lim_{0^+} \alpha_g(x, h)$.

f. Dans le cas lipschitizien on n'a pas besoin de la partie $\Lambda < +\infty$ puisqu'elle est automatique. Dans le cas général on peut observer que, puisque F. Riesz a supposé f croissante, on a aussi $0 \leq \Lambda_d$, ce qui permet de conclure que les quatre valeurs sont bien finies, et identiques.

et il s'ensuit $C\Sigma_2 \leq V_2 \leq V_1 \leq \Sigma_1$, c'est-à-dire que

$$\Sigma_2 \leq \frac{c}{C}\Sigma_1$$

où l'on a désigné par Σ_1, Σ_2 la longueur totale des deux systèmes d'intervalles et par V_1, V_2 les sommes des variations respectives de la fonction f. En répétant les deux procédés alternativernent, on obtiendra une suite Σ_1, Σ_2, ... de systèmes d'intervalles, chacun emboîté dans les précédents et l'on aura d'une façon générale

$$\Sigma_{2n} \leq \frac{c}{C}\Sigma_{2n-1} .$$

Il s'ensuit

$$\Sigma_{2n} \leq \left(\frac{c}{C}\right)^n \Sigma_1 \to 0 .$$

Or, les points x pour lesquels on a simultanément $\Lambda_d > C$ et $\lambda_g < c$, sont évidemment compris dans tous les systèmes Σ_n ; c'est-à-dire qu'ils forment un ensemble $E_{c,C}$ de mesure nulle. Enfin, chaque point x tel que $\Lambda_d > \lambda_g$ appartient à de tels ensembles, et l'on peut même supposer que c et C sont des nombres rationnels, pour la seule raison que, entre deux nombres réels différents, on peut toujours intercaler deux nombres rationnels. C'est-à-dire que, en formant les ensembles $E_{c,C}$ pour tous les couples rationnels, leur reunion E^* contiendra tous les x pour lesquels $\Lambda_d > \lambda_g$. Mais d'autre part, il n'y a qu'une infinité dénombrable de couples rationnels ; donc l'ensemble E^* est la réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles de mesure nulle et par consequent E^* et, à plus forte raison, l'ensemble envisagé qui y est compris, seront eux-mêmes de mesure nulle.
Ainsi le théorème est démontré dans le cas où la fonction monotone f est continue.