Deuxième composition
CCP 2002 – MP

Introduction

Dans tout ce problème, les espaces vectoriels seront des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. On appelle algèbre tout $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{A}$ qui est muni d'une opération interne nommée multiplication ou produit. Cette multiplication est associative, et vérifie la propriété de distributivité :

$$\forall a \in \mathbf{A}, \forall b \in \mathbf{A}, \forall c \in \mathbf{A}, \quad a(b+c) = ab + ac, \quad (b+c)a = ba + ca$$

ainsi que :

$$\forall a \in \mathbf{A}, \forall b \in \mathbf{A}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \quad a(\lambda b) = (\lambda a)b = \lambda(ab) \ .$$

On suppose de plus qu'il existe un élément noté 1 ou 1_A et appelé élément neutre pour le produit, tel que :

$$\forall a \in \mathbf{A}, a1 = 1a = a \ .$$

Enfin si cette multiplication est commutative, l'algèbre est dite commutative. La dimension d'une algèbre est sa dimension en tant qu'espace vectoriel. Une sous-algèbre de $\mathbf{A}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbf{A}$ qui est lui-même une algèbre (pour les mêmes opérations) et qui possède le même élément neutre que $\mathbf{A}$. Pour que $\mathbf{B}$ soit une sous-algèbre de $\mathbf{A}$, il suffit que ce soit un sous-espace vectoriel de $\mathbf{A}$, qu'il contienne 1 et que :

$$\forall b \in \mathbf{B}, \forall b' \in \mathbf{B}, bb' \in \mathbf{B} \ .$$

On appelle morphisme d'algèbre entre deux algèbres $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, toute application linéaire f de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ qui vérifie en plus :

$$\forall a \in \mathbf{A}, \forall a' \in \mathbf{A}, f(aa') = f(a)f(a') \text{ et } f(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\mathbf{B}} \ .$$

Un morphisme d'algèbre qui est une bijection est appelé isomorphisme d'algèbre. On vérifie alors que son application réciproque est également un morphisme d'algèbre. On dira que deux algèbres sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'algèbre entre les deux. Dans tout le problème, n désigne un entier strictement positif. Dans ce cas, $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels ; c'est une algèbre pour les opérations habituelles. L'élément neutre pour le produit est la matrice de l'identité, notée I_n. La trace d'une matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est :

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \ .$$

C'est la somme des éléments diagonaux de la matrice A. Une matrice scalaire est une matrice de la forme λI_n, où λ est un réel. Une matrice diagonale est une matrice dont les éléments non diagonaux sont tous nuls. L'ensemble des matrices scalaires et l'ensemble des matrices diagonales forment chacun une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
Ce problème étudie certaines propriétés des algèbres, et, en particulier, s'intéresse aux algèbres qui sont des corps, c'est-à-dire dans lesquelles tout élément non nul admet un inverse pour le produit.

PARTIE I - Étude d'un exemple

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. Vérifier :

$$A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0\ .$$

2. Soit A une matrice non scalaire ; on note $\mathbf{A}$ l'ensemble

$$\mathbf{A} = \left\{ M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \;\middle|\; \exists (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ M = aI_2 + bA \right\}\ .$$

   Vérifier que $\mathbf{A}$ est une algèbre de dimension 2, sous-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

3. Montrer que $\mathbf{A}$ contient une matrice B telle que $B^2 = -I_2$ si, et seulement si, $(\mathrm{Tr}\,A)^2 < 4\det(A)$.
4. Vérifier qu'alors I_2 et B forment une base de $\mathbf{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbre entre A et le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes.
5. On suppose que A est non scalaire et vérifie : $(\mathrm{Tr}\,A)^2 = 4\det(A)$. Déterminer toutes les matrices de $\mathbf{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbf{A}$ n'est pas un corps.
6. Soit B une matrice non scalaire de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbf{B}$ comme dans I.2. Démontrer que si A et B sont semblables, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des algèbres isomorphes.
7. On suppose que A est telle que : $(\mathrm{Tr}\,A)^2 > 4\det(A)$. Vérifier que A est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbf{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbf{A}$ est un corps ?

PARTIE II - Quelques résultats généraux

Soit $\mathbf{D}$ une algèbre de dimension finie n.

1. Soit a un élément de $\mathbf{D}$, démontrer que l'application φ_a de $\mathbf{D}$ dans lui-même définie par $\varphi_a(x) = ax$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{D}$.
2. On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{D}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$ la matrice de l'endomorphisme φ_a, dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que l'application de $\mathbf{D}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $\Psi(a) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$ est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbf{D})$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et en déduire que $\mathbf{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
3. On suppose $\mathbf{D} = \mathbf{C}$, où $\mathbf{C}$ est le corps des nombres complexes. On munit $\mathbf{C}$, considéré comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, (a et b réels), écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z)$.
4. Soit maintenant $\mathbf{A}$ une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbf{A}$ est, ou n'est pas, un corps.
   (a) On suppose que $\mathbf{A}$ contient une matrice non scalaire A qui a une valeur propre réelle λ. Montrer que $\mathbf{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de I_n et de A.
   (b) En déduire que si $\mathbf{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.

(c) On suppose que $\mathbf{A}$ est intègre, c'est-à-dire :

$$\forall A \in \mathbf{A}, \forall B \in \mathbf{A}, AB = 0 \Longrightarrow (A = 0 \text{ ou } B = 0) \ .$$

Montrer que, si A est une matrice non nulle de $\mathbf{A}$, l'application $\Phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{A}$. En déduire que $\mathbf{A}$ est un corps.

PARTIE III - L'algèbre des quaternions

On suppose qu'il existe deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles que :

$$(*) \qquad A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad AB + BA = O$$

1. Démontrer que n ne peut pas être impair.
2. Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbf{H}$ engendré par les matrices I_n, A, B et AB est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.
3. Lorsque t, x, y et z sont des réels, calculer le produit :

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) \ .$$

4. En déduire :

(a) que les quatre matrices I_n, A, B et AB sont indépendantes et forment une base de $\mathbf{H}$;

(b) que $\mathbf{H}$ est un corps.

5. On suppose dans toute la suite du problème qu'on a $n = 4$ et, en notant J la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et 0 la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$, on définit les matrices A et B de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ par :

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

On pose également $C = AB$.

(a) Vérifier que les matrices A et B satisfont la condition $(*)$. On appellera donc $\mathbf{H}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ engendré par I_4, A, B et $C = AB$. Ses éléments sont appelés **quaternions**. La base (I_4, A, B, C) de $\mathbf{H}$ sera notée $\mathcal{B}$.

(b) Soit M une matrice non nulle de $\mathbf{H}$, vérifier que ${}^{\mathrm{t}}M \in \mathbf{H}$; quel lien y a t-il entre M^{-1} et ${}^{\mathrm{t}}M$?

PARTIE IV - Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. On appelle quaternion pur un élément M de $\mathbf{H}$ tel que $M = -\,{}^{\mathrm{t}}M$. Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$. On le note $\mathbf{L}$. Est-ce une sous-algèbre de $\mathbf{H}$?

2. On munit $\mathbf{L}$ de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base $\mathcal{C}$ soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments M et N de $\mathbf{L}$ est noté $\langle M \mid N \rangle$, la norme de M s'écrit $\|M\|$. Vérifier :
$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -\langle M \mid N \rangle \, I_4 \, .$$
3. Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme λI_4 où λ est un réel négatif.
4. Soit φ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbf{H}$ dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de φ à $\mathbf{L}$ est un endomorphisme orthogonal.
5. Soit M et N deux quaternions purs. On veut démontrer que si M et N ont même norme, alors il existe P dans $\mathbf{H}$, non nulle, telle que : $M = PNP^{-1}$.
   (a) Commencer par examiner le cas où M et N sont colinéaires.
   (b) On suppose maintenant que M et N ne sont pas colinéaires. Vérifier que si M et N ont même norme
   $$M(MN) - (MN)N = \|M\|^2 (M - N)$$
   et en déduire une matrice P non nulle telle que $MP = PN$.
6. Montrer qu'alors, si on écrit $P = \alpha I_4 + Q$, avec α réel et $Q \in \mathbf{L}$, Q est orthogonal à M et à N.
7. En déduire que tout isomorphisme d'algèbre φ de $\mathbf{H}$ dans lui-même est défini par :
$$\varphi(M) = P^{-1}MP$$
où P est un élément non nul de $\mathbf{H}$. On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de A et de B, et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent A invariante.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CCP 2002 – MP

PARTIE I - Étude d'un exemple

1. Le polynôme caractéristique de A est égal à $X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$ et donc, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\boxed{A^2 - \mathrm{Tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0.}$

2. Par définition $\mathbf{A}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ engendré par I_2 et A. De plus $\mathbf{A}$ est stable pour le produit car, avec $(a, b, a', b') \in \mathbf{R}^4$, on a :

$$(aI_2 + bA)(a'I_2 + b'A) = (aa' - bb' \det(A))I_2 + (ab' + a'b + bb' \,\mathrm{Tr}(A))A$$

et donc $\boxed{\mathbf{A} \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R}).}$

Comme A n'est pas une matrice scalaire, (I_2, A) est une famille libre et forme une base de $\mathbf{A}$. Par conséquent $\boxed{\mathbf{A} \text{ est une algèbre de dimension 2.}}$

3. Soit B dans $\mathbf{A}$. Si B est scalaire, B^2 aussi mais est alors un multiple positif de l'identité. Sinon, d'après I.1 et par indépendance de I_2 et B, l'équation $B^2 = -I_2$ équivaut à $\mathrm{Tr}(B) = 0$ et $\det(B) = 1$. Puisque $\mathrm{Tr}(I_2) = 2$, la condition $\mathrm{Tr}(B) = 0$ équivaut à ce que B soit multiple de $\mathrm{Tr}(A)I_2 - 2A$. Comme le déterminant est 2-linéaire, il existe un tel multiple de déterminant 1 si et seulement si le déterminant de $\mathrm{Tr}(A)I_2 - 2A$ est strictement positif. Or ce déterminant est égal à $4\chi_A(\mathrm{Tr}(A)/2)$, i.e. $-\mathrm{Tr}(A)^2 + 4\det(A)$. Donc $\boxed{\mathbf{A} \text{ contient une matrice de carré } -I_2 \text{ si et seulement si } \mathrm{Tr}(A)^2 < 4\det(A).}$

4. Soit B dans $\mathbf{A}$ telle que $B^2 = -I_2$. Alors B n'est pas une matrice scalaire (car sinon son carré est une matrice scalaire à diagonale positive) et donc (I_2, B) est une famille libre de $\mathbf{A}$. Par cardinalité, $\boxed{(I_2, B) \text{ est une base de } \mathbf{A}}$.

   Soit alors f dans $\mathscr{L}(\mathbf{A}, \mathbf{C})$, application linéaire entre $\mathbf{R}$-espaces vectoriels, définie par $f(I_2) = 1$ et $f(B) = i$. Comme $(1, i)$ est une base de $\mathbf{C}$, f est un isomorphisme de $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Comme elle préserve le produit des éléments de la base, car $f(B^2) = f(-I_2) = -1 = i^2$, c'est aussi un morphisme d'anneaux, i.e. $\boxed{f \text{ est un isomorphisme d'algèbres entre } \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{C}.}$

5. Les arguments de la question I.3 s'appliquent et donc une matrice M de $\mathbf{A}$ vérifie $M^2 = 0$ si et seulement si M est scalaire et donc nulle, ou alors non scalaire et vérifie $\mathrm{Tr}(M) = \det(M) = 0$. Autrement dit $M^2 = 0$ équivaut à $\mathrm{Tr}(M) = \det(M) = 0$, que M soit scalaire ou non. Les calculs de I.3 montrent que cette condition équivaut à ce que M soit un multiple de $\mathrm{Tr}(A)I_2 - 2A$ et que cette matrice ait un déterminant nul. Par hypothèse ce déterminant étant nul, il vient donc $\boxed{M^2 = 0 \text{ si et seulement si } M \text{ appartient à } \mathbf{R}(\mathrm{Tr}(A)I_2 - 2A).}$

   Comme $\mathbf{A}$ contient des matrices non nulles de carré nul, donc des diviseurs de 0, $\boxed{\mathbf{A} \text{ n'est pas un corps.}}$

6. Soit P dans $\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ tel que $B = P^{-1}AP$. Comme B n'est pas scalaire, A ne l'est pas non plus et donc (I_2, A) et(I_2, B) sont des bases respectives de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Soit alors g dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbf{R}), \mathscr{M}_2(\mathbf{R}))$ l'automorphisme intérieur donné par $g(M) = P^{-1}MP$. C'est un automorphisme d'algèbres et, puisque $g(I_2) = I_2$ et $g(A) = B$, la restriction $g_{|\mathbf{A}}$ de g à $\mathbf{A}$ induit un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Par suite $\boxed{\mathbf{A} \text{ et } \mathbf{B} \text{ sont deux algèbres isomorphes.}}$

7. Comme $\mathrm{Tr}(A)^2 - 4\det(A)$ est le discriminant du polynôme caractéristique de A, ce dernier admet deux racines réelles distinctes et est donc simplement scindé sur $\mathbf{R}$. Il en résulte que $\boxed{A \text{ est diagonalisable, à valeurs propres distinctes.}}$

   Soit alors B une matrice diagonale semblable à A et $\mathbf{B} = \mathrm{V}ect\,(I_2, B)$. D'après ce qui précède, $\mathbf{A}$ est isomorphe à $\mathbf{B}$. Or $\mathbf{B}$ est formé de matrices diagonales et l'ensemble $\mathcal{D}_2(\mathbf{R})$ des matrices diagonales est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ de dimension 2. Par égalité de dimension, il vient $\mathbf{B} = \mathcal{D}_2(\mathbf{R})$ et $\boxed{\mathbf{A} \text{ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales.}}$

   Autrement dit $\mathbf{A}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbf{R}^2$ pour le produit canonique et n'est donc pas intègre. Par conséquent $\boxed{\mathbf{A} \text{ n'est pas un corps.}}$

PARTIE II - Quelques résultats généraux

1. Par définition d'une algèbre, l'application $(x, y) \mapsto xy$ de $\mathbf{D}^2$ dans $\mathbf{D}$ est bilinéaire. L'application partielle $\boxed{\varphi_a \text{ est donc linéaire.}}$
2. Par bilinéarité du produit, l'application $a \mapsto \varphi_a$ de $\mathbf{D}$ dans $\mathrm{End}(\mathbf{D})$ est linéaire. Comme $1_{\mathbf{D}}$ est élément neutre pour la multiplication, on a $\varphi_{1_{\mathbf{D}}} = \mathrm{Id}_{\mathbf{D}}$. Comme la multiplication est associative, $a \mapsto \varphi_a$ est compatible au produit et donc est en fait un morphisme d'algèbres entre $\mathbf{D}$ et $\mathrm{End}(\mathbf{D})$.

   Or $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}u$ est un isomorphisme d'algèbres entre $\mathrm{End}(\mathbf{D})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Par composition, il en résulte que Ψ est un morphisme d'algèbres. Par ailleurs si a appartient à $\mathrm{Ker}(\Psi)$, par bijectivité de $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}u$, on a $\varphi_a = 0$ et donc $0 = \varphi_a(1_{\mathbf{D}}) = a$ et donc

   $\boxed{\Psi \text{ est un morphisme d'algèbres injectif.}}$

   Comme Ψ est un morphisme d'algèbres, $\boxed{\Psi(\mathbf{D}) \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

   De plus Ψ induit, par co-restriction, un isomorphisme de $\mathbf{D}$ sur $\Psi(\mathbf{D})$:

   $\boxed{\mathbf{D} \text{ est isomorphe à une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$

3. On a $\varphi_z(1) = a + ib$ et $\varphi_z(i) = -b + ia$, d'où $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.}$

4(a) Soit λ une valeur propre réelle de A. Comme I_2 appartient à $\mathbf{A}$, $A - \lambda I_2$ également puisque $\mathbf{A}$ est stable par combinaisons linéaires. Or $A - \lambda I_2$ n'est pas inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$. A fortiori, elle n'est donc pas inversible dans $\mathbf{A}$. Comme A n'est pas scalaire, $A - \lambda I_2$ est un élément non nul de $\mathbf{A}$ qui n'est pas inversible et donc $\boxed{\mathbf{A} \text{ n'est pas un corps.}}$

(b) Une matrice dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ est trigonalisable ou diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé, et par conséquent elle admet une valeur propre réelle. D'après ce qui précède :

$\boxed{\text{si } \mathbf{A} \text{ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, } \mathbf{A} \text{ n'est pas un corps.}}$

(c) Soit A dans $\mathbf{A}$ non nul. Puisque $\mathbf{A}$ est intègre, $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{0\}$ et donc φ_A est un automorphisme de $\mathbf{A}$. En particulier, on peut trouver B dans $\mathbf{A}$ tel que $\varphi_A(B) = I_2$, i.e. A est inversible dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et admet B comme inverse. Il en résulte $AB = BA = I_2$. Tout élément non nul de $\mathbf{A}$ possède donc un inverse dans $\mathbf{A}$, i.e. $\boxed{\mathbf{A} \text{ est un corps.}}$

PARTIE III - L'algèbre des quaternions

1. Comme $A^2 = -I_n$, on a $0 \leq \det(A)^2 = (-1)^n$ et donc $\boxed{n \text{ est pair.}}$
2. Par définition $\mathbf{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ contenant I_n. C'est donc une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ si et seulement les produits d'éléments d'une base appartiennent à $\mathbf{H}$. Autrement dit si et seulement si A^2, $A(AB)$, BA, $B(AB)$, $(AB)A$, $(AB)B$ et $(AB)^2$ appartiennent à $\mathbf{H}$. Or ces matrices sont respectivement, par associativité du produit matriciel, $-I_n$, $-B$, $-BA$, $(BA)B$ i.e. $-AB^2$ ou encore A, $-A^2B$ i.e. B, $-A$ et $((AB)A)B$ i.e. B^2 soit encore $-I_2$. Donc $\boxed{\mathbf{H} \text{ est une sous-algèbre de } \mathscr{M}_n(\mathbf{R}).}$
3. D'après ce qui précède, il vient directement
$$\boxed{(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB) = \left(t^2 + x^2 + y^2 + z^2\right) I_n.}$$

4(a) Soit (t, x, y, z) dans $\mathbf{R}^4$ tel que $tI_n + xA + yB + zAB = 0$. Alors, d'après ce qui précède, $(t^2 + x^2 + y^2 + z^2)I_n = 0$ et donc $t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Il en résulte $t = x = y = z = 0$ et donc $\boxed{\text{la famille } (I_n, A, B, AB) \text{ est donc libre.}}$

(b) Soit M dans $\mathbf{H}$ non nul et (t, x, y, z) dans $\mathbf{R}^4$ non tous nuls tels que $M = tI_n + xA + yB + zAB$. D'après ce qui précède, l'inverse de M est $\dfrac{1}{t^2 + x^2 + y^2 + z^2}(tI_n - xA - yB - zAB)$ et appartient donc à $\mathbf{H}$. Par conséquent $\boxed{\mathbf{H} \text{ est un corps.}}$

5(a) Comme $J^2 = -I_2$, il vient
$$\boxed{A^2 = \begin{pmatrix} J^2 & 0 \\ 0 & J^2 \end{pmatrix} = -I_4, , \quad B^2 = \begin{pmatrix} -I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} = -I_4 \quad \text{et} \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & -J \\ -J & 0 \end{pmatrix} = -BA.}$$

(b) Comme ${}^{\mathrm{t}}A = -A$, ${}^{\mathrm{t}}B = -B$ et ${}^{\mathrm{t}}C = -C$, l'identité de la question III.3 s'écrit $M\,{}^{\mathrm{t}}M = \lambda I_4$ pour un certain réel positif λ. Or, en prenant le déterminant de ces matrices, il vient $\det(M)^2 = \lambda^4$ et donc $\lambda = \sqrt{|\det(M)|}$, i.e. $\boxed{{}^{\mathrm{t}}M = \sqrt{|\det(M)|}M^{-1}.}$

PARTIE IV - Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

1. D'après III.5.b, la transposée est un automorphisme τ de $\mathbf{H}$ dont la matrice est diagonale dans la base $\mathcal{B}$, de diagonale $(1, -1, -1, -1)$. Il en résulte que l'ensemble des quaternions purs est le noyau de $\tau + \mathrm{Id}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}$. Une base est donnée, puisque τ est diagonale, par les vecteurs de $\mathcal{B}$ qui sont propres pour τ et associés à la valeur propre -1, i.e.

   $\boxed{\text{l'ensemble des quaternions purs est un sous-espace vectoriel de dimension 3 et admet pour base } \mathcal{C}.}$

   Par ailleurs comme $A^2 = -I_4$ et $I_4 \notin \mathbf{L}$, $\boxed{\mathbf{L} \text{ n'est pas une sous-algèbre de } \mathbf{H}.}$
2. Comme le produit est bilinéaire, il suffit de vérifier l'identité demandée sur une base. Or, pour M dans $\mathbf{L}$, on a ${}^{\mathrm{t}}M = -M$ et donc pour M et N dans $\mathbf{L}$, on a $NM = {}^{\mathrm{t}}N\,{}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}(MN)$, de sorte que $MN + NM = MN + {}^{\mathrm{t}}(MN)$. Or le produit de deux éléments de $\mathcal{C}$ distincts en est un, au signe près, et donc est l'opposé de sa transposée. Par contre chaque élément de $\mathcal{C}$ est de carré

$-I_4$, donc égal à sa transposée. Il en résulte, pour M et N dans $\mathcal{C}$, $MN+NM=\delta_{M,N}(-2I_4)$ i.e. $\frac{1}{2}(MN+NM)=-\delta_{M,N}I_4$, ce qui est bien la formule attendue. Par bilinéarité, il en résulte qu'on a, $\boxed{\text{pour } M \text{ et } N \text{ quaternions purs, } \frac{1}{2}(MN+NM)=-\langle M\,|\,N\rangle\, I_4.}$

3. On a $\mathbf{H}=\mathbf{R}I_4\oplus\mathbf{L}$. Soit alors X dans $\mathbf{H}$; on écrit $X=\alpha I_4+M$ avec α réel et M quaternion pur. On a alors $X^2=\alpha^2I_4+2\alpha M+M^2=(\alpha^2-\|M\|^2)I_4+2\alpha M$. Puisque la somme $\mathbf{R}I_4\oplus\mathbf{L}$ est directe, on a $X^2\in\mathbf{R}I_4$ si et seulement si $\alpha M=0$, i.e. $\alpha=0$ ou $M=0$. Dans le premier cas, $X^2=\alpha^2I_4$ et donc $X^2\in\mathbf{R}_-I_4$ si et seulement si $\alpha=0$, i.e. $X=0$. Dans le second cas, $X^2=-\|M\|^2 I_4$ et donc X^2 appartient à $\mathbf{R}_-I_4$. Il en résulte que, $\boxed{\text{pour } M \text{ dans } \mathbf{H},\ M^2\in\mathbf{R}_-I_4\Leftrightarrow M\in\mathbf{L}.}$

4. Puisque $\varphi(I_4)=I_4$ et que φ est linéaire, on en déduit que φ est l'identité sur $\mathbf{R}I_4$. Il en résulte, pour M dans $\mathbf{L}$, $\varphi(M)^2=\varphi\left(M^2\right)=\varphi(-\|M\|^2 I_4)=-\|M\|^2 I_4$. D'après ce qui précède $\varphi(M)\in\mathbf{L}$ et $-\|\varphi(M)\|^2=-\|M\|^2$. Puisque φ préserve la norme sur $\mathbf{L}$, il préserve aussi le produit scalaire et donc

$\boxed{\varphi \text{ transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme et l'endomorphisme induit par } \varphi \text{ sur } \mathbf{L} \text{ est un endomorphisme orthogonal de } \mathbf{L}.}$

5(a) Remarquons que, pour P dans $\mathbf{H}$ non nulle, P est inversible et $M=PNP^{-1}$ si et seulement si $MP=PN$. Si $M=N$, une telle matrice P est donnée par I_4. Par ailleurs, pour P dans $\mathbf{L}$, on a $MP+PM=0$ si et seulement si $\langle M\,|\,P\rangle=0$. Comme $\mathbf{L}$ est de dimension 3, une telle matrice non nulle P de $\mathbf{L}$ existe et on a alors : $MP=P(-M)$. Comme les matrices co-linéaires à M et de même norme sont M et $-M$, il en résulte que $\boxed{\text{si } M \text{ et } N \text{ sont colinéaires, elles sont conjuguées dans } \mathbf{H}.}$

(b) On a $\boxed{M(MN)-(MN)N=M^2N-MN^2=-\|M\|^2 N+\|N\|^2 M=\|M\|^2(M-N).}$

Donc, en posant $P=MN-\|M\|^2 I_4$, il vient $MP=PN$ et $P=M(N-M)$. Ainsi P est non nulle puisque M et $N-M$ sont deux éléments non nuls de $\mathbf{H}$ (car (M,N) est libre) et que $\mathbf{H}$ est un corps. $\boxed{\text{Si } M \text{ et } N \text{ sont indépendantes, elles sont conjuguées dans } \mathbf{H}.}$

6. D'après ce qui précède, on peut choisir P égale soit à I_4 et donc $Q=0$, soit à un quaternion pur orthogonal à M et donc aussi à N (car alors $N=-M$), soit à $-\|M\|^2 I_4+MN$. Dans les deux premiers cas, on a $\langle Q\,|\,M\rangle=\langle Q\,|\,N\rangle=0$. Dans le dernier cas il vient $Q=\frac{1}{2}(P-{}^{\mathrm{t}}P)$ et donc $Q=\frac{1}{2}(MN-NM)$, d'où $-4\langle Q\,|\,M\rangle I_4=(MN-NM)M+M(MN-NM)=-NM^2+M^2N=\|M\|^2(N-N)=0$ et $-4\langle Q\,|\,N\rangle I_4=(MN-NM)N+N(MN-NM)=\|N\|^2(M-M)=0$, i.e. $\boxed{Q \text{ est orthogonal à } M \text{ et } N.}$

7. Pour P dans $\mathbf{H}$ non nul, l'automorphisme intérieur i_P défini par $i_P(M)=P^{-1}MP$ est un automorphisme d'algèbre.

Soit φ un automorphisme de l'algèbre $\mathbf{H}$. D'après IV.4 $\varphi(A)$ est un quaternion pur de même norme que A. D'après IV.6, on peut donc trouver P_1 dans $\mathbf{H}$, non nul, tel que $i_{P_1}(\varphi(A))=A$, i.e. $i_{P_1}\circ\varphi$ est un automorphisme de l'algèbre $\mathbf{H}$ fixant A.

L'image M de B par $i_{P_1}\circ\varphi$ est également un quaternion pur de même norme que B, d'après

IV.4. Comme $\langle A \mid B\rangle = 0$ et que $i_{P_1} \circ \varphi$ est un endomorphisme orthogonal de **L**, encore d'après IV.4, M est orthogonal à l'image de A par $i_{P_1} \circ \varphi$, i.e. $\langle A \mid M\rangle = 0$.

Soit alors P_2 comme construit en IV.6 tel que $i_{P_2}(M) = B$ avec $P_2 = \alpha I_4 + Q$ pour α réel et Q dans **L** orthogonal à B et M. Si $M = -B$, alors on peut prendre $P_2 = A$ d'après la démonstration de IV.5.a. Si M et B sont indépendantes, elles engendrent un plan et donc leur orthogonal, dans **L**, est une droite. C'est donc la droite engendrée par A et donc Q est un multiple de A. Enfin si $M = B$, on peut prendre $P_2 = I_4$, de sorte que dans tous les cas on peut prendre P_2 dans $\mathrm{V}ect\,(I_4, A)$. Comme A commute aux éléments de cet espace vectoriel, on a $i_{P_2}(A) = A$ et donc $i_{P_2} \circ i_{P_1} \circ \varphi$ est un automorphisme de l'algèbre **H** qui fixe A et B. Il fixe alors C puisque $C = AB$ et aussi I_4 par définition d'un automorphisme d'algèbre, et c'est donc l'identité, par linéarité.

Par conséquent $\varphi = i_{P_1}^{-1} \circ i_{P_2}^{-1}$ et donc, en posant $P = P_2^{-1} P_1^{-1}$, il vient $\varphi = i_P$, i.e.

$\boxed{\text{pour tout } M \text{ de } \mathbf{H},\ \varphi(M) = P^{-1}MP.}$