ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CONCOURS D'ADMISSION 1985

OPTION M'

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES (4 heures)

♦

Dans tout le problème, $\mathscr{E}$ est un espace vectoriel *réel* de dimension finie $n \geqslant 2$. Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de $\mathscr{E}$, on note AB le composé $A \circ B$. Pour tout entier $i \geqslant 0$, A^i est l'endomorphisme de $\mathscr{E}$ défini par récurrence par $A^{i+1} = A^i A$ avec $A^0 = I$, automorphisme identique de $\mathscr{E}$; pour tout polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i X^i$ d'une variable, à coefficients réels, $P(A)$ désigne l'endomorphisme $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A^i$.
L'image et le noyau de A sont respectivement notés $\operatorname{Im} A$ et $\operatorname{Ker} A$. Si $\mathscr{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ tel que $\mathscr{F}$ contienne l'image $A(\mathscr{F})$ qu'en donne A, on dit que $\mathscr{F}$ est *stable* par A. Enfin, s'il existe un entier $q > 0$ tel que $A^q = 0$, on dit que A est *nilpotent* et le plus petit de ces entiers q s'appelle *indice de nilpoence* de A.

I

Dans toute cette partie, L est un endomorphisme nilpotent de $\mathscr{E}$ et on note p son indice de nilpotence.

1. ***a.*** Soit i un entier positif ou nul. Montrer que l'égalité $\operatorname{Ker} L^i = \operatorname{Ker} L^{i+1}$ équivaut à l'égalité $\operatorname{Im} L^i = \operatorname{Im} L^{i+1}$ et qu'elle entraîne $\operatorname{Im} L^j = \operatorname{Im} L^i$ pour tout $j \geqslant i$.

b. Montrer que si $\operatorname{Ker} L^i$ est différent de $\mathscr{E}$, alors il est aussi différent de $\operatorname{Ker} L^{i+1}$.

c. Montrer que la dimension du noyau de L^i croît strictement avec l'exposant i sur l'ensemble des entiers de l'intervalle $[0, p]$. En déduire que $L^n = 0$, et que, si $p = n$, la dimension du noyau de L^i est égale à i pour tout entier i de l'intervalle $[0, n]$.

2. Dans cette question, on suppose qu'il existe un entier h de l'intervalle $[1, n-1]$ tel que L^h soit de rang $n - h$.

a. Établir que pour tout entier j de $[1, h]$, le rang de L^j est $n - j$.

b. Pour tout entier $i \geqslant 0$, établir une relation entre les dimensions des sous-espaces $\operatorname{Im} L^i$, $\operatorname{Im} L^{i+1}$ et $\operatorname{Im} L^i \cap \operatorname{Ker} L$.

c. Quel est l'indice de nilpotence de L ?

3. Dans cette question, on suppose le rang de L égal à $n - 1$.

a. Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ stable par L et de dimension $r \geqslant 1$; on note M la restriction de L à $\mathscr{F}$.
Montrer que pour tout entier j de $[1, r]$, les noyaux de L^j et de M^j sont égaux. Quel est le noyau de L^r ?

b. Caractériser les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{E}$ stables par L à l'aide des noyaux des endomorphismes L^i.

4. Dans cette question, on suppose que l'indice de nilpotence p de L est *strictement* compris entre 1 et n et on note e un élément de $\mathscr{E}$ tel que $L^{p-1}(e) \neq 0$.

a. Établir que la famille $(e, L(e), \cdots, L^{p-1}(e))$ est libre ; on note $\mathscr{G}$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ qu'elle engendre.

b. Soient e' un élément du dual $\mathscr{E}^*$ de $\mathscr{E}$, non orthogonal à $L^{p-1}(e)$, et ${}^tL$ l'endomorphisme de $\mathscr{E}^*$ transposé de L. Vérifier pour tout entier $i \geqslant 0$ l'égalité des endomorphismes ${}^t(L^i)$ et ${}^tL^i$, qu'on notera désormais ${}^tL^i$. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathscr{H}^*$ de $\mathscr{E}^*$ engendré par les ${}^tL^i(e')$ quand i parcourt l'ensemble des entiers positifs ou nul ? Quelle est la dimension du sous-espace $\mathscr{H}$ de $\mathscr{E}$ constitué des éléments de $\mathscr{E}$ orthogonaux à tous les éléments de $\mathscr{H}^*$?

c. Montrer que $\mathscr{H}$ est stable par L et que $\mathscr{E}$ est la somme directe de $\mathscr{G}$ et de $\mathscr{H}$.

d. Montrer que $\mathscr{E}$ est la somme directe de s sous-espaces vectoriels $\mathscr{E}_\ell$, $(\ell = 1, \ldots, s)$ dont chacun est stable par L et a pour dimension l'indice de nilpotence de la restriction de L à ce même sous-espace.

II

Dans toute la suite du problème, pour tout couple (A, B) d'endomorphisme de $\mathscr{E}$, on note $[A, B]$ l'endomorphisme $AB - BA$.

Dans cette partie II, A et B sont des endomorphismes *non nuls* de $\mathscr{E}$ et α un réel *non nul* tels que

$$[A, B] = \alpha B.$$

1. **a.** Pour tout triplet (U, V, W) d'endomorphismes de $\mathscr{E}$, vérifier l'égalité

$$[U, VW] = [U, V]\, W + V\, [U, W].$$

b. Soient P un polynôme d'une variable à coefficients réels et P' son polynôme dérivé. Établir l'égalité

$$[A, P(B)] = \alpha B P'(B)$$

et en déduire que, pour tout entier $k \geqslant 0$, $\operatorname{Ker} B^k$ est stable par A.

c. Établir l'existence d'un polynôme P non nul tel que $P(B) = 0$ et montrer que B est nilpotent (on pourra utiliser l'endomorphisme $dP_n(B) - BP_n'(B)$ où P_n est un polynôme non nul de degré minimal d tel que $P_n(B) = 0$).

2. Dans cette question, on suppose que le rang de B est $n - 1$.

a. Quel est le rang de B^{n-1} ? Comment peut-on choisir x dans $\mathscr{E}$ de façon qu'en posant $x_k = B^{n-k}(x)$ pour tout entier k de $[1, n]$, la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ soit, pour tout k, une base de $\operatorname{Ker} B^k$?

b. Montre que x_1 est un vecteur propre de A, dont on notera λ la valeur propre associée. Quelle est la forme de la matrice de A relative à la base $(x_1, \ldots, x_n)$? En déduire en particulier que $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A.

c. Montrer que si x est un vecteur propre de A, associé à la valeur μ, $B(x)$ est un vecteur nul ou un vecteur propre de A, dont on précisera la valeur propre associée.

d. Soit e_n un vecteur de A associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$; pour tout entier k de $[1, n]$, on pose $e_k = B^{n-k}(e_n)$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de $\mathscr{E}$ dans laquelle A se diagonalise et rappeler les expression des matrices de A et B relatives à cette base.

III

Dans cette partie, A, B, C sont trois endomorphismes *non nuls* de $\mathscr{E}$ et α et β deux réels *non nuls* tels que

$$[A, B] = \alpha B,\ [A, C] = \beta C,\ [B, C] = A.$$

1. Calculer la valeur de $(\alpha + \beta)\, [B, C]$ et en déduire que α et β sont nécessairement opposés.

2. Dans cette question, on suppose que le rang de B est $n - 1$.

a. Trouver numériquement la somme des valeurs propres de A et en déduire ces valeurs propres. Quel est, en fonction de n, le rang de A ?

b. Calculer explicitement la matrice de C relative à la base de $\mathscr{E}$ définie dans la question **II.2.d** et vérifier que les endomorphismes A, B, C ainsi déterminés par leurs matrices satisfont aux conditions imposées au début de cette partie **III**. Quel est le rang de C ?

c. Montrer que $\{0\}$ et $\mathscr{E}$ sont les seuls sous-espaces de $\mathscr{E}$ stables à la fois par A, B et C.

3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 2$ et que $\{0\}$ et $\mathscr{E}$ sont les seuls sous-espaces de $\mathscr{E}$ stables à la fois par A, B et C ; aucune hypothèse n'est faite sur le rang de B.

a. Pour tout entier $i \geqslant 1$, établir l'égalité

$$[B, C] = iC^{i-1}\,(A - (i-1)I)$$

et en déduire l'existence d'une valeur propre de A.

b. Montrer que A est diagonalisable et que B est de rang $n - 1$.
