Composition B
X 2021 – MP

Dans tout le sujet, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ désigne un espace probabilisé sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On admet que toutes les variables aléatoires introduites peuvent bien être construites sur cet espace. On note $\mathbf{P}(A)$ la probabilité d'un événement A dans Ω et $\mathbf{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ à valeurs réelles.

On rappelle que pour s dans $]1; +\infty[$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} n^{-s}$ converge et on note $\zeta(s)$ sa somme.

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ suit la loi zêta de paramètre s, avec $s > 1$, si pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\mathbf{P}(X = n) = \zeta(s)^{-1} \frac{1}{n^s} .$$

Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et p un nombre premier, on note $\nu_p(n)$ la valuation p-adique de n. On note également $(p_k)_{k\geq 1}$ la suite croissante des nombres premiers.

Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on pose, $\chi_4(2n) = 0$ et $\chi_4(2n-1) = (-1)^{n-1}$. On pourra utiliser sans justification que, pour m et n dans $\mathbf{N}^*$, on a $\chi_4(mn) = \chi_4(m)\chi_4(n)$.

Le sujet comporte quatre parties, et les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

PARTIE I

Soit $s > 1$ un nombre réel et soit X une variable aléatoire a valeurs dans $\mathbf{N}^*$ suivant la loi zêta de paramètre s. Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on note $\{n \mid X\}$ l'évènement « n divise X » et $\{n \nmid X\}$ l'évènement complémentaire.

1a. Calculer $\mathbf{P}(n \mid X)$ pour n dans $\mathbf{N}^*$.

1b. Soit $(\alpha_i)_{i\in\mathbf{N}^*}$ une suite d'entiers naturels. Démontrer que les évènements

$$\{p_1^{\alpha_1} \mid X\} \ , \ \{p_2^{\alpha_2} \mid X\} \ , \ldots , \{p_k^{\alpha_k} \mid X\} \ , \ldots$$

sont mutuellement indépendants.

2a. Soit $r \geq 1$ un entier. Démontrer $\mathbf{P}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right) = \prod\limits_{i=1}^{r} (1 - p_i^{-s})$.

2b. En déduire $\zeta(s)^{-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s})$.

3a. Démontrer que pour tout k dans $\mathbf{N}^*$, la variable aléatoire $\nu_{p_k}(X) + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - p_k^{-s}$.

3b. Démontrer pour r dans $\mathbf{N}^*$, $k_1 < \cdots < k_r$ dans $\mathbf{N}^*$ et $(n_1, \ldots, n_r)$ dans $\mathbf{N}^r$:

$$\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X) = n_1, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(X) = n_r\right) =$$
$$\sum_{\ell=0}^{r} (-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=\ell}} \mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X) \geq n_1 + \varepsilon_1, \nu_{p_{k_2}}(X) \geq n_2 + \varepsilon_2, \ldots, \nu_{p_{k_r}}(X) \geq n_r + \varepsilon_r\right) \ .$$

3c. En déduire que les variables aléatoires $\nu_{p_1}(X), \ldots, \nu_{p_k}(X), \ldots$ sont mutuellement indépendantes.

Pour n dans $\mathbf{N}^*$ et i dans $\{0, 1, 2, 3\}$, on note

$$r_i(n) = \mathrm{Card}\,\{d \in \mathbf{N} \,|\, d \equiv i \pmod 4 \text{ et } d \mid n\} \ .$$

On pose $g(n) = r_1(n) - r_3(n)$.

4a. Démontrer que si m et n sont deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux, on a $g(mn) = g(m)g(n)$.

4b. Démontrer que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, et tout nombre premier p, on a

$$g(p^n) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 2, \\ n+1 & \text{si } p \equiv 1 \pmod 4, \\ \frac{1}{2}(1+(-1)^n) & \text{si } p \equiv 3 \pmod 4 \ . \end{cases}$$

5. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x dans $\mathbf{N}^*$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel $f(x)$ quand n tend vers $+\infty$. On suppose qu'il existe une fonction $h : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}_+$ telle que $h(X)$ est d'espérance finie et telle que $|f_n(m)| \leq h(m)$ pour tous m et n dans $\mathbf{N}^*$. Justifier que $f(X)$ est d'espérance finie et démontrer

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}\left(f_n(X)\right) = \mathbf{E}\left(f(X)\right) \ .$$

6a. On note $r(n)$ le nombre de diviseurs d de n, avec $d \geq 1$. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} r(n)n^{-s}$ converge et que sa somme vaut $\zeta(s)^2$.

6b. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} g(n)n^{-s}$ converge.

7a. Démontrer que la suite de fonctions $\left(x \mapsto \prod\limits_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\geq 1}$ de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ converge simplement vers la fonction identité.

7b. Démontrer $\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right)$.

8a. Démontrer que si p est un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$, on a

$$\mathbf{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{1-p^{-s}} \ .$$

8b. Calculer $\mathbf{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right)$ si p est un nombre premier vérifiant $p \equiv 3 \pmod 4$.

8c. En déduire

$$\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}} \ .$$

9a. Démontrer que, si p est un nombre premier, $\mathbf{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \dfrac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}$.

9b. Démontrer $\mathbf{E}\left(\chi_4(X)\right) = \dfrac{1}{\zeta(s)} \lim\limits_{n\to+\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}$.

9c. En déduire que la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$ est convergente et que sa somme vaut $\mathbf{E}\left(g(X)\right)$.

PARTIE II

10a. Soit $n \in \mathbf{N}$. Expliciter un polynôme P_n de $\mathbf{R}[X]$ tel que, pour tout θ dans $\mathbf{R}$,

$$\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta)) \ .$$

Indication : on pourra développer $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2n+1}$.

10b. Déterminer les racines de P_n et en déduire, pour tout x dans $\mathbf{R}$,

$$P_n(x) = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) .$$

10c. En déduire, pour tout x dans $\mathbf{R}$,

$$\sin(\pi x) = (2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) .$$

Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$. Soit m dans $\mathbf{N}$ tel que $m > |x|$. On pose, pour n dans $\mathbf{N}$ tel que $n > m$:

$$u_{m,n}(x) = (2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$$

et

$$v_{m,n}(x) = \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right) .$$

11a. Démontrer que les suites, indexées par n, $(u_{m,n}(x))_{n>m}$ et $(v_{m,n}(x))_{n>m}$ sont convergentes dans $\mathbf{R}^*$.

On note $v_m(x)$ la limite de $(v_{m,n}(x))_{n>m}$.

11b. Démontrer que, pour n dans $\mathbf{N}$ tel que $n > m$, on a

$$1 \geq v_{m,n}(x) \geq \prod_{k=m+1}^{n}\left(1 - \frac{\pi^2 x^2}{4k^2}\right)$$

et en déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} v_m(x) = 1$.

11c. En déduire, pour tout x dans $\mathbf{R}$,

$$\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right) .$$

PARTIE III

On rappelle que la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right)_{n\geq 1}$ converge. On note γ sa limite.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma_n(x) = \frac{1}{x}e^{-\gamma x}\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{x/k}}{1 + x/k} .$$

12. Démontrer que la suite de fonctions $(\Gamma_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbf{R}_+^*$ vers une fonction Γ de $\mathbf{R}_+^*$ vers $\mathbf{R}_+^*$.

13. Démontrer que, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

14a. Démontrer que la fonction Γ est de classe $\mathscr{C}^2$ et, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$\ln(\Gamma)''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{(x+k)^2} .$$

14b. Démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(\Gamma)''(x) = 0$.

Soit $f : \mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ telle que la fonction $\ln(f)$ est convexe et vérifie $f(1) = 1$ et $f(x+1) = xf(x)$ pour tout $x > 0$.

15a. Démontrer que la fonction S définie sur $\mathbf{R}_+^*$ comme $\ln\left(\frac{f}{\Gamma}\right)$ est 1-périodique et convexe.

15b. En déduire $f = \Gamma$.

16. Démontrer pour tous a et x dans $\mathbf{R}_+^*$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\,\mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}\ .$$

Indication : on pourra poser, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, $f(x) = \dfrac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\,\mathrm{d}t$.

17. Démontrer pour tout x dans $]0;1[$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}\ .$$

PARTIE IV

18a. Démontrer pour tout x dans $]0;1[$:

$$\frac{\pi}{\sin(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1-x}\ .$$

18b. En déduire, pour x dans $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$:

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} \right) 2^{2k+2} x^{2k}\ .$$

18c. En déduire que la fonction v définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $v(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ est développable en série entière et, pour tout k dans $\mathbf{N}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\,(2k)!} E_{2k}$$

où, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $E_{2k} = v^{(2k)}(0)$.

19a. Démontrer, pour n dans $\mathbf{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0$$

et en déduire les valeurs de E_0, E_2 et E_4.

19b. Calculer $\mathbf{E}\left(g(X)\right)$ lorsque X est une variable aléatoire suivant la loi zêta de paramètre 3 puis de paramètre 5 .

Composition B – X-ENS 2021 – MP

PARTIE I

1a. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Par définition de la loi zêta, on a

$$\mathbf{P}\left(n \mid X\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(X = kn\right) = \zeta(s)^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} (kn)^{-s} = \frac{1}{k^s}$$

donc $\boxed{\mathbf{P}\left(n \mid X\right) = \frac{1}{k^s}.}$

1b. Soit I une partie finie de $\mathbf{N}^*$. Comme les $(p_i)_{i\in I}$ sont premiers entre eux, le lemme de Gauss assure

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i} \mid n \iff \forall i \in I\ p_i^{\alpha_i} \mid n$$

et donc

$$\left(\prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i} \mid X\right) = \bigcap_{i\in I} (p_i^{\alpha_i} \mid X)$$

de sorte que la question précédente permet de conclure

$$\prod_{i\in I} \mathbf{P}\left(p_i^{\alpha_i} \mid X\right) = \frac{1}{\prod_{i\in I} p_i^{\alpha_i s}} = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I} (p_i^{\alpha_i} \mid X)\right)$$

et ainsi $\boxed{\text{les évènements } \left(\{p_i^{\alpha_i} \mid X\}\right)_{i\in\mathbf{N}^*} \text{ sont mutuellement indépendants.}}$

2a. En vertu de la question précédente et du lemme des coalitions, les événements $\{p_i \nmid X\}$ sont mutuellement indépendants. Par passage au complémentaire et en utilisant la question 1a, il vient $\boxed{\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right) = \prod_{i=1}^{r} (1 - p_i^{-s}).}$

2b. Puisque les événements $\left(\bigcap_{i=1}^{r} \{p_i \nmid X\}\right)_{r\in\mathbf{N}^*}$ sont décroissants, par continuité monotone de la probabilité, il vient

$$\lim_{n\to+\infty} \downarrow \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s}) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{+\infty} \{p_i \nmid X\}\right) .$$

Or il résulte du théorème d'Euclide que tout entier est décomposable en produit de facteurs premiers et que le seul entier qui n'est divisible par aucun nombre premier est 1. Par conséquent $\bigcap_{i=1}^{+\infty} \{p_i \nmid X\} = \{X = 1\}$ et donc, par définition de la loi zêta $\boxed{\zeta(s)^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 - p_k^{-s}).}$

3a. Soit k dans $\mathbf{N}^*$. Alors $\nu_{p_k}(X) + 1$ est une variable aléatoire puisque X l'est, à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et on a, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $\{\nu_{p_k}(X) + 1 = n\} = \left\{p_k^{n-1} \mid X\right\} \setminus \{p_k^n \mid X\}$ et donc, puisqu'on a affaire à des événements inclus l'un dans l'autre,

$$\mathbf{P}\left(\nu_{p_k}(X) + 1 = n\right) = \mathbf{P}\left(p_k^{n-1} \mid X\right) - \mathbf{P}\left(p_k^n \mid X\right) = p_k^{-(n-1)s} - p_k^{-ns} = \left(p_k^{-s}\right)^{n-1}\left(1 - p_k^{-s}\right),$$

i.e. $\boxed{\nu_{p_k}(X) + 1 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - p_k^{-s}.}$

3b. Soit r dans $\mathbf{N}^*$, $k_1 < \cdots < k_r$ dans $\mathbf{N}^*$ et $(n_1, \ldots, n_r)$ dans $\mathbf{N}^r$. On a, pour tout j dans $[\![1; r]\!]$,

$$\mathbb{1}_{\nu_{p_{k_j}}(X)=n_j} = \mathbb{1}_{\nu_{p_{k_j}}(X)\geq n_j} - \mathbb{1}_{\nu_{p_{k_j}}(X)\geq n_j+1}$$

et donc, en effectuant le produit et en utilisant que le produit de fonctions indicatrices est égal à la fonction indicatrice de l'intersection, il vient

$$\mathbb{1}_{\nu_{p_{k_1}}(X)=n_1,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)=n_r} = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=\ell}} \mathbb{1}_{\nu_{p_{k_1}}(X)\geq n_1+\varepsilon_1,\nu_{p_{k_2}}(X)\geq n_2+\varepsilon_2,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)\geq n_r+\varepsilon_r} \cdot$$

et donc, par linéarité de l'espérance et puisque l'espérance de la fonction indicatrice d'un événement est égale à sa probabilité,

$$\boxed{\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X)=n_1,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)=n_r\right) = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=\ell}} \mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X)\geq n_1+\varepsilon_1,\nu_{p_{k_2}}(X)\geq n_2+\varepsilon_2,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)\geq n_r+\varepsilon_r\right)\ .}$$

3c. Pour k dans $\mathbf{N}^*$ et n dans $\mathbf{N}$, on a $\{\nu_{p_k}(X)\geq n\} = \{p_k^n \mid X\}$ et donc, en vertu de la question 1b et de la question précédente, on a, en conservant les notations de la question précédente,

$$\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X)=n_1,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)=n_r\right) = \sum_{\ell=0}^{r}(-1)^\ell \sum_{\substack{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r)\in\{0,1\}^r \\ \varepsilon_1+\cdots+\varepsilon_r=\ell}} \prod_{j=1}^{r} \mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_j}}(X)\geq n_j+\varepsilon_j\right)$$

i.e.

$$\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X)=n_1,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)=n_r\right) = \prod_{j=1}^{r}\left(\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_j}}(X)\geq n_j\right) - \mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_j}}(X)\geq n_j+1\right)\right)$$

ou encore

$$\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_1}}(X)=n_1,\ldots,\nu_{p_{k_r}}(X)=n_r\right) = \prod_{j=1}^{r}\mathbf{P}\left(\nu_{p_{k_j}}(X)=n_j\right)$$

et donc $\boxed{\text{les variables aléatoires } \nu_{p_1}(X),\ldots,\nu_{p_k}(X),\ldots \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$

4a. Soit m et n deux entiers naturels non nuls et premiers entre eux. Par définition on a

$$g(m) = \sum_{d\mid m}\chi_4(d)$$

en convenant que la notation $d \mid m$ désigne les entiers naturels d divisant m. Avec la relation similaire pour $g(n)$, il vient

$$g(m)g(n) = \sum_{d_m\mid m, d_n\mid n}\chi_4(m)\chi_4(n) = \sum_{d_m\mid m, d_n\mid n}\chi_4(mn)$$

d'après la propriété admise de multiplicativité de χ_4. Or on a une bijection entre $\{d_m\in\mathbf{N}\,|\,d_m\mid m\}\times\{d_n\in\mathbf{N}\,|\,d_n\mid n\}$ et $\{d\in\mathbf{N}\,|\,d\mid mn\}$ donnée par $(d_m,d_n)\mapsto d_md_n$, de bijection réciproque $d\mapsto(d\wedge m, d\wedge n)$, puisque m et n sont premiers entre eux. On en déduit $\boxed{g(mn)=g(m)g(n).}$

4b. Soit n dans $\mathbf{N}$ et p un nombre premier. Tout diviseur de p^n est de la forme p^k avec $k \in [\![0;n]\!]$ et est donc congru modulo 4 à 2^n si $p=2$, à 1 si $p \equiv 1 \pmod 4$ et à $(-1)^n$ si $p \equiv 3 \pmod n$. Comme il y a $n+1$ diviseurs, que seul 1 est congru à 1 (ou -1) si $p=2$, que tous le sont si $p \equiv 1 \pmod 4$ et qu'ils sont alternativement congrus à 1 ou -1 dans le dernier cas, avec $r_1(p^n)$ toujours supérieur à $r_3(p^n)$, on en conclut

$\boxed{g(p^n) = 1 \text{ si } p=2,\ g(p^n) = n+1 \text{ si } p \equiv 1 \pmod 4 \text{ et } g(p^n) = \frac{1}{2}(1+(-1)^n) \text{ si } p \equiv 3 \pmod 4.}$

5. Puisque, pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a $|f_n| \leq h$, par passage à la limite il vient $|f| \leq h$, puis $|f(X)| \leq h(X)$ et donc, puisque h est d'espérance finie, $\boxed{f(X) \text{ est d'espérance finie.}}$ Pour la même raison, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $f_n(X)$ admet une espérance finie. Soit maintenant $A = \mathbf{N}^*$ et $a = +\infty$. La série de fonctions sur A donnée par $n \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} f_n(k)\mathbf{P}(X=k)$ est normalement convergente puisque, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $|f_n(k)\mathbf{P}(X=k)| \leq h(k)\mathbf{P}(X=k)$ et que la série $\sum h(k)\mathbf{P}(X=k)$ converge par hypothèse et formule de transfert. Comme chaque fonction $n \mapsto f_n(k)\mathbf{P}(X=k)$ admet une limite en a, à savoir $f(k)\mathbf{P}(X=k)$, il résulte du théorème de la double-limite qu'on a $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \mathbf{E}(f_n(X)) = \mathbf{E}(f(X)).}$

Remarque : on pourrait aussi utiliser le théorème de convergence dominée en transformant les séries en intégrales de fonctions en escalier, i.e. utiliser le théorème de convergence dominée discrète (vu en TD).

6a. Puisque la série définissant $\zeta(s)$ est à termes positifs et convergente, elle est absolument convergente et donc la famille produit $(n^{-s}m^{-s})_{(n,m)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}^*}$ est sommable de somme $\zeta(s)^2$. Comme $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ est réunion disjointe des $(I_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, avec $I_n = \{(d,k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \mid dk = n\}$, en considérant les fibres de l'application produit de $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$. On en déduit

$$\zeta(s)^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{(d,k)\in I_n} n^{-s} = \sum_{n=1}^{+\infty} r(n)n^{-s}$$

et donc $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 1} r(n)n^{-s} \text{ converge et sa somme vaut } \zeta(s)^2.}$

6b. Par inégalité triangulaire, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, on a $|g(n)| \leq r_1(n) + r_3(n) \leq r(n)$ et il résulte donc de la question précédente que $\sum_{n\geq 1} g(n)n^{-s}$ converge absolument. Comme $\mathbf{R}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, on en déduit que $\boxed{\sum_{n\geq 1} g(n)n^{-s} \text{ converge.}}$

7a. Soit x dans $\mathbf{N}^*$. D'après le théorème d'Euclide x se décompose en facteurs premiers, le nombre de facteurs étant fini. On note p_m le plus grand nombre premier apparaissant dans sa factorisation. Alors $\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\geq 1}$ est stationnaire à partir du rang m et vaut alors x. En particulier

$\boxed{\left(x \mapsto \prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)_{n\geq 1} \text{ converge simplement vers } \mathrm{Id}_{\mathbf{N}^*}.}$

7b. D'après les questions 3c et 4a, pour tout entier n, il résulte du lemme des coalitions qu'on a

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^{n} g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(g\left(\prod_{k=1}^{n} p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right),$$

i.e. en posant f_n l'application sur $\mathbf{N}^*$ donnée par $f_n(x) = g\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$, on a

$$\prod_{k=1}^n \mathbf{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(f_n(X)\right)\ .$$

D'après la question précédente, la suite (f_n) converge simplement vers g. De plus, par définition on a $|g| \leq r \leq \mathrm{Id}_{\mathbf{N}^*}$, et comme la convergence dans la question précédente a lieu en croissant et met en jeu des fonctions positives, on a pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $|f_n| \leq \mathrm{Id}_{\mathbf{N}^*} \circ \mathrm{Id}_{\mathbf{N}^*} = \mathrm{Id}_{\mathbf{N}^*}$. On peut donc appliquer la question 5 en prenant $\mathrm{Id}_{\mathbf{N}^*}$ comme fonction majorante, puisque X admet une espérance finie. On en déduit $\boxed{\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^n \mathbf{E}\left(g\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right).}$

8a. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod 4$. D'après la question 4b on a $g\left(p^{\nu_p(X)}\right) = \nu_p(X)+1$ et donc, d'après la question 3a, $\boxed{\mathbf{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \dfrac{1}{1-p^{-s}}.}$

8b. Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 3 \pmod 4$. D'après la question 4b on a $g\left(p^{\nu_p(X)}\right) = \frac{1}{2}\left((-1)^{\nu_p(X)}+1\right)$. Donc, par linéarité de l'espérance et formule de transfert, en utilisant la question 3a, il vient

$$\mathbf{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k-1}p^{-(k-1)s}(1-p^{-s}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1-p^{-s}}{1+p^{-s}} = \frac{1}{1+p^{-s}}$$

et donc $\boxed{\mathbf{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \dfrac{1}{1+p^{-s}}.}$

8c. D'après la question 4b on a $g\left(2^{\nu_2(X)}\right) = 1$, et donc également $\mathbf{E}\left(g\left(2^{\nu_2(X)}\right)\right) = 1$. Il résulte alors des deux questions précédentes qu'on a, pour tout nombre premier p, $\mathbf{E}\left(g\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \dfrac{1}{1-\chi_4(p)p^{-s}}$.

La question 7b permet de conclure $\boxed{\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^n \dfrac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}.}$

9a. Soit p est un nombre premier. Puisque χ_4 est borné, $\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)$ admet une espérance finie. Il résulte de la formule de transfert qu'on a

$$\mathbf{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\chi_4(p^{k-1})p^{-(k-1)s}(1-p^{-s})$$

et donc, par multiplicativité de χ_4,

$$\mathbf{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\chi_4(p)p^{-s}\right)^{k-1}(1-p^{-s})$$

soit $\boxed{\mathbf{E}\left(\chi_4\left(p^{\nu_p(X)}\right)\right) = \dfrac{1-p^{-s}}{1-\chi_4(p)p^{-s}}.}$

9b. D'après les questions 3c et la multiplicativité de χ_4, pour tout entier n, il résulte du lemme des coalitions qu'on a

$$\prod_{k=1}^n \mathbf{E}\left(\chi_4\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\prod_{k=1}^n \chi_4\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(\chi_4\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right)\ ,$$

i.e. en posant f_n l'application sur $\mathbf{N}^*$ donnée par $f_n(x) = \chi_4\left(\prod_{k=1}^n p_k^{\nu_{p_k}(x)}\right)$, on a

$$\prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(\chi_4\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right) = \mathbf{E}\left(f_n(X)\right) \ .$$

D'après la question 7a, la suite (f_n) converge simplement vers χ_4. De plus, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $|f_n| \leq 1$. On peut donc appliquer la question 5 en prenant 1 comme fonction majorante, puisque 1 admet une espérance finie. On en déduit

$$\mathbf{E}\left(\chi_4(X)\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left(\chi_4\left(p_k^{\nu_{p_k}(X)}\right)\right)$$

et donc, en utilisant la question précédente

$$\mathbf{E}\left(\chi_4(X)\right) = \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1-p_k^{-s}}{1-\chi_4(p)p_k^{-s}} \ .$$

Comme le produit des numérateurs est convergent, vers $\zeta(s)^{-1}$, d'après la question 2b, et que celui des dénominateurs l'est aussi d'après la question 8c, il vient

$$\boxed{\mathbf{E}\left(\chi_4(X)\right) = \frac{1}{\zeta(s)} \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\chi_4(p_k)p_k^{-s}}.}$$

9c. La question précédente et la question 8c donnent $\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \zeta(s)\mathbf{E}\left(\chi_4(X)\right)$. Or, par formule de transfert, on a $\zeta(s)\mathbf{E}\left(\chi_4(X)\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s}$. Cette dernière série est donc absolument convergente, et puisqu'elle est à valeurs réelles, $\boxed{\sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)^s} \text{ est convergente et sa somme vaut } \mathbf{E}\left(g(X)\right).}$

PARTIE II

10a. Soit θ dans $\mathbf{R}$, on a par formule d'Euler

$$e^{(2n+1)i\theta} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \cos^k(\theta)(-1)^k i \sin^{2n+1-k}(\theta)$$

et donc en prenant les parties imaginaires et en posant $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k} (1-X)^k X^{n-k}$, il vient $\boxed{\sin((2n+1)\theta) = \sin(\theta)P_n(\sin^2(\theta)).}$

10b. Par construction de P_n il est de degré au plus n. Au vu de sa propriété de définition et en notant $x_k = 2k\pi/(2n+1)$, P_n admet pour racines $(\sin^2(x_k))_{1\leq k\leq n}$ puisque $\sin((2n+1)x_k) = 0$ et $\sin(x_k) \neq 0$ pour $1 \leq k \leq n$. Comme sin est injective et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, il en va de même de $\sin^2$ et donc on a ainsi obtenu n racines distinctes de P_n. De par son degré on a ainsi déterminé toutes ses racines. $\boxed{\text{les racines de } P_n \text{ sont } (\sin^2(2k\pi/(2n+1)))_{1\leq k\leq n}.}$

Puisque P_n est simplement scindé et admet $(\sin^2(2k\pi/(2n+1)))_{1\leq k\leq n}$ comme racines, tout comme $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{X}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right)$, ces deux polynômes diffèrent par un coefficient multiplicatif. Or le seul terme ayant un coefficient non nul en 0 dans l'expression $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{2n+1}{2k}(1-X)^k X^{n-k}$ est obtenu pour $k=n$ et vaut $(-1)^n\binom{2n+1}{2n}(-1)^n$, i.e. $2n+1$. Il en résulte que, pour tout x dans $\mathbf{R}$,

$$\boxed{P_n(x)=(2n+1)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{x}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).}$$

10c. Soit x dans $\mathbf{R}$. En appliquant les deux identités précédentes à $\theta=\frac{\pi x}{2n+1}$, il vient directement

$$\boxed{\sin(\pi x)=(2n+1)\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\right).}$$

11a. Puisque la suite, indexée par n, $(u_{m,n}(x))_{n>m}$ est un produit fini et qu'on a $(2n+1)\sin\left(\dfrac{\pi x}{2n+1}\right)\sim \pi x$ et, pour k dans $[\![1;m]\!]$, $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\sim\dfrac{x}{k}$, $(u_{m,n}(x))_{n>m}$ converge. Et comme x n'est pas entier sa limite est non nulle : $\boxed{\displaystyle\lim_n u_{m,n}(x)=\pi x\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)\neq 0.}$ Comme par ailleurs, pour tout n dans $\mathbf{N}$ avec $n>m$ et puisque x n'est pas entier, on a $u_{m,n}(x)v_{m,n}(x)=\sin(\pi x)\neq 0$. Donc $(v_{m,n}(x))_{n>m}$ converge également vers une limite non nulle : $\boxed{\displaystyle\lim_n v_{m,n}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{x^2}{k^2}\right)^{-1}\neq 0.}$

11b. Soit n dans $\mathbf{N}$ tel que $n>m$. Pour k entier avec $n\geq k>m$, on a $k>x$ et donc $0<\frac{\pi x}{2n+1}<\frac{k\pi}{2n+1}<\frac{\pi}{2}$. Par croissance de $\sin^2$ sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, on en conclut que tous les termes du produit définissant $v_{m,n}(x)$ sont dans $[0;1]$ et donc $v_{m,n}(x)$ aussi. De plus par concavité de sin sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, pour t dans cet intervalle on a $\dfrac{2}{\pi}t\leq\sin(t)\leq t$ et on en déduit, pour k comme précédemment, $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\leq\dfrac{\pi x}{2n+1}\dfrac{2n+1}{2k}$ et donc, puisqu'on a affaire à des termes positifs,

$$1-\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2n+1}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}\geq 1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\geq 0$$

car $x<k$. On en déduit $\boxed{\displaystyle 1\geq v_{m,n}(x)\geq\prod_{k=m+1}^{n}\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right).}$ On en déduit, puisqu'on a affaire à des termes tous strictement positifs, $0\geq\ln(v_{m,n}(x))\geq\displaystyle\sum_{k=m+1}^{n}\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$. Comme la série $\sum\left(-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$ est convergente en tant que multiple d'une série de Riemann convergente, il en va de même par comparaison entre séries de termes de signe constant, pour $\sum\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)$. On en déduit, par passage à la limite en n, $\displaystyle\sum_{k=m+1}^{+\infty}\ln\left(1-\frac{\pi^2x^2}{4k^2}\right)\leq\ln(v_m(x))\leq 0$. Comme le membre

de gauche est le reste d'une série convergente, d'après ce qui précède, il vient par encadrement des limites $\lim \ln(v_m(x)) = 0$ et donc, par continuité de l'exponentielle, $\boxed{\lim_{m\to+\infty} v_m(x) = 1.}$

11c. Soit x dans $\mathbf{R}$. Si x n'est pas entier, le résultat précédent s'écrit $\lim \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} \displaystyle\prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)^{-1} = 1$ et donc puisqu'aucun des termes n'est nul, $\sin(\pi x) = \pi x \lim \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$. Si x est entier on a $\sin(\pi x) = 0$ et on a soit $x = 0$, soit pour un certain k dans $\mathbf{N}^*$, $x^2 = k^2$, de sorte que l'identité précédente devient tautologique. Autrement dit, on a $\boxed{\sin(\pi x) = \pi x \lim_{n\to+\infty} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right).}$

PARTIE III

12. Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$ et n dans $\mathbf{N}^*$, alors $\Gamma_n(x)$ est un produit de termes positifs et on peut écrire

$$\ln(\Gamma_n(x)) = -\ln(x) - \gamma x + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x}{k} - \ln\left(1 + \frac{x}{k}\right)\right) .$$

Comme on a $\dfrac{x}{k} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right) \sim \dfrac{x^2}{2k^2}$, par comparaison entre séries de termes de signe constant avec une série de Riemann convergente, la série $\sum \left(\dfrac{x}{k} - \ln\left(1 + \dfrac{x}{k}\right)\right)$ converge, et donc $\ln(\Gamma_n(x))$ converge dans $\mathbf{R}$. Par continuité et stricte positivité de l'exponentielle, on en déduit que $\boxed{(\Gamma_n)_{n\geq 1} \text{ converge simplement sur } \mathbf{R}_+^* \text{ vers une fonction } \Gamma \text{ de } \mathbf{R}_+^* \text{ vers } \mathbf{R}_+^*.}$

13. Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$ et n dans $\mathbf{N}^*$. D'après le calcul précédent, on a

$$\ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(x\Gamma_n(x)) = -\ln(x+1) - \gamma + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln(k+x+1) + \ln(k+x)\right)$$

et donc, en reconnaissant une somme télescopique,

$$\ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(x\Gamma_n(x)) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+x+1)\,,$$

ou encore

$$\ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(x\Gamma_n(x)) = -\gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{x+1}{n}\right)$$

et donc, par définition de γ, $\lim \ln(\Gamma_{n+1}(x)) - \ln(x\Gamma_n(x)) = 0$. Par continuité de l'exponentielle il en résulte $\boxed{\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).}$

14a. Les calculs précédents donnent, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$ et n dans $\mathbf{N}^*$, puisqu'on a affaire à des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$,

$$(\ln(\Gamma_n))'(x) = -\frac{1}{x} - \gamma + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{k(x+k)} \quad \text{et} \quad (\ln(\Gamma_n))''(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} .$$

Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série définissant $(\ln(\Gamma_n))'$ est convergente. Soit a dans $\mathbf{R}_+^*$. La série définissant $(\ln(\Gamma_n))''$ est normalement convergente sur $[a;+\infty[$

car $\sum \dfrac{1}{(a+k)^2}$ converge par comparaison entre séries à termes positifs avec une série de Riemann convergente. Il résulte du théorème de dérivation des séries de fonctions que $\ln(\Gamma)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et que ses dérivées successives sont données par dérivation terme à terme. Comme l'exponentielle est de classe $\mathscr{C}^\infty$, par composition, on en déduit que $\boxed{\Gamma \text{ est de classe } \mathscr{C}^2}$ et, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\boxed{\ln(\Gamma)''(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(x+k)^2}.}$

14b. La convergence normale déjà citée dans la question précédente permet d'appliquer le théorème de la double limite quand x tend vers $+\infty$ puisque toutes les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{(x+k)^2}$ ont une limite, nulle, en $+\infty$. Il vient $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(\Gamma)''(x) = 0.}$

15a. Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. En utilisant les équations fonctionnelles, on a

$$S(x+1) = \ln(xf(x)) - \ln(x\Gamma(x)) = S(x)$$

et donc $\boxed{S \text{ est 1-périodique.}}$ De plus, d'après ce qui précède on a

$$S''(x) = (\ln(f))''(x) - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}\ .$$

Or on a $f(x+1) = xf(x)$ et donc, par dérivation, $(\ln(f))''(x+1) = -\dfrac{1}{x^2} + (\ln(f))''(x)$. Il en résulte que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, par récurrence immédiate,

$$(\ln(f))''(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} = (\ln(f))''(x+n+1) \geq 0$$

par convexité de $\ln(f)$. En passant à la limite en n, on en déduit $S'' \geq 0$ et donc $\boxed{S \text{ est convexe.}}$

15b. Soit x et y dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que $S(x) < S(y)$. Par 1-périodicité on peut supposer $x < y$ et donc, par théorème de Lagrange dit des accroissements finis, on dispose de z dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $S'(z) > 0$. Puisque S est convexe elle est donc au-dessus de sa tangente en z et donc $\lim_{+\infty} S = +\infty$. Mais d'après le théorème de Weierstras dit des bornes atteintes, puisque S est continue sur $[1;2]$, elle y est bornée. Par 1-périodicité, elle est donc bornée sur $\mathbf{R}_+^*$. Cette contradiction montre que de tels x et y n'existent pas et donc S est constante, i.e. $\Gamma = \Gamma(1)f$. Or on a

$$\ln(\Gamma_n(1)) = -\gamma - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\right)$$

et donc, en reconnaissant une somme télescopique, $\ln(\Gamma_n(1)) = -\gamma - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n+1) = -\gamma - \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} - \ln(n) + \mathrm{o}\,(1)$. On en déduit $\ln(\Gamma(1)) = 0$ et donc $\Gamma(1) = 1$. Par conséquent $\boxed{f = \Gamma.}$

16. Soit a et x dans $\mathbf{R}_+^*$. On pose $f(x) = \dfrac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}\,\mathrm{d}t$. On a donc

$$f(1) = a \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^{1+a}}\,\mathrm{d}t = a\left[-\frac{1}{a(1+t)^a}\right]_0^{+\infty} = 1\ .$$

On a également

$$f(x+1) = \frac{(x+a)\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{(1+t)^{x+a+1}} \, \mathrm{d}t$$

et donc, par intégration par parties, puisque les fonctions utilisées ont des limites en 0 et $+\infty$, nulles puisque $\lim_0 t^x = 0$ car $x > 0$ et $\lim_{+\infty} (1+t)^{x+a} = 0$ car $x + a > 0$,

$$f(x+1) = \frac{(x+a)\Gamma(x+a)}{\Gamma(a)} \int_0^{+\infty} \frac{xt^{x-1}}{(x+a)(1+t)^{x+a+1}} \, \mathrm{d}t$$

et donc $f(x+1) = xf(x)$.

Remarquons que f est strictement positive en tant qu'intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle sur un intervalle non trivial. De plus la convexité de $\ln(f)$ équivaut à démontrer pour y dans $\mathbf{R}_+^*$ et α dans $[0;1]$, $f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq f(x)^{1-\alpha} f(y)^\alpha$. Soit alors u et v deux fonctions strictement positives, intégrables sur $\mathbf{R}_+^*$, d'intégrales 1 sur cet intervalle. Par concavité de ln et croissance de l'exponentielle, on a $u^{1-\alpha} v^\alpha \leq (1-\alpha)u + \alpha v$ et donc, par intégration sur $\mathbf{R}_+^*$, $u^{1-\alpha}v^\alpha$ est d'intégrale inférieure à 1 et donc en particulier on a dans ce cas

$$\int_0^{+\infty} u^{1-\alpha}(t) v^\alpha(t) \, \mathrm{d}t \leq \left(\int_0^{+\infty} u(t) \, \mathrm{d}t \right)^{1-\alpha} \left(\int_0^{+\infty} v(t) \, \mathrm{d}t \right)^\alpha .$$

Comme cette inéquation est homogène, elle est encore valable sans hypothèse sur les intégrales de u et v. En l'appliquant avec $u(t) = \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}}$ et $v(t) = \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{y+a}}$, il vient $f((1-\alpha)x + \alpha y) \leq f(x)^{1-\alpha} f(y)^\alpha$. Par conséquent $\ln(f)$ est convexe et il résulte de la question précédente qu'on a $f = \Gamma$ et donc $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{(1+t)^{x+a}} \, \mathrm{d}t = \frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}.}$

Remarque : on peut aussi démontrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$, par dérivation des intégrales à paramètres, et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir $(f')^2 \leq ff''$, et donc $(\ln(f))'' \geq 0$.

17. Soit x dans $]0;1[$. Alors $1 - x > 0$ et donc, en appliquant ce précède avec $a = 1 - x$, il vient, en tenant compte de $\Gamma(1) = 1$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t = \Gamma(x)\Gamma(1-x)$. Or, par définition, pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) &= \frac{e^{-\gamma}}{x(1-x)} \prod_{k=1}^n e^{1/k} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+x)(k+1-x)} \\
&= \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) - \gamma \right) \frac{n}{x(n+1-x)} \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+x)(k-x)}
\end{aligned}$$

et donc

$$\Gamma_n(x)\Gamma_n(1-x) = e^{\mathrm{o}(1)} \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{x} \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2} \right)^{-1}$$

et il résulte donc de la partie II et de la continuité de l'exponentielle, $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$. Par conséquent $\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} \, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$

PARTIE IV

18a. Soit x dans $]0;1[$. Pour t dans $]0;1[$ on a $\dfrac{t^{x-1}}{1+t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{n+x-1}$. De plus, pour tout N dans $\mathbf{N}^*$,

$$\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{n+x-1}\right| \leq \frac{2t^{x-1}}{1+t}$$

et donc, puisque toutes les fonctions en jeu sont continues et intégrables sur $]0;1[$, par continuité sur $]0;1]$ et par équivalent à une intégrale de RIEMANN convergente en 0, il résulte du théorème de convergence dominée $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+x}$. On a donc aussi, en appliquant ce résultat à $1-x$, également dans $]0;1[$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1-x}$. Un changement de variable en $\frac{1}{t}$ donne alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1-x}$. Par relation de CHASLES il vient, en tenant compte de la question précédente, $\boxed{\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1-x}.}$

18b. Soit x dans $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$. On applique ce qui précède à $x+\frac{1}{2}$. Il vient

$$\frac{\pi}{\cos(\pi x)} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+x+\frac{1}{2}} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n-x+\frac{1}{2}} = 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2-4x^2}$$

ou encore, en utilisant le critère de LEIBNIZ pour isoler la somme pour $k=0$,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{\cos(\pi x)} &= 4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(2n+1)^{-2k}(2x)^{2k}\right)\\ &= 4\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} + 4\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2n+1}\sum_{k=1}^{+\infty}(2n+1)^{-2k}(2x)^{2k}\right)\end{aligned}$$

Or la famille $\left(\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}2^{2k+2}x^{2k}\right)_{(k,n)\in\mathbf{N}^*\times\mathbf{N}}$ est sommable puisqu'on a dans $\mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{2k+2}x^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^4x^2}{(2n+1)^3-4(2n+1)x^2} < +\infty$$

par comparaison à une série de RIEMANN convergente. Il résulte donc du théorème de FUBINI qu'on a $\boxed{\dfrac{\pi}{\cos(\pi x)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right)2^{2k+2}x^{2k}.}$

18c. Soit x dans $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a donc

$$v(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}}\right)\frac{2^{2k+2}}{\pi^{2k+1}}x^{2k}$$

et ainsi v s'écrit comme la somme d'une série entière de rayon de convergence au moins égal à $\frac{\pi}{2}$, donc non nul, il résulte de l'unicité de ce développement que $\boxed{v \text{ est développable en série entière}}$ et, pour tout k dans $\mathbf{N}$, $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{\pi^{2k+1}}{2^{2k+2}\,(2k)!} E_{2k}.}$

19a. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Puisqu'on a $v\cos = 1$, on a $(v\cos)(n) = 0$ et en particulier $(v\cos)(n)(0) = 0$. La formule de LEIBNIZ donne directement $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} E_{2k} = 0.}$ Comme on a $E_0 = v(0) = 1$ et avec les relations précédentes, $E_0 - E_2 = 0$ et $E_0 - 6E_2 + E_4 = 0$, on en conclut $\boxed{E_0 = E_2 = 1 \text{ et } E_4 = 5.}$

19b. Les questions 9c, 18c jointes à la précédente donnent directement

$$\boxed{\mathbf{E}\left(g(X)\right) = \frac{\pi^3}{32} \text{ si } s = 3 \text{ et } \mathbf{E}\left(g(X)\right) = \frac{5\pi^5}{1536} \text{ si } s = 5.}$$