Lycée Lesage MP

MATHÉMATIQUES

DEVOIR EN TEMPS LIBRE 1

12 septembre 2022 – À rendre pour le 20 septembre 2022

Polynômes trigonométriques
Questions 2 et 3 obligatoires

Merci d'indiquer sur chacune des copies (de préférence doubles) : le nom de la personne ayant rédigé, celui de son binôme éventuel et enfin celui de la personne ayant corrigé.

Chaque membre d'un binôme doit rendre une copie séparée, afin de faciliter la correction.

Polynômes trigonométriques

Soit E l'espace vectoriel $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et n un entier naturel non nul. Pour k entier, on note c_k et s_k les applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ données par $c_k(t) = \cos(kt)$ et $s_k(t) = \sin(kt)$.

1. Pour N dans $\mathbf{N}$, on note E_N l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur à N, i.e. des fonctions réelles u de la forme

$$t \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

avec des coefficients a_i et b_j réels.

1.a) Montrer que E_N est un espace vectoriel.

1.b) En considérant φ l'application définie sur E_n par

$$\varphi(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$

déterminer un supplémentaire de E_0 dans E_n.

1.c) En considérant ψ l'application de E_n dans $\mathbf{C}$ définie par

$$\psi(f) = \int_0^{2\pi} f(t)(c_n(t) + is_n(t))\,\mathrm{d}t$$

déterminer un supplémentaire de E_{n-1} dans E_n.

2. Soit T_n l'application de E_n dans E donnée par $T_n(u) = u'' + n^2 u$.

2.a) Montrer que T_n est une application linéaire et qu'on a $\mathrm{Im}(T_n) = E_{n-1}$.

2.b) En effectuant une démonstration par récurrence, montrer que si u est la fonction nulle, alors tous les coefficients a_i et b_j sont nuls. Pour démontrer l'hérédité, on pourra commencer par montrer que si u est nulle, alors $T_n(u)$ aussi puis, pour montrer que a_n et b_n sont nuls, on pourra prendre des valeurs particulières de t.

2.c) Donner la dimension de E_n ainsi qu'une base.

3. Soit m un entier naturel, $(a_k)_{0\le k\le m} \in \mathbf{R}^{m+1}$ et $(b_k)_{1\le k\le m} \in \mathbf{R}^m$, $g = \sum_{k=0}^{m} a_k c_k + \sum_{k=1}^{m} b_k s_k$. Soit S et D les applications de E dans lui-même définies par

$$S(u) \ :\ x \mapsto \int_0^x u(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad D(u) \ :\ x \mapsto u'(x)\ .$$

3.a) Montrer que S et D sont linéaires et comparer $S \circ D$ et $D \circ S$.

3.b) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - D)$ et $(\mathrm{Id} - D)^{-1}(g)$, puis préciser leurs intersections avec E_n.

3.c) Déterminer $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - S)$ et $(\mathrm{Id} - S)^{-1}(g)$, puis préciser leurs intersections avec E_n.

Polynômes trigonométriques

1.a) Soit $\mathcal{F}$ la famille formée par la réunion de $(c_k)_{0\leq k\leq n}$ et de $(s_k)_{1\leq k\leq n}$. En tant que composées de fonctions affines avec les fonctions cos et sin, toutes ces fonctions sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et $\mathcal{F}$ est donc une famille de vecteurs de E. Par définition, $E_n = \mathrm{V}ect\,(\mathcal{F})$ et donc E_n est un sous-espace vectoriel de E.

1.b) Soit $F_0 = \mathrm{V}ect\,((c_k)_{1\leq k\leq n}, (s_k)_{1\leq k\leq n})$. L'application φ est bien définie puisque les fonctions de E_n sont continues et donc intégrables sur $[0;2\pi]$. Par linéarité de l'intégrale,φ est donc une forme linéaire sur E_n. Pour tout k entier non nul, on a

$$\int_0^{2\pi} c_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{s_k(2\pi)-s_k(0)}{k} = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{2\pi} s_k(t)\,\mathrm{d}t = \frac{-c_k(2\pi)+c_k(0)}{k} = 0$$

et donc $F_0 \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$. De plus $\varphi(c_0) = 2\pi$ et donc $E_0 \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$. Il en résulte $E_0 \cap F_0 = \{0\}$. Or, par définition, $E_n = E_0 + F_0$ et donc F_0 est un supplémentaire de E_0 dans E_n.

1.c) L'application ψ est bien définie par continuité de l'intégrande sur $[0;2\pi]$ et c'est une application linéaire par linéarité de l'intégrale. Par ailleurs, pour k entier, on a $c_kc_n = (c_{n-k}+c_{n+k})/2$, $c_ks_n = (s_{n+k}+s_{n-k})/2$, de sorte que, pour $0\leq k\leq n$,

$$\psi(c_k) = \frac{1}{2}(\varphi(c_{n-k})+\varphi(c_{n+k})) + \frac{i}{2}(\varphi(s_{n-k})+\varphi(s_{n+k})) = \frac{1}{2}\delta_{k,n}$$

d'après les calculs précédents sur φ et le fait que s_0 est la fonction nulle. De même, pour $1\leq k\leq n$,

$$\psi(s_k) = \frac{1}{2}(\varphi(s_{k-n})+\varphi(s_{n+k})) + \frac{i}{2}(\varphi(c_{n-k})-\varphi(c_{n+k})) = \frac{i}{2}\delta_{k,n}\,,$$

et donc $E_{n-1} \subset \mathrm{Ker}(\psi)$, tandis que, pour $(a,b)\in\mathbf{R}^2$, $\psi(ac_n+bs_n) = (a+ib)/2$ et donc $E_{n-1} \cap \mathrm{V}ect\,(c_n,s_n) = \{0\}$. Comme, par définition, $E_n = E_{n-1} + \mathrm{V}ect\,(c_n,s_n)$, il en résulte que $\mathrm{V}ect\,(c_n,s_n)$ est un supplémentaire de E_{n-1} dans E_n.

2.a) Soit D l'application de E dans lui-même qui à f associe f'. C'est un endomorphisme de E, par linéarité de la dérivation, et donc $D\circ D + n^2\mathrm{Id}_E$ est également linéaire, puisque $\mathrm{End}\,E$ est un anneau. Il en résulte que T_n appartient à $\mathscr{L}(E_n,E)$. Or, pour k entier, on a $T_n(c_k) = (n^2-k^2)c_k$ et $T_n(s_k) = (n^2-k^2)s_k$, et

$$\mathrm{Im}(T_n) = T_n(\mathrm{V}ect\,((c_k)_{0\leq k\leq n},(s_k)_{1\leq k\leq n})) = \mathrm{V}ect\,((T_n(c_k))_{0\leq k\leq n},(T_n(s_k))_{1\leq k\leq n})$$

et donc, puisque n^2-k^2 est nul si $k=n$ et non nul sinon,

$$\mathrm{Im}(T_n) = \mathrm{V}ect\,((c_k)_{0\leq k\leq n-1},(s_k)_{1\leq k\leq n-1}) = E_{n-1}\,.$$

2.b) Soit $\mathbf{H}(m)$ le prédicat sur l'entier naturel m donné par :

$$\mathbf{H}(m)\ :\ \forall (a_k)_{0\leq k\leq m}\in\mathbf{R}^{m+1}\,,\ \forall (b_k)_{1\leq k\leq m}\in\mathbf{R}^m\,,$$
$$\sum_{k=0}^{n} a_kc_k + \sum_{k=1}^{n} b_ks_k = 0 \Longrightarrow a_0 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_m = 0\,.$$

Le prédicat $\mathbf{H}(0)$ s'écrit $\forall a_0\in\mathbf{R}$, $a_0 = 0 \Longrightarrow a_0 = 0$ et est donc une tautologie.
Supposons $\mathbf{H}(m-1)$ vraie pour un certain entier naturel non nul m et soit $(a_k)_{0\leq k\leq m}\in\mathbf{R}^{m+1}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq m}\in\mathbf{R}^m$. Soit u la fonction donnée par $u = \sum_{k=0}^{m} a_kc_k + \sum_{k=1}^{m} b_ks_k$. Supposons enfin u nulle.
Alors, puisque T_m est linéaire, $T_m(u) = 0$ et donc

$$\sum_{k=0}^{m-1}(m^2-k^2)a_kc_k + \sum_{k=1}^{m-1}(m^2-k^2)b_ks_k = 0\,.$$

D'après $H(m-1)$, on a $m^2a_0 = \cdots = (m^2-(m-1)^2)a_{m-1} = 0$ et $(m^2-1)b_1 = \cdots = (m^2-(m-1)^2)b_{m-1} = 0$. Or les coefficients m^2-k^2 sont non nuls pour $0 \leq k \leq m-1$ et donc $a_0 = \ldots = a_{m-1} = b_1 = \ldots = b_{m-1} = 0$. Il en résulte $u = a_nc_n + b_ns_n$.

Mézalor $u(0) = a_n$ et $u(\pi/2n) = b_n$ montrent qu'on a aussi $a_n = b_n = 0$ et donc $\mathbf{H}(m)$ est vraie. D'après le principe de récurrence $\mathbf{H}(n)$ est donc vraie, ce qui est l'assertion recherchée.

2.c) Il en résulte que la famille $\mathcal{F}$ est libre et comme elle est génératrice de E_n par définition, il vient $\dim(E_n) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 2n+1$ et une base de E_n est $\mathcal{F}$.

Remarque : il résulte du fait que $\mathcal{F}$ est une base de E_n qu'un supplémentaire de E_0 est F_0 et un supplémentaire de E_{n-1} est $\mathrm{V}ect\,(c_n, s_n)$ d'après les descriptions des bases obtenues comme réunion de bases d'espaces supplémentaires.

3.a) Les applications S et D sont définies sur E puisque la dérivée et les primitives d'une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ l'est aussi. Par linéarité de l'intégrale et de la dérivation, S et D sont linéaires. Par ailleurs, pour u dans E, on a

$$S \circ D(u) = S(u') = u - u(0) \qquad \text{et} \qquad D \circ S(u) = u$$

d'après le théorème de LEIBNIZ-NEWTON dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral. Donc $D \circ S - S \circ D$ est la forme linéaire e_0 définie par $e_0(u) = u(0)$.

3.b) Soit u dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - D)$. On a $u = D(u) = u'$ et donc u est de la forme $a\exp$ avec $a \in \mathbf{R}$. Réciproquement si u est de cette forme, $D(u) = aD(\exp) = a\exp = u$ et donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-D) = \mathbf{R}\exp$.

De plus si $(a_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbf{R}^{n+1}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n} \in \mathbf{R}^n$ et la fonction u donnée par $u = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_kc_k + \sum_{k=1}^{n} b_ks_k$ appartient à $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-D)$, alors par unicité des coefficients, la relation $u = u'$ donne : $a_0 = 0$ et, pour $1 \leq k \leq n$, $a_k = kb_k$ et $b_k = -ka_k$ et donc $(1+k^2)a_k = 0$, puis $a_k = 0$ et donc $b_k = 0$. Il en résulte $u = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id}-D) \cap E_n = \{0\}$ (autrement dit $\exp \notin E_n$). Remarquons également que la famille $(\exp, c_0, c_1, \cdots, c_n, s_1, \cdots, s_n)$ est libre pour tout n.

L'application linéaire $\mathrm{Id} - D$ est injective et stabilise E_n. Sa bi-restriction à E_n est donc injective, et par conséquent bijective, car E_n est de dimension finie. Soit u dans $(Id-D)^{-1}(g)$. On a donc $(Id-D)(u) = g$ ou encore $u' - u = -g$. On utilise le théorème de LAGRANGE dit méthode de variation de la constante. Il vient

$$(Id-D)^{-1}(g) = \left\{ C\exp + a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k + kb_k}{1+k^2}c_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k - ka_k}{1+k^2}s_k \;\middle|\; C \in \mathbf{R} \right\}.$$

Puisque $(\exp, c_0, c_1, \cdots, c_p, s_1, \cdots, s_p)$ est libre (pour $p = \max(m,n)$), une fonction de la forme ci-dessus est dans E_n si et seulement si $C = 0$ et les coefficients $(a_k+kb_k)/(1+k^2)$ et $(b_k-ka_k)/(1+k^2)$ sont nuls pour $k > n$, ce qui est équivalent à $g \in E_n$. Autrement dit : si $g \in E_n$ (par exemple si $m \leq n$), alors

$$(\mathrm{Id}-D)^{-1}(g) \cap E_n = \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k + kb_k}{1+k^2}c_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k - ka_k}{1+k^2}s_k \right\}$$

et sinon $(Id-D)^{-1}(g) \cap E_n$ est vide.

3.c) Soit u dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - S)$. On a donc $S(u) = u$ et donc $u = D \circ S(u) = D(u) = u'$. Il en résulte que u est de la forme $a\exp$ avec $a \in \mathbf{R}$. Mais $S(u)$ s'annule en 0 par définition et donc $a = 0$. Par conséquent $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - S) = \{0\}$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - S) \cap E_n = \{0\}$. L'application $\mathrm{Id} - S$ est donc injective sur E, mais attention ! elle ne peut se restreindre à un endomorphisme de E_n.

Soit maintenant u dans $(\mathrm{Id}-S)^{-1}(g)$. Posons $v = S(u)$, de sorte qu'on a $v' - v = u - S(u) = g$, i.e. $v \in (\mathrm{Id}-D)^{-1}(-g)$. Réciproquement soit w dans $(\mathrm{Id}-D)^{-1}(-g)$ nul en 0, on a $w - D(w) = -g$ et

$S(D(w)) = w$, donc $D(w) \in (\mathrm{Id} - S)^{-1}(g)$. Il en résulte que $Id - S$ est un automorphisme de E. De plus, d'après la question précédente

$$v = a_0(\exp - 1) + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k + kb_k}{1+k^2}(\exp - c_k) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k - ka_k}{1+k^2} s_k$$

et donc on a :

$$(\mathrm{Id} - S)^{-1}(g) = \left\{ a_0 \exp + \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2 a_k - kb_k}{1+k^2} c_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k + kb_k}{1+k^2}(ks_k + \exp) \right\} .$$

Par le même raisonnement que précédemment $(\mathrm{Id} - S)^{-1}(g)$ appartient à E_n si et seulement si le coefficient de exp est nul, i.e. si $a_0 + \dfrac{a_1 + b_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_m + mb_m}{1+m^2} = 0$, et si pour $k > n$, on a $k^2 a_k - kb_k = a_k + kb_k = 0$, i.e. $a_k = b_k = 0$, ou encore $g \in E_n$. Par conséquent si $a_0 + \dfrac{a_1 + b_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_m + mb_m}{1+m^2} = 0$ et si $g \in E_n$ (par exemple si $m \leq n$), on a

$$(\mathrm{Id} - S)^{-1}(g) \cap E_n = \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{k^2 a_k - kb_k}{1+k^2} c_k + \sum_{k=1}^{m} \frac{ka_k + k^2 b_k}{1+k^2} s_k \right\}$$

et sinon $(\mathrm{Id} - S)^{-1}(g) \cap E_n = \emptyset$.