Deuxième épreuve
Mines-Ponts 2018 - MP

Racines carrées de matrices complexes : existence et calcul numérique

Dans ce problème, on étudie l'existence de racines carrées d'une matrice complexe, puis on introduit l'algorithme de Newton pour calculer numériquement l'une de ces racines carrées, avec des considérations sur la convergence et la stabilité de l'algorithme.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. La matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est notée I_n. On appelle *racine carrée* de A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ toute matrice X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ solution de l'équation $X^2 = A$.

On note $\widetilde{\mathbf{C}}$ l'ensemble des nombres complexes non nuls qui ne sont pas des nombres réels négatifs : $\widetilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \backslash \mathbf{R}_-$.

A - Quelques exemples

1) On suppose $A = I_2$. Démontrer que la matrice A admet une infinité de racines carrées (on pourra utiliser la notion de symétrie). Lesquelles sont des polynômes en A ?

2) On suppose $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Démontrer que A admet une infinité de racines carrées et qu'aucune d'entre elles n'est un polynôme en A.

Dans la question suivante, A est une matrice symétrique réelle dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ qui est *définie positive*, c'est-à-dire que ses valeurs propres sont strictement positives.

3) Démontrer que A admet une unique racine carrée symétrique réelle définie positive.
(On pourra montrer que deux racines carrées de ce type possèdent les mêmes valeurs et sous-espaces propres.)

B - Existence et calcul d'une racine carrée

Dans cette partie A désigne une matrice *inversible* quelconque dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

4) Soit $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et $U = (u_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ deux matrices complexes triangulaires supérieures. On suppose que T est inversible. Montrer que l'équation $U^2 = T$ est équivalente au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} u_{i,i}^2 = t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ (u_{i,i} + u_{j,j}) u_{i,j} = t_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k} u_{k,j} & (1 \leq i < j \leq n) \end{cases}$$

Démontrer que, T étant donnée, on peut résoudre ce système en choisissant une solution U telle que $u_{i,i} + u_{j,j} \neq 0$ pour tous (i,j) dans $\{1, 2, \ldots, n\}^2$.
(On pourra considérer les parties réelles et imaginaires des $u_{i,i}$.)

5) En déduire que A admet une racine carrée. Si en outre, les valeurs propres valeurs de A appartiennent à $\widetilde{\mathbf{C}}$, montrer que A admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.

On admet qu'une telle racine carrée est unique et on la notera $\sqrt{A}$ dans toute la suite du problème.

C - Algorithme de Newton

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ on pose

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|^2}$$

et on admet que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ considéré comme $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On note $B(X,r)$ et $\overline{B}(X,r)$ les boules, respectivement ouverte et fermée, de centre X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et de rayon r. Soit A et B deux matrices quelconques de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

6) Démontrer $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$.

On note m_A le polynôme minimal de A.

7) Démontrer que la matrice $m_A(B)$ est inversible si et seulement si A et B n'ont aucune valeur propre commune.

   En déduire que s'il existe une matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle telle que $AM = MB$, alors A et B ont au moins une valeur propre commune.

8) Réciproquement, si A et B ont au moins une valeur propre commune, démontrer qu'il existe une matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ non nulle telle que $AM = MB$.

   (On pourra considérer une matrice de la forme XY^{T} où X et Y sont deux matrices colonnes bien choisies).

Soit $F : \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ l'application définie par la formule $F(X) = X^2 - A$.

9) Soit X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Démontrer que la différentielle $\mathrm{d}F_X$ de F en X est donnée par

$$\forall H \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}), \quad \mathrm{d}F_X(H) = XH + HX \ .$$

   Déduire des deux questions précédentes une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible. Démontrer que cette condition implique que X est inversible.

Dans toute la suite du problème, A désigne une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbf{C}}$. On pose $X^* = \sqrt{A}$ (la matrice $\sqrt{A}$ a été définie à la question 5). On définit, sous réserve d'existence, une suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ par :

$$(N) \qquad \begin{cases} & X_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ \forall k \in \mathbf{N} & X_{k+1} = X_k - (\mathrm{d}F_{X_k})^{-1}(F(X_k)) \ . \end{cases}$$

Dans les questions suivantes, on étudie l'existence et la convergence de la suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

10) Démontrer que $\mathrm{d}F_{X^*}$ est inversible et qu'il existe r, avec $r > 0$, tel que $\mathrm{d}F_X$ soit inversible pour tout X dans $\overline{B}(X^*, r)$.

Pour tout Y dans $\overline{B}(X^*, r)$ on pose $G(Y) = Y - (\mathrm{d}F_Y)^{-1}(F(Y))$.

11) Calculer $G(X^*)$ et démontrer que pour tout H dans $\overline{B}(0, r)$,

$$G(X^* + H) - G(X^*) = (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(H^2)$$

   avec $(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1} = (\mathrm{Id} + (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1} \circ \mathrm{d}F_H)^{-1} \circ (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1}$.

12) En déduire qu'il existe une constante C, avec $C > 0$, telle que pour tout X de $B(X^*, r)$, $\|G(X) - X^*\| \leq C \, \|X - X^*\|^2$. (On pourra utiliser le résultat de la question 6.)

13) Démontrer qu'il existe ρ, avec $\rho > 0$, tel que pour tout X_0 dans $B(X^*, \rho)$ la suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ soit bien définie et vérifie, pour tout k dans $\mathbf{N}$,

$$\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho C)^{(2^k)}}{C} \; .$$

Que peut-on en conclure ?

D - Forme équivalente

Dans cette partie, on étudie deux algorithmes équivalents à celui de Newton. On rappelle que A désigne une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont les valeurs propres appartiennent à $\widetilde{\mathbf{C}}$. Soit U_0 et V_0 deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Sous réserve d'existence, on note $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par

$$(I) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad U_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ \forall k \in \mathbf{N} \quad U_{k+1} = U_k + H_k \text{ avec } U_k H_k + H_k U_k = A - U_k^2 \end{cases}$$

et $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$ la suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ définie par

$$(II) \qquad \begin{cases} \qquad\qquad V_0 \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \\ \forall k \in \mathbf{N} \quad V_{k+1} = \dfrac{1}{2}(V_k + V_k^{-1}A) \; . \end{cases}$$

14) Si la suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bien définie par (N) et $U_0 = X_0$, démontrer que la suite $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bien définie par (I), l'est de façon unique et est égale à $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$.
Réciproquement si la suite $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bien définie par (I), et l'est de façon unique, et $X_0 = U_0$, démontrer que la suite $(X_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bien définie par (N) et égale à $(U_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

On suppose dorénavant ces conditions vérifiées.

15) On suppose $U_0 = V_0$ et que U_0 commute avec A. Démontrer que la suite $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est bien définie par (II) et que pour tout k dans $\mathbf{N}$, $U_k = V_k$ et U_k commute avec A.
On pourra d'abord démontrer que U_k est inversible pour tout k dans $\mathbf{N}$ et considérer la matrice donnée par $G_k = \dfrac{1}{2}(U_k^{-1}A - U_k)$.

On rappelle qu'une matrice symétrique réelle A est *définie positive* si ses valeurs propres sont strictement positives, et qu'une telle matrice admet une unique racine carrée définie positive (question 3).
Dans la suite du problème, A désigne une matrice symétrique réelle définie positive.
On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par la relation (II) avec $V_0 = \mu I_n$ et $\mu > 0$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de A et $e_1, \ldots, e_n$ une base orthonormée propre correspondante. Soit k dans $\mathbf{N}$ et ℓ dans $\{1, \ldots, n\}$ quelconques.

16) Démontrer que V_k est symétrique réelle définie positive admettant $e_1, \ldots, e_n$ comme base propre, dont on notera $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n}$ les valeurs propres correspondantes. Trouver une relation entre $\lambda_{k+1,\ell}$ et $\lambda_{k,\ell}$.

17) Démontrer

$$\frac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\frac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{(2^{k+1})} \; .$$

18) Déterminer la limite de la suite $(V_i)_{i\in\mathbf{N}}$.

E - Stabilité

On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par la relation (II) avec $V_0 = \sqrt{A}$. Soit $\varepsilon > 0$ et i, j deux indices distincts de $\{1, \ldots, n\}$. On note $C_1, \ldots, C_n$ les vecteurs colonnes correspondant à $e_1, \ldots, e_n$ définis dans la partie précédente et on pose $\Delta = \varepsilon C_i C_j^{\mathrm{T}}$.
Soit $\widehat{V_0} = V_0 + \Delta$. La matrice $\widehat{V_1}$ est calculée par la relation (II) à partir de $\widehat{V_0}$ et on pose $\Delta_1 = \widehat{V_1} - V_1$. Ensuite $\widehat{V_2}$ est calculé à partir de $\widehat{V_1}$ par la relation (II), puis $\widehat{V_3}$, $\widehat{V_4}, \ldots$ de la même manière.

19) Démontrer les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (V_0+\Delta)^{-1} & = & V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} \\ \Delta_1 & = & \dfrac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}A)\ . \end{array} \right.$$

20) Déterminer la valeur η dans $\mathbf{R}$ telle que pour tout k dans $\mathbf{N}$,

$$\widehat{V_k} = \sqrt{A} + \eta^k \Delta\ .$$

21) On appelle CONDITIONNEMENT de A le rapport entre sa plus grande valeur propre et sa plus petite. Que doit vérifier le conditionnement de A pour que la suite $(\widehat{V_k})_{k\in\mathbf{N}}$ converge ?

Deuxième épreuve – Mines-Ponts 2018 - MP

A - Quelques exemples

1) Soit X dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Alors X est une racine carrée de I_2 si et seulement si le polynôme Y^2-1 annule X, i.e. le polynôme minimal de X en est un diviseur, à savoir $Y-1$, $Y+1$ ou Y^2-1. Dans les deux premiers cas X est scalaire et est aussi un polynôme en I_2, et on a $X=\pm I_2$. Dans le dernier cas, comme le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, et que ces deux polynômes sont unitaires de degré 2, Y^2-1 est le polynôme caractéristique de X, ce qui équivaut à $\operatorname{tr}(X)=0$ et $\det(X)=-1$, autrement dit $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a\end{pmatrix}$ avec $(b,c)\in\mathbf{C}^2$ et a une racine carrée de $1-bc$. Un polynôme en I_2 étant scalaire, il est de trace nulle si et seulement si c'est la matrice nulle et n'est alors pas de carré I_2. En particulier pour tout couple (b,c) de nombres complexes, A admet au moins une (et au plus deux) racine carrée admettant (b,c) comme antidiagonale. En conclusion $\boxed{A \text{ admet une infinité de racines carrées et seules } I_2 \text{ et } -I_2 \text{ sont des polynômes en } A.}$
Remarque : il revient au même de dire que X est diagonalisable de spectre inclus dans $\{\pm 1\}$ et donc $X=\pm I_2$ ou $X\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$. Cette dernière condition fournit un ensemble de solution en bijection avec les couples de droites distinctes de $\mathbf{C}^2$ (viz. les droites propres de X).

2) Soit X dans $\mathscr{M}_3(\mathbf{C})$. Si $X^2=A$, alors $X^4=0$ et donc X est nilpotent. Puisque X^2 n'est pas nul, le polynôme minimal de X est une puissance de Y strictement supérieure à 2, donc c'est Y^3 car il est de degré inférieur à 3, d'après le théorème de Cayley-Hamilton. On a alors

$$\{0\}\subsetneq \operatorname{Ker}(X)\subsetneq\operatorname{Ker}(X^2)=\mathrm{V}ect\,(e_1,e_2)\subsetneq\operatorname{Ker}(X^3)=\mathbf{C}^3$$

et

$$\{0\}=\operatorname{Im}(X^3)\subsetneq\operatorname{Im}(X^2)=\mathrm{V}ect\,(e_1)\subsetneq\operatorname{Im}(x)\subsetneq\mathbf{C}^3\,.$$

Enfin comme $X^3=0$, on a $\operatorname{Im}(X^2)\subset\operatorname{Ker}(X)$ et $\operatorname{Im}(X)\subset\operatorname{Ker}(X^2)$. Par dimension on en déduit $\operatorname{Ker}(X)=\operatorname{Im}(X^2)=\mathrm{V}ect\,(e_1)$ et $\operatorname{Im}(X)=\operatorname{Ker}(X^2)=\mathrm{V}ect\,(e_1,e_2)$, puis $X(e_1)=0$, $X(e_2)\in X(\operatorname{Im}(X))=\operatorname{Im}(X^2)$ et donc X est triangulaire supérieure stricte, i.e. de la forme $\left(\begin{smallmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ avec $(a,b,c)\in\mathbf{C}^3$. Réciproquement une telle matrice est de carré A si et seulement si $ac=1$. Les racines carrés de A sont donc exactement les matrices de la forme $\left(\begin{smallmatrix}0&a&b\\0&0&a^{-1}\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ avec $(a,b)\in\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}$. Par ailleurs puisque A est nilpotente d'ordre 2, les polynômes en A sont de la forme uI_3+vA et donc leur première surdiagonale est nulle, ce qui n'est le cas d'aucune racine carrée de A, i.e. $\boxed{A \text{ admet une infinité de racines carrées et aucune d'elles n'est un polynôme en } A.}$

3) Soit X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ symétrique de carré A. D'après le théorème spectral X et A sont orthodiagonalisables. Comme A est un polynôme en X, X et A sont simultanément orthodiagonalisables, i.e.

$$\mathbf{R}^n=\oplus_{(\lambda,\mu)\in\operatorname{Sp}(X)\times\operatorname{Sp}(A)}\operatorname{Ker}(X-\lambda I_n)\cap\operatorname{Ker}(A-\mu I_n)\,.$$

Or pour λ et μ réels et U dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on a $XU=\lambda U\implies AU=\lambda^2U$, de sorte qu'on a $\operatorname{Ker}(X-\lambda I_n)\cap\operatorname{Ker}(A-\mu I_n)=\{0\}$ si $\mu\neq\lambda^2$ et $\operatorname{Ker}(X-\lambda I_n)\subset\operatorname{Ker}(A-\mu I_n)$ sinon. Si on suppose de plus que le spectre de X est inclus dans $\mathbf{R}_+^*$, pour λ et μ dans $\operatorname{Sp}(X)$, on a $\lambda^2=\mu^2\iff\lambda=\mu$ et donc $\lambda\neq\mu\implies\operatorname{Ker}(A-\lambda^2I_n)\cap\operatorname{Ker}(A-\mu^2I_n)=\{0\}$. On en déduit une inclusion de sommes directes termes à termes

$$\mathbf{R}^n=\oplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(X)}\operatorname{Ker}(X-\lambda I_n)\subset\oplus_{\lambda\in\operatorname{Sp}(X)}\operatorname{Ker}(A-\lambda^2I_n)$$

et donc, par dimension, pour tout λ dans $\operatorname{Sp}(X)$, $\operatorname{Ker}(X-\lambda I_n)=\operatorname{Ker}(A-\lambda^2I_n)$. Autrement dit, en notant p_μ le projecteur sur l'espace propre $\operatorname{Ker}(A-\mu I_n)$ de A, on a $X=\sum_{\mu\in\operatorname{Sp}(A)}\sqrt{\mu}p_\mu$. Réciproquement puisque, pour μ et ν distincts dans $\operatorname{Sp}(A)$, on a $p_\mu p_\nu=0$ puisque les espaces propres de A sont en somme directe, un tel X vérifie $X^2 = \sum_{\mu \in \mathrm{Sp}(A)} \mu p_\mu = A$, par diagonalisabilité de A, i.e.

$\boxed{A \text{ admet une unique racine carré symétrique réelle définie positive.}}$

Remarque : on dispose par interpolation de LAGRANGE d'un polynôme de degré au plus n P tel que, pour μ dans $\mathrm{Sp}(A)$, $P(\mu) = \sqrt{\mu}$ et alors on a $P(A) = X$, i.e. l'unique racine carrée symétrique réelle définie positive de A est un polynôme en A.

B - Existe et calcul d'une racine carrée

4) Puisque U est triangulaire supérieure son carré l'est aussi et pour i et j entiers vérifiant $1 \leq i \leq j \leq n$, le terme d'indice (i,j) de U^2 est donné par $\sum_{k=1}^{n} u_{i,k}u_{k,j}$ soit, en tenant compte du caractère triangulaire supérieur, $\sum_{k=i}^{j} u_{i,k}u_{k,j}$. En différenciant le cas $i = j$ et $i < j$, $U^2 = T$ est donc équivalent au système $\boxed{\left\{\begin{array}{rcll} u_{i,i}^2 & = & t_{i,i} & (1 \leq i \leq n) \\ (u_{i,i}+u_{j,j})u_{i,j} & = & t_{i,j} - \displaystyle\sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j} & (1 \leq i < j \leq n) \end{array}\right.}$. On commence par résoudre les n premières équations. Pour k dans $[\![1;n]\!]$, on remarque que $t_{k,k}$ est non nul car T est inversible et, étant triangulaire, son déterminant est le produit de ses éléments diagonaux. On dispose d'une écriture de $t_{k,k}$ sous forme exponentielle $t_{k,k} = |t_{k,k}|\, e^{i\theta_k}$ avec $-\pi < \theta_k \leq \pi$. On pose alors $u_{k,k} = \sqrt{|t_{k,k}|}e^{i\theta_k/2}$. Par construction $u_{k,k}$ est une racine carrée de $t_{k,k}$, de partie réelle positive et, si sa partie réelle est nulle, sa partie imaginaire est strictement positive. Soit alors i et j dans $[\![1;n]\!]$, $u_{i,i} + u_{j,j}$ est de partie réelle strictement positive sauf si $u_{i,i}$ et $u_{j,j}$ sont imaginaires purs et alors la partie imaginaire de $u_{i,i} + u_{j,j}$ est strictement positive. Dans tous les cas $u_{i,i} + u_{j,j}$ est non nul. On résout ensuite, à i fixé dans $[\![1;n-1]\!]$, la seconde partie du système par récurrence finie sur j dans $[\![i+1;n]\!]$, i.e. on pose

$$u_{i,j} = \frac{1}{u_{i,i}+u_{j,j}}\left(t_{i,j} - \sum_{k=i+1}^{j-1} u_{i,k}u_{k,j}\right),$$

ce qui est licite d'après l'étude précédente.

$\boxed{\text{Le système admet une solution } U \text{ avec } u_{i,i}+u_{j,j} \neq 0 \text{ pour } 1 \leq i,j \leq n.}$

5) Puisque $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, χ_A est scindé sur $\mathbf{C}$ et donc A est trigonalisable sur $\mathbf{C}$ et on dispose de P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ et T triangulaire supérieure dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tels que $A = P^{-1}TP$. De plus les valeurs propres de T sont celles de A (avec multiplicité) et en particulier T est inversible. On dispose d'après la question précédente de U triangulaire supérieure dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $U^2 = T$. En posant $B = P^{-1}UP$, il vient $B^2 = A$, i.e. $\boxed{A \text{ admet une racine carrée.}}$ Les arguments donnés à la question précédente permettent de choisir la diagonale de U de sorte que ses éléments soient de partie réelle positive et soient des racines carrées des valeurs propres de T, donc de A. Si celles-ci sont dans $\widetilde{\mathbf{C}}$, la diagonale de U ne comporte aucun imaginaire pur. Comme cette diagonale est aussi l'ensemble des valeurs propres de B comptées avec multiplicité, celles-ci ont une partie réelle strictement positive, i.e.

$\boxed{A \text{ admet une racine carrée dont les valeurs propres sont de partie réelle strictement positive.}}$

C - Algorithme de NEWTON

6) On pose $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$, $C = AB = (c_{i,j})$ de sorte qu'on a

$$\|C\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}\right|^2 \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}|\,|b_{k,j}|\right)^2.$$

par inégalité triangulaire et croissance du carré sur $\mathbf{R}_+$. Il résulte alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|C\|^2 \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\right)^2\left(\sum_{\ell=1}^{n}|b_{\ell,j}|\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{i,k}|\right)^2\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n}|b_{\ell,j}|\right)^2 ,$$

i.e., par croissance de la racine carrée, $\boxed{\|AB\| \le \|A\|\,\|B\|.}$

7) Puisque $\mathbf{C}$ est algébriquement clos, m_A est scindé et comme ses racines sont les valeurs propres de A, par multiplicativité du déterminant $m_A(B)$ est inversible si et seulement si pour toute valeur propre λ de A on a $\det(B-\lambda I_n)\neq 0$, i.e. λ n'est pas valeur propre de B :

$\boxed{m_A(B) \text{ est inversible si et seulement si } A \text{ et } B \text{ n'ont pas de valeur propre commune.}}$

Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $AM=MB$ alors, par récurrence immédiate, $\forall k\in\mathbf{N}\ A^kM=MB^k$ et donc, par linéarité, $\forall P\in\mathbf{C}[X]\ P(A)M=MP(B)$. En particulier pour $P=m_A$ on obtient $Mm_A(B)=0$ et $\mathrm{Im}(m_A(B))\subset \mathrm{Ker}(M)\subsetneq \mathbf{C}^n$, de sorte que $m_A(B)$ n'est pas de rang n, donc n'est pas inversible. Ce qui précède montre que $\boxed{A \text{ et } B \text{ ont une valeur propre commune.}}$

8) Soit λ une valeur propre commune à A et B. Comme le polynôme caractéristique de B coïncide avec celui de sa transposée, c'est aussi une valeur propre de B^{T}. On dispose alors de X et Y des vecteurs propres de A et B^{T} associés à λ. Comme $B^{\mathrm{T}}Y=\lambda Y$, on a par transposition $Y^{\mathrm{T}}B=\lambda Y^{\mathrm{T}}$ et donc, en posant $M=XY^{\mathrm{T}}$, $AM=\lambda M=MB$. De plus, en notant $X=(x_i)$ et $Y=(y_j)$, on a $M=(x_iy_j)_{1\le i,j\le n}$ et donc $M\neq 0$ puisque X et Y sont des vecteurs propres donc ont au moins une coordonnée non nulle chacun. Donc $\boxed{M \text{ est non nulle et vérifie } AM=MB.}$

9) La fonction F est la composée de l'application linéaire $X\mapsto (X,X)$, de l'application bilinéaire $(X,Y)\mapsto XY$ et de la translation $M\mapsto M-A$ définies respectivement sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})\times\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, chacun étant vu comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Ces applications sont donc toutes de classe C^∞ et leurs différentielles sont respectivement données par $H\mapsto(H,H)$, $(H,K)\mapsto XH+KY$ et Id. On en déduit que pour H dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on a $\boxed{\mathrm{d}F_X(H)=XH+HX.}$ On en déduit $H\in\mathrm{Ker}(\mathrm{d}F)\iff XH=H(-X)$. Les deux questions précédentes montrent que $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}F)$ est réduit à $\{0\}$ si et seulement si X et $-X$ n'ont pas de valeurs propres communes. Comme les valeurs propres de $-X$ sont les opposées de celles de X, on en déduit que $\mathrm{d}F_X$ est inversible si et seulement si $\boxed{\text{aucune valeur propre de } X \text{ n'est l'opposée d'une valeur propre de } X.}$ En particulier, comme 0 est son propre opposé, dans ce cas 0 n'est pas valeur propre de X, i.e. $\boxed{X \text{ est inversible.}}$

10) D'après la question 5 les valeurs propres de X^* sont de partie réelle strictement positive et donc leurs opposés sont de partie réelle strictement négative. La condition de la question précédente est alors satisfaite et donc $\boxed{\mathrm{d}F_{X^*} \text{ est inversible.}}$

Comme remarqué précédemment F est la composée de trois applications de classe C^∞ et l'est donc elle aussi. En particulier $\mathrm{d}F$ est continu. Comme l'ensemble des automorphismes du $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est ouvert dans $\mathrm{End}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}))$, son image réciproque par $\mathrm{d}F$ l'est aussi et contient donc une boule ouverte centrée en X^*, et donc aussi une boule fermée de rayon moindre : on dispose d'un réel strictement positif r tel que $\boxed{\forall X\in\overline{B}(X^*,r)\ \mathrm{d}F_X \text{ est inversible.}}$

11) Par définition de X^*, on a $F(X^*)=0$ et donc $\boxed{G(X^*)=X^*.}$

Soit H dans $\overline{B}(0,r)$, alors $X^*+H\in\overline{B}(X^*,H)$ et on peut donc calculer $G(X^*+H)$. Il vient

$$G(X^*+H)-G(X^*)=H-(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}((X^*+H)^2-A)$$

et comme $(X^*+H)^2 = A + X^*H + HX^* + H^2$ et $\mathrm{d}F_{X^*+H}(H) = X^*H + HX^* + 2H^2$, il vient

$$G(X^*+H) - G(X^*) = H - (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(\mathrm{d}F_{X^*+H}(H) - H^2)$$

et donc, par linéarité de $(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}$, $\boxed{G(X^*+H) - G(X^*) = (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(H^2).}$

Pour établir la dernière identité, on remarque que toutes les différentielles considérées sont bien inversibles. On a

$$\mathrm{d}F_{X^*} \circ (\mathrm{Id} + (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1} \circ \mathrm{d}F_H) = \mathrm{d}F_{X^*} + \mathrm{d}F_H$$

par linéarité de $\mathrm{d}F_{X^*}$. Or la formule de la question 9 montre que $X \mapsto \mathrm{d}F_X$ est linéaire. Le membre de droite est donc égal à $\mathrm{d}F_{X^*+H}$ et l'assertion en découle par passage à l'inverse :
$\boxed{(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1} = (\mathrm{Id} + (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1} \circ \mathrm{d}F_H)^{-1} \circ (\mathrm{d}F_{X^*})^{-1}.}$

12) Puisque la fonction inverse est continue sur $\mathrm{GL}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}))$, car c'est une fraction rationnelle, et que $\mathrm{d}F$ est continu, l'expression précédente montre que $H \mapsto (\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}$ est continu sur $\overline{B}(0,r)$. On considère alors l'application de $\overline{B}(0,r) \times \overline{B}(0,1)$ qui à (H,V) associe $(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(V)$. Elle est définie sur un produit de compacts, d'après le théorème de Heine-Borel et puisque $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est de dimension finie, et est continue car elle est composée de $(H,V) \mapsto ((\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}, V)$, qui est continu comme produit cartésien de fonctions continues, et de l'évaluation $(f,V) \mapsto f(V)$ qui est bilinéaire sur l'espace de dimension finie $\mathrm{End}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C})) \times \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Il résulte du théorème de Weierstrass qu'elle est bornée. En notant C une constante strictement positive telle que

$$\forall (H,V) \in \overline{B}(0,r) \times \overline{B}(0,1) \qquad \left\|(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(V)\right\| \leq C$$

il vient en utilisant la question 6 pour H non nul dans $B(0,r)$, $\left\|H^2\right\| \leq \|H\|^2$, donc $\left\|\frac{1}{\|H\|^2} H^2\right\| \leq 1$, puis par linéarité

$$\frac{1}{\|H\|^2} \left\|(\mathrm{d}F_{X^*+H})^{-1}(H^2)\right\| \leq C$$

et donc, par positivité, $\|G(X^*+H) - G(X^*)\| \leq C\|H\|^2$. L'inégalité étant tautologique pour $H = 0$, on en déduit avec la question 11, i.e. $G(X^*) = X^*$, $\boxed{\forall X \in B(X^*,r) \ \|G(X) - X^*\| \leq C\|X - X^*\|^2.}$

13) Pour X_0 dans $B(X^*,r)$, si l'algorithme (N) permet de définir X_k pour un certain entier naturel k, avec $X_k \in B(X^*,\rho)$ et $0 < \rho \leq r$, la question 10 montre que $\mathrm{d}F_{X_k}$ est inversible et on peut donc définir X_{k+1}. La question précédente donne alors $X_{k+1} \in B(X^*, C\rho^2)$ de sorte que, si ρ vérifie de plus $\rho C \leq 1$, on a $X_{k+1} \in B(X^*,\rho)$. Par conséquent en posant $\rho = \min(r, C^{-1})$, la suite (X_i) est bien définie dès qu'on choisit X_0 dans $B(X^*,\rho)$. La question précédente donne également $\|X_{k+1} - X^*\| \leq C\|X_k - X^*\|^2$ et une récurrence immédiate fournit $\|X_k - X^*\| \leq C^{-1}(C\|X_0 - X^*\|)^{(2^k)}$ et donc

$\boxed{\text{si } 0 < \rho \leq \min(r, C^{-1}) \text{, alors pour } X_0 \text{ dans } B(X^*,\rho) \text{ et tout } k \text{ dans } \mathbf{N},\ X_k \text{ est bien défini et vérifie } \|X_k - X^*\| \leq C^{-1}(\rho C)^{(2^k)}.}$

En utilisant l'inégalité avec $\|X_0 - X^*\|$ le membre de droite est le terme général d'une suite convergente car $C\|X_0 - X^*\| < \rho C \leq 1$. On en conclut que $\boxed{\text{la suite } (X_k) \text{ converge vers } X^*.}$

D - Forme équivalente

14) Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{d}F_M$ soit inversible et $M' = M + (\mathrm{d}F_M)^{-1}(-F(M))$. Puisque $\mathrm{d}F_M$ est inversible, on dispose de H dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{d}F_M(H) = -F(M)$, i.e. en utilisant la formule de la question 9, $MH + HM = A - M^2$. On a alors, par linéarité de $(\mathrm{d}F_M)^{-1}$, $M - (\mathrm{d}F_M)^{-1}(F(M)) = M + H$ avec $MH + HM = A - M^2$. On en déduit que si la k^{e} étape de (N) est définie, la k^{e} étape de (I) l'est

aussi et qu'elles définissent la même matrice. Et donc si (X_k) est bien définie par (N) et qu'on pose $U_0 = X_0$, alors $\boxed{(U_k) \text{ est bien et uniquement définie, et égale à } (X_k).}$

Soit maintenant M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ tel que l'équation $MH + HM = A^2 - M$ admette une unique solution pour H dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Comme on a affaire à une équation linéaire en H, l'unicité de la solution est équivalente à l'inversibilité de l'application linéaire $H \mapsto MH + HM$, i.e. de $\mathrm{d}F_M$, et l'unique solution est alors donnée par $H = (\mathrm{d}F_M)^{-1}(A^2 - M)$, de sorte qu'alors $M - (\mathrm{d}F_M)^{-1}(F(M)) = M + H$. On conclut si la k^{e} étape de (I) est définie, la k^{e} étape de (N) l'est aussi et qu'elles définissent la même matrice. Et donc si (U_k) est bien et uniquement définie par (I) et qu'on pose $X_0 = U_0$, alors $\boxed{(X_k) \text{ est bien définie et égale à } (U_k).}$

15) Puisque la suite (X_k) est bien définie, pour tout entier naturel k, $\mathrm{d}F_{X_k}$ est inversible et donc X_k l'est aussi, d'après la question 9. Comme $U_k = X_k$, $\boxed{U_k \text{ est inversible.}}$ Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ commutant avec A et telle que $\mathrm{d}F_M$ soit inversible. Alors d'après la question 9 M est inversible. Puisque M commute avec A, M^{-1} aussi, en multipliant l'égalité $AM = MA$ par M^{-1} des deux côtés. La matrice G donnée par $G = \frac{1}{2}(M^{-1}A - M)$ commute alors avec A et M, et on a $MG + GM = 2MG = A - M^2$, i.e.

$$\frac{1}{2}(M + M^{-1}A) = M + G = M - (\mathrm{d}F_M)^{-1}(F(M))$$

et $M + G$ commute avec A en tant que somme de deux matrices commutant à A. On en déduit que si la k^{e} étape de (N) est bien définie et effectuée avec une matrice commutant à A, alors la k^{e} étape de (II) est bien définie, et que ces deux étapes définissent la même matrice, par ailleurs commutant avec A. Puisque (X_k) et (U_k) sont bien définies et coïncident, et que U_0 commute avec A, on en déduit que (V_k) est bien définie, coïncide avec (U_k) et est formée de matrices commutant à A : $\boxed{(V_k) \text{ est bien définie et pour tout } k \text{ dans } \mathbf{N}\ U_k \text{ commute à } A \text{ et } U_k = V_k.}$

16) Soit M dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$, symétrique définie positive et commutant avec A. Alors M^{-1} commute avec A et est symétrique réelle. Comme le produit de deux matrices symétriques réelles commutant entre elles est symétrique, la matrice G donnée par $M' = \frac{1}{2}(M + M^{-1}A)$ est symétrique réelle et commute avec A. Si X est un vecteur propre commun à A et M, associé respectivement aux valeur propre λ et ν, alors c'est aussi un vecteur propre pour M^{-1} associé à la valeur propre ν^{-1} et donc aussi pour M' associé à la valeur propre $\frac{1}{2}(\nu + \nu^{-1}\lambda)$. Puisque λ et ν sont strictement positifs, cette valeur propre est également strictement positive. Par hypothèse les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ forment une base propre commune à A et V_0, puisque cette dernière est scalaire, associée à des valeurs propres strictement positives, car $\mu > 0$, et donc puisque V_0 est inversible, symétrique réelle définie positive et commute à A, étant scalaire avec $\mu > 0$, l'algorithme (II) construit une suite (V_i) admettant pour tout entier naturel i la famille $e_1, \ldots, e_n$ comme base propre, associée à des valeurs propres strictement positives, donc $\boxed{V_k \text{ est symétrique réelle définie positive et admet } e_1, \ldots, e_n \text{ comme vecteurs propres.}}$ De plus, d'après ce qui précède, $\boxed{\lambda_{k+1,\ell} = \dfrac{\lambda_{k,\ell}^2 + \lambda_\ell}{2\lambda_{k,\ell}}.}$

17) La relation précédente donne $\lambda_{k+1,\ell} \pm \sqrt{\lambda_\ell} = \dfrac{(\lambda_{k,\ell} \pm \sqrt{\lambda_\ell})^2}{2\lambda_{k,\ell}}$ et donc, puisque $\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}$ est strictement positif donc non nul, $\dfrac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\lambda_{k,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^2$ et donc, puisque $\lambda_{0,\ell} = \mu$ car $V_0 = \mu I_n$, une récurrence immédiate donne $\boxed{\dfrac{\lambda_{k+1,\ell} - \sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{k+1,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \left(\dfrac{\mu - \sqrt{\lambda_\ell}}{\mu + \sqrt{\lambda_\ell}}\right)^{2^{k+1}}.}$

18) Par stricte positivité de μ et $\sqrt{\lambda_\ell}$, on a $\left|\mu - \sqrt{\lambda_\ell}\right| < \mu + \sqrt{\lambda_\ell}$ et donc le membre de droite de l'équation

précédente est le terme général d'une suite tendant vers 0. On en déduit $1 - 2\dfrac{\sqrt{\lambda_\ell}}{\lambda_{i,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell}} = \mathrm{o}(1)$, i.e. $\lambda_{i,\ell} + \sqrt{\lambda_\ell} \sim 2\sqrt{\lambda_\ell}$ ou encore $\lim \lambda_{i,\ell} = \sqrt{\lambda_\ell}$. Comme $e_1, \ldots, e_n$ est une base d'orthodiagonalisation de V_k, on a, en notant C_ℓ le vecteur colonne correspondant à e_ℓ, $V_k = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_{k,\ell} C_\ell C_\ell^{\mathrm{T}}$. Comme $\lim \lambda_{i,\ell} = \sqrt{\lambda_\ell}$, par homogénéité de la norme on a aussi $\lim \lambda_{i,\ell} C_\ell C_\ell^{\mathrm{T}} = \sqrt{\lambda_\ell} C_\ell C_\ell^{\mathrm{T}}$ et donc, par linéarité de la limite, (V_i) converge vers $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\lambda_\ell} C_\ell C_\ell^{\mathrm{T}}$. De plus cette dernière matrice est symétrique réelle, comme somme de telles matrices, de base d'orthodiagonalisation $e_1, \ldots, e_n$, donc de valeurs propres $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}$. Elle est donc définie positive et son carré est $\displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} \lambda_\ell C_\ell C_\ell^{\mathrm{T}}$, par orthonomalité de $e_1, \ldots, e_n$. D'après l'unicité obtenue en question 3 et puisqu'un réel strictement positif est en particulier un nombre complexe de partie réelle strictement positive, on en conclut que cette limite est $\sqrt{A}$: $\boxed{\lim V_i = \sqrt{A}.}$

E

19) Puisque V_0 est symétrique définie positive, elle est inversible et on a

$$(V_0 + \Delta)(V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}) = I_n - (\Delta V_0^{-1})^2 .$$

Or $e_1, \ldots, e_n$ est une base propre pour V_0, donc aussi pour V_0^{-1}, et son image est nulle par ΔV_0^{-1} à l'exception de e_j dont l'image est proportionnelle à e_i. En particulier ΔV_0^{-1} est de carré nul et donc $V_0 + \Delta$ est inversible et on a $\boxed{(V_0 + \Delta)^{-1} = V_0^{-1} - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1}.}$

On en déduit $\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta + ((V_0 + \Delta)^{-1} - V_0^{-1})A)$, i.e. $\boxed{\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0^{-1} A).}$

20) Puisqu'on a $A = V_0^2$, on a $\Delta_1 = \frac{1}{2}(\Delta - V_0^{-1}\Delta V_0)$. L'image de la base $e_1, \ldots, e_n$ par $V_0^{-1}\Delta V_0$ est nulle à l'exception de celle de e_j qui vaut $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)\varepsilon e_i$ et donc $V_0^{-1}\Delta V_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)\Delta$, i.e. $\widehat{V_1} = \sqrt{A} + \eta\Delta$ avec $\eta = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right)$ et on en déduit que le changement de ε en $\eta\varepsilon$ change $\widehat{V_0}$ en $\widehat{V_1}$. On peut donc appliquer ce qui précède avec $\eta\varepsilon$ au lieu de ε, pour obtenir $\widehat{V_2} = \sqrt{A} + \eta^2\Delta$. Une récurrence immédiate permet d'en conclure $\boxed{\widehat{V_k} = \sqrt{A} + \eta^k\Delta \text{ avec } \eta = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}}\right).}$

21) Puisque Δ est non nul, la relation précédente montre que $(\widehat{V_k})$ converge si et seulement si $-1 < \eta \leq 1$, i.e. $-1 \leq \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_i}} < 3$ ou encore par positivité de la racine carrée et croissance du carré sur $\mathbf{R}_+$, $\frac{\lambda_j}{\lambda_i} < 9$. Puisque les valeurs propres de A sont strictement positives, le membre de gauche est maximal lorsque λ_j et λ_i sont respectivement les plus grande et plus petite valeurs propres de A, i.e. $\boxed{(\widehat{V_k}) \text{ converge si et seulement si le conditionnement de } A \text{ est strictement inférieur à 9.}}$

Le sujet initial comportait des coquilles et des tournures particulièrement peu heureuses. Et pourtant le rapport du jury est particulièrement agressif et peu amène. Il est même parfois franchement de mauvaise foi ! Je vous laisse juger.
Voici les principaux problèmes.
En **partie III**, $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est muni d'une norme. A priori le sujet traite donc d'un espace vectoriel sur $\mathbf{C}$.
Attention ! Les espaces vectoriels normés sur $\mathbf{C}$ sont au programme ! La norme est tout de même un réel positif et on a $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$, où $|\lambda|$ est le module du nombre complexe λ.
Par contre les espaces vectoriels préhilbertiens ne sont définis que sur $\mathbf{R}$ dans le cadre du programme. Les espaces préhilbertiens complexes existent (et on en parle dans les compléments du cours).
Par contre la **différentiablité n'est définie que pour les espaces vectoriels normés réeels** ! Et c'est un gros problème dans le sujet initial car à aucun moment le sujet ne dit qu'on envisage $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ comme un espace réel.

La **question 13** est carrément **fausse**. On demande de montrer

$$\|X_k - X^*\| \leq \frac{(\rho\sqrt{C})^{(2^k)}}{C} .$$

C'est faux pour $k = 0$. Erreur de débutant sur une récurrence.

La **question 14** est très confuse car elle n'évoque pas la suite (H_k). Se pose donc la question de savoir si (U_k) est définie ou bien si elle est **uniquement** définie. Le rapport prétend que c'est implicite. C'est carrément de mauvaise foi.

Pour la fin du sujet, à partir de la question 16, le sujet écrit :
On considère la suite $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par la relation (II) avec $V_0 = \mu I_n$ et $\mu > 0$. On fixe une matrice orthogonale P de sorte que $A = PDP^{\mathrm{T}}$ où D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de A, ordonnées par ordre croissant. On note $e_1, \ldots, e_n$ des vecteurs propres correspondants.
On n'a **aucun besoin** de cette matrice orthogonale, ni d'ordonner les valeurs propres.

En **question 16**, le sujet est encore une fois **ambigü**. Il demande de montrer que V_k est symétrique réelle définie positive de mêmes vecteurs propres $e_1, \ldots, e_n$ que A dont on notera $\lambda_{k,1}, \ldots, \lambda_{k,n}$ les valeurs propres correspondantes.
Sauf que les vecteurs propres ne sont pas uniquement déterminés par A ni V_k. On ne dit pas **les** vecteurs propres et il y a une bonne raison !

Enfin en **question 18** on demande de déterminer la limite de la suite $(V_k)_{k\in\mathbf{N}}$, alors que k a été **fixé**.

Bref ce sujet devrait faire rougir plutôt et amener des excuses publiques, plutôt que le torrent d'aboiements contenu dans le rapport.