

# MINES-PONTS MP 2017 – PREMIÈRE ÉPREUVE

## Étude d'un endomorphisme d'un espace de fonctions numériques

Soit  $I$  un intervalle de la forme  $[-a; a]$  où  $a$  est un réel strictement positif. Dans tout le problème, on considère les ensembles suivants :

- $\mathcal{E}$  le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel constitué des applications de  $I$  dans  $\mathbf{C}$  de classe  $C^\infty$  ;
- $\mathcal{D}$  la partie de  $\mathcal{E}$  constituée de ses éléments développables en série entière sur un voisinage de 0 ;
- $\mathcal{P}$  la partie de  $\mathcal{E}$  constituée de ses éléments polynomiaux.

Pour tout  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on note

$$W_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt$$

et si  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ , on note  $u(f)$  et  $v(f)$  les applications de  $I$  dans  $\mathbf{C}$  définies par les formules

$$\forall x \in I, \quad u(f)(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(x \sin(t)) dt$$

$$\forall x \in I, \quad v(f)(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin(t)) dt$$

*Les candidat·e·s devront justifier leurs affirmations.*

### PARTIE A - Préliminaires

1. Justifier que  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{E}$ .
2. a) Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$ . Montrer que  $u(f)$  et  $v(f)$  sont bien définis et que  $u(f)$  et  $v(f)$  sont lipschitziennes.  
b) En utilisant l'inégalité de TAYLOR-LAGRANGE, montrer que, pour  $x$  dans  $I$ ,  $u(f)$  et  $v(f)$  admettent des développements limités à l'ordre 1 en  $x$ , et les préciser.  
c) En déduire que  $u(f)$  et  $v(f)$  appartiennent à  $\mathcal{E}$ .  
d) Montrer que l'on définit ainsi des endomorphismes  $u$  et  $v$  de  $\mathcal{E}$ .
3. Montrer que  $\mathcal{P}$  est stable par  $u$  et  $v$ .
4. Établir pour  $n$  dans  $\mathbf{N}$  une relation simple entre  $W_{n+2}$  et  $W_n$ . En déduire pour tout  $n$  dans  $\mathbf{N}$ ,

$$W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$$

5. Montrer que la suite  $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement décroissante. Déterminer sa limite et donner un équivalent de cette suite.

### PARTIE B - Étude de la continuité de $u$ et $v$

On considère la norme  $M$  sur  $\mathcal{E}$  définie pour tout  $f$  dans  $\mathcal{E}$  par la formule

$$M(f) = \max_{x \in I} |f(x)|$$

6. Vérifier que  $M$  est bien définie et montrer que  $u$  est une application continue de l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{E}, M)$  dans lui-même.
7. L'application  $v$  est-elle continue de  $(\mathcal{E}, M)$  dans lui-même ?
8. Vérifier que l'application  $N : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{R}$  définie par  $N(f) = M(f) + M(f')$  est une norme sur  $\mathcal{E}$ , et montrer que  $v$  est continue de  $(\mathcal{E}, N)$  dans  $(\mathcal{E}, M)$ . Les normes  $N$  et  $M$  sont-elles équivalentes ?
9. Si  $f \in \mathcal{E}$  et  $\varepsilon > 0$ , montrer qu'il existe  $p \in \mathcal{P}$  tel que  $f(0) = p(0)$  et  $|f'(x) - p'(x)| \leq \varepsilon$  pour tout  $x \in I$ . En déduire que  $\mathcal{P}$  est dense dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{E}, N)$ .

### PARTIE C - Étude de l'inversibilité de $u$ et $v$

10. Déterminer les restrictions de  $u \circ v$  et  $v \circ u$  à  $\mathcal{P}$ .
11. Déterminer  $(u \circ v)(f)$  pour tout  $f \in \mathcal{E}$ . Le réel 0 est-il valeur propre de l'endomorphisme  $v$  ?
12. Déterminer également  $(v \circ u)(f)$  pour tout  $f \in \mathcal{E}$ . Conclure.

*Applications.*

13. a) Montrer que la fonction  $\text{sh} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  donnée par  $\text{sh}(t) = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$  définit une bijection de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ , de classe  $C^\infty$  et dont la réciproque est également de classe  $C^\infty$ . On note cette réciproque  $\text{argsh}$ . Donner les dérivées première et seconde de  $\text{argsh}$ .
- b) Pour tout  $f \in \mathcal{E}$ , donner une relation liant  $v(f)$  et  $u(f')$ . Calculer  $u(\arctan')$  à l'aide du changement de variable  $z = \tan(t)$  et en déduire  $u(\text{argsh}'')$ .
14. Montrer que  $f \in \mathcal{E}$  est paire (resp. impaire) si et seulement si  $u(f)$  l'est. Qu'en est-il pour  $v$  ?

### PARTIE D - Étude des valeurs propres de $u$ et $v$

15. Montrer que  $\lambda$  est une valeur propre de  $v$  si et seulement si  $\frac{1}{\lambda}$  est une valeur propre de  $u$ . Qu'en est-il des vecteurs propres correspondants ?
16. Montrer que  $\mathcal{D}$  est stable par  $u$ . L'est-il par  $v$  ?

On considère une valeur propre  $\lambda$  de  $u$ , de vecteur propre associé  $f \in \mathcal{E}$ .

17. Vérifier que si  $n$  appartient à  $\mathbf{N}$ , le nombre donné par  $m_n = \max_{t \in I} |f^{(n)}(t)|$  est bien défini et établir

$$\forall x \in I, \quad |\lambda| \left| f^{(n)}(x) \right| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}.$$

En déduire  $f \in \mathcal{P}$ .

18. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$  et  $v$ .
19. L'espace vectoriel  $\mathcal{E}$  admet-il une base de vecteurs propres de  $u$  ? De  $v$  ? L'ensemble des valeurs propres de  $u$  (resp. de  $v$ ) est-il une partie fermée de  $\mathbf{C}$  ?

## MINES-PONTS MP 2017 – PREMIÈRE ÉPREUVE

## PARTIE A - Préliminaires

1. Les parties  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{D}$  sont par définition incluses dans  $\mathcal{E}$  et contiennent la fonction nulle. Une combinaison linéaire de deux polynômes en étant un et celle de deux fonctions développables en série entière au voisinage de 0 avec un rayon de convergence respectivement  $r$  et  $r'$  en étant une avec un rayon de convergence supérieur à  $\min(r, r')$ , on en déduit que ce sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{E}$ .

2. a) Soit  $x$  dans  $I$ , les fonctions  $t \mapsto f(x \sin(t))$  et  $x \mapsto f'(x \sin(t))$  sont continues donc intégrables sur le segment  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Par conséquent  $u(f)$  et  $v(f)$  sont bien définis.

Puisque  $f'$  est de classe  $C^\infty$ , comme  $f$ , d'après le théorème de WEIERSTRASS elle est bornée sur  $I$ . Soit donc  $k = \sup_I |f'|$ . D'après l'inégalité de LAGRANGE (inégalité des accroissements finis), on a pour  $x$  et  $y$  dans  $I$  et  $t$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$|f(x \sin(t)) - f(y \sin(t))| \leq k |x - y| \sin(t) \leq k |x - y|$$

et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale,

$$|u(f)(x) - u(f)(y)| \leq k |x - y|$$

et donc  $u(f)$  est lipschitzienne.

Comme  $f$  appartient à  $\mathcal{E}$ ,  $f'$  aussi. D'après ce qui précède, on dispose de  $k$  dans  $\mathbf{R}_+$  tel que  $u(f')$  soit  $k$ -lipschitzienne sur  $I$ , donc continue. En vertu du théorème de WEIERSTRASS, elle y est bornée et il vient, pour  $x$  et  $y$  dans  $I$

$$\begin{aligned} |v(f)(x) - v(f)(y)| &= \left| \frac{\pi}{2}(x - y)u(f')(x) + \frac{\pi}{2}y(u(f')(x) - u(f')(y)) \right| \\ &\leq \frac{\pi}{2} |x - y| \sup_I |u(f')(t)| + \frac{a\pi}{2} |u(f')(x) - u(f')(y)| \\ &\leq \left( \frac{\pi}{2} \sup_I |u(f')(t)| + \frac{ka\pi}{2} \right) |x - y| \end{aligned}$$

et donc  $v(f)$  est lipschitzienne.

b) Puisque  $f$  est de classe  $C^\infty$ , sa dérivée seconde est bornée sur  $I$  et on dispose de  $M$  tel que, pour  $x$  et  $y$  dans  $I$  et  $t$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , on ait

$$|f(y \sin(t)) - f(x \sin(t)) - (x - y) \sin(t) f'(x \sin(t))| \leq M \frac{(x - y)^2 \sin^2(t)}{2}$$

et donc, par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale

$$\left| u(f)(y) - u(f)(x) - (x - y) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) f'(x \sin(t)) dt \right| \leq \frac{M}{4} (x - y)^2$$

et en particulier

$$u(f)(y) = u(f)(x) + (y - x) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) f'(x \sin(t)) dt + o(y - x),$$

i.e.  $u(f)$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $x$ .

Par définition de  $v(f)$ , on en déduit, puisque  $f'$  appartient à  $\mathcal{E}$

$$v(f)(y) = f(0) + \frac{2}{\pi}(x + y - x) \left( u(f')(x) + (y - x) \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) f''(x \sin(t)) dt + o(y - x) \right)$$

et donc

$$v(f)(y) = v(f)(x) + (y - x) \left( \int_0^{\pi/2} (f'(x \sin(t)) + x \sin(t) f''(x \sin(t))) dt \right) + o(y - x)$$

i.e.  $v(f)$  admet un développement limité à l'ordre 1 en  $x$ .

c) Les deux questions précédentes montrent que  $u(f)$  et  $v(f)$  sont dérivables, de dérivées données par

$$u(f)'(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(t) f'(x \sin(t)) dt$$

et

$$v(f)'(x) = \int_0^{\pi/2} f'(x \sin(t)) dt + x \int_0^{\pi/2} \sin(t) f''(x \sin(t)) dt.$$

En adaptant la démonstration de la question précédente il vient pour  $n$  entier,  $x$  et  $y$  dans  $I$  et  $t$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\left| \sin^n(t) f^{(n)}(x \sin(t)) - \sin^n(t) f^{(n)}(y \sin(t)) \right| \leq k |x - y| \sin^{n+1}(t) \leq k |x - y|$$

où  $k = \sup_I |f^{(n+1)}|$ . Une récurrence rapide montre alors que  $u(f)$  est de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , de dérivées données par

$$u(f)^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) f^{(n)}(x \sin(t)) dt.$$

Comme  $v(f)$  est, de ce fait, combinaison algébrique de fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $I$ , elle l'est aussi,

i.e.  $u(f)$  et  $v(f)$  appartiennent à  $\mathcal{E}$ .

d) Par linéarité de l'intégrale et de la composition à gauche,  $u$  est linéaire. Par linéarité de l'évaluation en 0 et stabilité par combinaisons linéaires (à coefficients dans l'algèbre des fonctions de classe  $C^\infty$  sur  $I$ ) de  $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ ,  $v$  est également linéaire, et ainsi  $u$  et  $v$  sont des endomorphismes de  $\mathcal{E}$ .

3. Pour  $n$  entier on a directement, en identifiant polynôme et fonction polynomiale sur  $I$ ,  $u(X^n) = \frac{2W_n}{\pi} X^n$ ,  $v(1) = 1$  et, pour  $n > 0$ ,  $v(X^n) = nW_{n-1}X^n$ . Par linéarité de  $u$  et  $v$ , on en déduit que  $\mathcal{P}$  est stable par  $u$  et  $v$ .

4. Pour  $n$  entier on a, par intégration par parties et en utilisant  $1 - \sin^2 = \cos^2$ ,

$$(n + 1)(W_n - W_{n+2}) = \int_0^{\pi/2} (n + 1) \sin^n(t) \cos^2(t) dt = W_{n+2}$$

i.e.  $(n + 1)W_n = (n + 2)W_{n+2}$ .

En particulier la suite de terme général  $(n + 1)W_n W_{n+1}$  est constante. Comme son premier terme vaut

$\frac{\pi}{2}$ , il vient  $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n + 1)}$ .

5. Pour  $t$  dans  $]0; \frac{\pi}{2}[$ , l'intégrande dans  $W_n$  est une fonction strictement décroissante de  $n$  et donc, par croissance de l'intégrale et continuité des intégrandes,  $(W_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est strictement décroissante. Par décroissance, il vient pour  $n$  entier  $W_{n+2} < W_{n+1} < W_n$  et, puisque  $W_n \sim W_{n+2}$ , d'après la relation trouvée à la question précédente, il vient  $nW_n^2 \sim (n+1)W_nW_{n+1}$ . On en déduit  $W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n}$  et, par multiplicativité et continuité de la racine carrée et par positivité de  $W_n$ ,  $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$  et  $\lim W_n = 0$ .

### PARTIE B - Étude de la continuité de $u$ et $v$

6. Puisque  $f$  est continue sur le segment  $I$  qui est compact, elle y atteint ses bornes d'après le théorème de WEIERSTRASS et donc  $M$  est bien défini. Il résulte de l'inégalité de la moyenne qu'on a, pour  $x$  dans  $I$ ,  $|u(f)(x)| \leq M(f)$ , i.e.  $M(u(f)) \leq M(f)$  et donc, par caractérisation des applications linéaires continues,  $u$  est une application continue de  $(\mathcal{E}, M)$  dans lui-même.
7. D'après les calculs effectués en question 3, le spectre de  $v$  contient les termes de la suite  $(nW_{n-1})$  et donc, d'après la question 5, son spectre n'est pas borné. Par homogénéité de la norme, on en conclut que  $v$  n'est lipschitzienne pour aucune norme, donc en particulier pour  $M$ , et ainsi  $v$  n'est pas continue de  $(\mathcal{E}, M)$  dans lui-même.
8. L'homogénéité et la positivité de  $N$  résultent de celles de  $M$ , de même que l'inégalité triangulaire pour  $N$  résulte de la linéarité de la dérivation et de l'inégalité triangulaire pour  $M$ . De plus  $M \leq N$ , donc  $N$  satisfait à l'axiome de séparation puisqu'il est vrai pour  $M$ , i.e.  $N$  est une norme sur  $\mathcal{E}$ . Pour  $f$  dans  $\mathcal{E}$  on a par inégalité triangulaire  $M(v(f)) \leq M(f) + a\frac{\pi}{2}M(f') \leq a\frac{\pi}{2}N(f)$  et donc  $v$  est continue de  $(\mathcal{E}, N)$  dans  $(\mathcal{E}, M)$ . Puisque  $v$  est continue en munissant l'espace source de la norme  $N$  et non continue quand on le munit de la norme  $M$ ,  $N$  et  $M$  ne sont pas équivalentes.
9. Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\varepsilon > 0$ . D'après le théorème d'approximation de WEIERSTRASS, puisque  $I$  est compact et  $f'$  est continu, on dispose d'un polynôme  $q$  tel que  $M(f' - q) \leq \varepsilon$ . Soit  $p$  le polynôme défini par  $p(0) = f(0)$  et  $p' = q$ , i.e. donné par  $p(x) = f(0) + \int_0^x q(t) dt$ , alors  $f(0) = p(0)$  et  $M(f' - p') \leq \varepsilon$ . Par inégalité de LAGRANGE (inégalité des accroissements finis), il vient pour  $x$  dans  $I$ ,
- $$|(f - p)(x)| = |(f - p)(x) - (f - p)(0)| \leq |x| M(f' - p') \leq a\varepsilon$$
- et donc  $M(f - p) \leq a\varepsilon$  puis  $N(f - p) \leq (a+1)\varepsilon$ . Il en résulte que  $\mathcal{P}$  est dense dans l'espace vectoriel normé  $(\mathcal{E}, N)$ .

### PARTIE C - Étude de l'inversibilité de $u$ et $v$

10. D'après les calculs effectués en question 3, la base canonique de  $\mathcal{P}$  est propre pour  $u$  et  $v$ , donc  $u$  et  $v$  commutent sur cette base, donc sur  $\mathcal{P}$ . D'après ces mêmes calculs et la relation établie en question 4,  $u \circ v$  est l'identité sur la base canonique, i.e. en restriction à  $\mathcal{P}$ ,  $u \circ v$  et  $v \circ u$  sont l'identité.
11. Par composition,  $u \circ v$  est une application continue de  $(\mathcal{E}, N)$  dans  $(\mathcal{E}, M)$ . Comme  $M \leq N$ , l'identité est également continue de  $(\mathcal{E}, N)$  dans  $(\mathcal{E}, M)$  (car 1-lipschitzienne par exemple). Il en va donc de même

pour  $u \circ v - \text{Id}$ , dont la restriction à  $\mathcal{P}$  est nulle. Par densité de ce dernier ensemble dans  $(\mathcal{E}, N)$ , on en conclut  $u \circ v = 0$  sur  $\mathcal{E}$ , i.e.  $(u \circ v)(f) = f$ .

La composée  $u \circ v$  étant injective,  $v$  l'est aussi et donc  $0$  n'est pas valeur propre de  $v$ .

12. Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$ . On note  $\varphi_f$  la fonction pente en 0 associée, i.e. pour  $x$  dans  $I$  on a  $f(x) = f(0) + x\varphi_f(x)$  et  $\varphi_f(0) = f'(0)$ . Alors  $\varphi_f \in \mathcal{E}$  et si  $g$  est la primitive de  $v\left(\frac{2}{\pi}\varphi_f\right)$  valant  $f(0)$  en 0, i.e. pour  $x$  dans  $I$

$$g(x) = f(0) + \int_0^x v\left(\frac{2}{\pi}\varphi_f\right)(t) dt$$

alors, d'après ce qui précède,  $u(g') = \frac{2}{\pi}\varphi_f$  et donc  $v(g) = f$ . On en déduit  $v \circ u(f) = v(u \circ v(g)) = v(g) = f$ , i.e.  $(v \circ u)(f) = f$ .

On en conclut que  $u$  et  $v$  sont inversibles et  $u = v^{-1}$ .

Remarque : on peut aussi utiliser l'expression de  $u(f)'$  et l'inégalité de la moyenne pour obtenir  $M(u(f)') \leq M(f')$  et donc  $N(u(f)) \leq N(f)$ , ce qui montre que  $u$  est continu de  $(\mathcal{E}, N)$  dans lui-même. Il en résulte que  $v \circ u - \text{Id}$  est continu de  $(\mathcal{E}, N)$  dans  $(\mathcal{E}, M)$ , nul sur un sous-espace dense et donc nul sur  $\mathcal{E}$ .

13. a) Puisque l'exponentielle est de classe  $C^\infty$  et ne s'annule pas, sh est de classe  $C^\infty$  par opérations algébriques sur ces fonctions. Si  $x$  et  $t$  sont réels, on a, par non annulation puis positivité stricte de  $e^t$ ,

$$\begin{aligned} \text{sh}(t) = x &\iff e^t - 2x - e^{-t} = 0 \\ &\iff e^{2t} - 2xe^t - 1 = 0 \\ &\iff |e^t - x| = \sqrt{1 + x^2} \\ &\iff e^t = x + \sqrt{1 + x^2} \end{aligned}$$

et donc  $\text{sh}(t) = x \iff t = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ , cette dernière expression étant bien définie car l'argument du logarithme est du signe de  $\sqrt{1 + x^2}$  (qui est le plus grand des deux termes en valeur absolue) et est donc strictement positif. Cette expression de  $t$  est composée d'une fonction de classe  $C^\infty$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}_+$  et du logarithme, et est donc dans  $\mathcal{E}$ , i.e.  $\text{sh}$  est bijective de classe  $C^\infty$  ainsi que sa réciproque.

Au vu de l'expression trouvée (ou en utilisant  $\text{argsh} \circ \text{sh} = \text{Id}$ ), il vient pour  $x$  réel

$$\text{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \text{ et donc } \text{argsh}''(x) = -x(1 + x^2)^{-3/2}.$$

- b) Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$  et  $x$  dans  $I$ , par définition on a  $v(f)(x) = f(0) + \frac{\pi}{2}xu(f')(x)$ .

Par définition on a, pour  $x$  dans  $I$ , par changement de variable de classe  $C^1$  bijectif donné par  $z = \tan(t)$  i.e.  $t = \arctan(z)$  pour  $t$  dans  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$  et  $z$  dans  $\mathbf{R}_+$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2}u(\arctan')(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + x^2 \sin^2(t)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{dz}{1 + z^2(1 + x^2)} \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } \boxed{u(\arctan') = \operatorname{argsh}'}$$

On en déduit  $v(\operatorname{argsh}') = \arctan'$  et donc, pour  $x$  dans  $I$ ,

$$1 + \frac{\pi}{2}xu(\operatorname{argsh}'')(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ i.e. } xu(\operatorname{argsh}'')(x) = \frac{2x^2}{\pi(1+x^2)}$$

Par continuité de  $u(\operatorname{argsh}'')$  en 0, il vient  $\boxed{u(\operatorname{argsh}'')(x) = \frac{2x}{\pi(1+x^2)}}$ .

14. Soit  $f$  dans  $\mathcal{E}$ . Par définition de  $u(f)$ , on a  $u(f) \circ (-\operatorname{Id}) = u(f \circ (-\operatorname{Id}))$ , de sorte qu'on a, par linéarité de  $u$ , pour tout scalaire  $\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} u(f) \circ (-\operatorname{Id}) = \varepsilon u(f) &\iff u(f \circ (-\operatorname{Id})) = u(\varepsilon f) \\ &\iff f \circ (-\operatorname{Id}) = \varepsilon f \end{aligned}$$

par bijectivité de  $u$ . En appliquant le résultat à  $v(f)$ , on obtient  $f \circ (-\operatorname{Id}) = \varepsilon f \iff v(f) \circ (-\operatorname{Id}) = \varepsilon v(f)$ . En prenant  $\varepsilon = 1$  et  $\varepsilon = -1$ , on en déduit

$$\boxed{f \text{ est paire (resp. impaire) si et seulement si } u(f) \text{ l'est, si et seulement si } v(f) \text{ l'est.}}$$

### PARTIE D - Étude des valeurs propres de $u$ et $v$

15. Puisque  $u$  et  $v$  sont inversibles, elles n'ont pas de valeur propre nulle. Comme elles sont inverses l'une de l'autre, pour  $f$  dans  $\mathcal{E}$  et  $\lambda$  dans  $\mathbf{C}^*$ , on a

$$v(f) = \lambda f \iff f = u(\lambda f) \iff f = \lambda u(f) \iff u(f) = \frac{1}{\lambda} f$$

et donc  $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } v \text{ si et seulement si } \frac{1}{\lambda} \text{ l'est pour } u.}$  De plus

$$\boxed{f \text{ est vecteur propre pour } v \text{ associé à } \lambda \text{ si et seulement si l'est pour } u \text{ avec la valeur propre } \frac{1}{\lambda}.$$

16. Soit  $f$  dans  $\mathcal{D}$ . Pour  $n$  entier on pose  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ ,  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ ,  $R$  le rayon de convergence de

la série entière  $\sum a_n z^n$ , supposé non nul. Pour  $r$  vérifiant  $0 < r < R$  et  $J = I \cap [-r; r]$ , la suite de polynômes  $(P_n)$  converge normalement donc uniformément vers  $f$  sur  $J$ . En appliquant les résultats du problème à  $J$  au lieu de  $I$ , on en déduit que  $u(f)$  est limite uniforme des polynômes  $u(P_n)$ , i.e. est somme de la série entière  $\frac{2}{\pi} \sum a_n W_n z^n$  sur  $J$ . En particulier  $u(f) \in \mathcal{D}$  et donc  $\boxed{\mathcal{D} \text{ est stable par } u.}$

Remarque : en posant  $b_n = a_n W_n$  on a  $b_n = o(a_n)$  et  $a_n = o(nb_n)$ , ce qui montre que les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  ont même rayon de convergence.

Comme  $f$  est dans  $\mathcal{D}$ , il en va de même de  $f'$ , donc de  $u(f')$  et donc aussi de  $v(f)$  au vu de la relation entre  $v(f)$  et  $u(f')$ . On en déduit que  $\boxed{\mathcal{D} \text{ est stable par } v.}$

17. Soit  $n$  dans  $\mathbf{N}$ . Comme  $f$  est de classe  $C^\infty$ ,  $f^{(n)}$  est une fonction continue sur le segment  $I$ . D'après le théorème de WEIERSTRASS  $f^{(n)}$  atteint ses bornes sur  $I$  et donc  $\boxed{m_n \text{ est bien défini.}}$

Par inégalité de la moyenne et en utilisant l'expression des dérivées de  $u(f)$ , la positivité de sin sur

$$\left[0; \frac{\pi}{2}\right], u(f) = \lambda f \text{ et donc } u(f)^{(n)} = \lambda f^{(n)}, \text{ il vient pour } x \text{ dans } I \quad \boxed{|\lambda| |f^{(n)}(x)| \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}.$$

Puisque  $f^{(n)}$  atteint ses bornes, il vient  $|\lambda| m_n \leq \frac{2m_n W_n}{\pi}$  puis  $m_n(\pi|\lambda| - 2W_n) \leq 0$ . Puisque  $\pi|\lambda| - 2W_n = \pi|\lambda| + o(1)$ , pour  $n$  assez grand  $\pi|\lambda| - 2W_n$  est strictement positif et alors, pour un tel  $n$ ,  $m_n \leq 0$ , d'où  $m_n = 0$  par positivité de  $m_n$ . On en déduit  $f^{(n)} = 0$  sur  $I$  et donc  $f$  est polynomiale, i.e.  $f \in \mathcal{P}$ .

18. D'après ce qui précède les vecteurs propres de  $u$ , et donc de  $v$ , appartiennent à  $\mathcal{P}$ , dont une base propre a déjà été obtenue. Les valeurs propres associées étant toutes distinctes, par décroissance stricte de  $(W_n)$ , on en déduit que les vecteurs propres de  $u$  et  $v$  sont les fonctions monomiales.

Une fonction monomiale de degré  $n$  est associée à la valeur propre  $\frac{2W_n}{\pi}$  pour  $u$  et donc  $\frac{\pi}{2W_n}$  pour  $v$ .

19. Puisqu'on a obtenu une liste exhaustive des vecteurs propres de  $u$  et de  $v$ , on en déduit que ceux-ci n'engendrent pas  $\mathcal{E}$  et donc  $\mathcal{E}$  n'admet pas de base de vecteurs propres ni pour  $u$ , ni pour  $v$ .

Puisque  $(W_n)$  tend vers 0 et que 0 n'est pas valeur propre de  $u$ ,

l'ensemble des valeurs propres de  $u$  n'est pas fermé dans  $\mathbf{C}$ .

Soit  $(\lambda_n)$  une suite de valeurs propres de  $v$  dans  $\mathbf{C}$ . En particulier c'est une suite bornée. Soit  $M$  un réel tel que  $\forall n \in \mathbf{N}$ ,  $|\lambda_n| \leq M$ . Comme  $\lim \frac{\pi}{2W_n} = +\infty$  on dispose de  $n_0$  dans  $\mathbf{N}$  tel que  $\forall n \geq n_0$ ,

$\frac{\pi}{2W_n} > M$ . On en déduit que  $(\lambda_n)$  est à valeurs dans  $\left\{ \frac{\pi}{2W_n} \mid n < n_0 \right\}$ , à savoir dans un ensemble fini. Comme un ensemble fini est fermé, la limite de  $(\lambda_n)$  appartient à cet ensemble et est donc une valeur propre de  $v$ . Par conséquent l'ensemble des valeurs propres de  $v$  est fermé dans  $\mathbf{C}$ .