Applications bilinéaires symétriques plates

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 2 et p est un entier supérieur ou égal à 1. Les espaces vectoriels $\mathbf{R}^n$ et $\mathbf{R}^p$ sont munis de leur produit scalaire canonique, noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$; en particulier pour $p = 1$, c'est le produit usuel dans $\mathbf{R}$.

On rappelle qu'une application φ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ est *bilinéaire* lorsque, pour tous x, y dans $\mathbf{R}^n$, les deux applications partielles $z \mapsto \varphi(z, y)$ et $z \mapsto \varphi(x, z)$ de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ sont linéaires. L'application bilinéaire φ est dite *symétrique* si $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$ pour tous x, y dans $\mathbf{R}^n$. En particulier, lorsque $p = 1$, on dit que φ est une forme bilinéaire symétrique.

Soit φ une application bilinéaire symétrique. On appelle *noyau* de φ et on note $\mathrm{Ker}(\varphi)$ l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbf{R}^n$ tels que pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, $\varphi(x, y) = 0$. On dit que φ est *diagonalisable* s'il existe une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbf{R}^n$ telle que, pour tous $i \neq j$, $\varphi(e_i, e_j) = 0$. Enfin, on dit que φ est *plate* (relativement au produit scalaire de $\mathbf{R}^p$) si, pour tous les vecteurs x, y, z, w de $\mathbf{R}^n$, on a :

$$\langle \varphi(x, y) \mid \varphi(z, w) \rangle = \langle \varphi(x, w) \mid \varphi(z, y) \rangle \ .$$

Le but du problème est d'établir, sous certaines conditions, qu'une application bilinéaire symétrique plate est diagonalisable.

Les partie A, B et C sont indépendantes les unes des autres.

A - Formes bilinéaires symétriques plates

Dans toute cette partie, on pose $p = 1$. Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique.

1) Justifier qu'il existe un unique endomorphisme u de $\mathbf{R}^n$ tel que, pour tous x, y dans $\mathbf{R}^n$,

$$\varphi(x, y) = \langle u(x) \mid y \rangle \ .$$

Vérifier que u est symétrique et en déduire que φ est diagonalisable.

On note $\mathbf{R}^{n*}$ l'espace dual de $\mathbf{R}^n$ constitué des formes linéaires sur $\mathbf{R}^n$. Si a et b sont dans $\mathbf{R}^{n*}$, on définit l'application $a \otimes b$ de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ en posant $(a \otimes b)(x, y) = a(x)b(y)$ pour tous x, y dans $\mathbf{R}^n$.

2) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbf{R}^{n*}$, $a \otimes b$ est une forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^n$. Donner une condition suffisante pour qu'elle soit symétrique.

On rappelle que le *rang* d'une forme bilinéaire $\varphi : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est égal au rang de la matrice $(\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i,j \leq n}$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base quelconque de $\mathbf{R}^n$.

3) On suppose dans cette question que φ est de rang 1. Montrer qu'il existe une forme linéaire f de $\mathbf{R}^{n*}$ telle que $\varphi = \pm f \otimes f$. On pourra considérer la base duale d'une base qui diagonalise φ.

4) En déduire qu'une forme bilinéaire symétrique de rang 1 est plate.

5) Réciproquement, soit φ une forme bilinéaire symétrique plate non nulle. Quel est le rang de φ ?

B - Diagonalisation simultanée

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien E de dimension n, qui commutent deux à deux : $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$ pour tous i, j dans I.

On se propose de montrer par récurrence sur n qu'il existe une base orthonormée de E qui diagonalise tous ces endomorphismes. Le résultat est évident pour $n = 1$, on suppose que $n > 1$ et que le résultat est vrai pour toute dimension strictement inférieure à n.

6) Soit $i_0 \in I$. Montrer que, si u_{i_0} n'est pas une homothétie, les sous-espaces propres de u_{i_0} sont de dimension strictement inférieure à n. Montrer par ailleurs que ces sous-espaces sont stables par tous les endomorphismes u_i.

7) Conclure.

C - Vecteurs réguliers

Soit φ une application bilinéaire symétrique non nulle de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$. Si $x \in \mathbf{R}^n$, on note $\tilde{\varphi}(x)$ l'application linéaire qui à tout $y \in \mathbf{R}^n$ associe $\varphi(x, y) \in \mathbf{R}^p$. On a donc $\tilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y)$ pour tous x, $y \in \mathbf{R}^n$. Le noyau et l'image de $\tilde{\varphi}(x)$ sont respectivement notés $\operatorname{Ker} \tilde{\varphi}(x)$ et $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(x)$.

On note q la dimension maximale de $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(x)$ lorsque x parcourt $\mathbf{R}^n$ et on choisit un vecteur v de $\mathbf{R}^n$ tel que la dimension de $\operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$ soit égale à q. Un tel vecteur v est qualifié de *régulier* pour φ.

8) Dans cette question préliminaire, on se donne deux matrices carrées A et B d'ordre n à coefficients réels. Montrer que, si A *ou* B est inversible, alors $A + tB$ l'est aussi pour tout $t \in \mathbf{R}$ *sauf* éventuellement pour un nombre fini de valeurs de t.

9) Soit r un entier naturel non nul et $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ deux familles de vecteurs de $\mathbf{R}^p$. Montrer que, si $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ est libre, alors $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ est également libre pour tout réel t *sauf* pour éventuellement un nombre fini de valeurs de t.

   En particulier, $(a_1 + tb_1, a_2 + tb_2, \ldots, a_r + tb_r)$ sera libre pour tout t dans un voisinage de 0.

10) Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}^n$ et tout $y \in \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}(v))$, on a $\varphi(x, y) \in \operatorname{Im} \tilde{\varphi}(v)$. On pourra raisonner par l'absurde en montrant l'existence de vecteurs $e_1, \ldots, e_q$ de $\mathbf{R}^n$ tels que la famille $(\varphi(v, e_1), \ldots, \varphi(v, e_q), \varphi(x, y))$ soit libre.

11) Dans cette question, on suppose que φ est plate. Montrer $\operatorname{Ker}(\varphi) = \operatorname{Ker} \tilde{\varphi}(v)$. Si, de plus, $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$, en déduire $p \geq n$.

   On revient au cas général où φ est une application bilinéaire symétrique non nulle.

12) Montrer que l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs réguliers pour φ est un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

13) Montrer que $\mathcal{V}$ est dense dans $\mathbf{R}^n$.

D - Le cas $p = n$ de noyau nul

Dans cette partie, φ désigne une application bilinéaire symétrique plate de $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^n$ dont le noyau est réduit à $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$. On fixe un vecteur régulier v pour φ.

14) Montrer que $\tilde{\varphi}(v)$ est un automorphisme.

   Pour tout $x \in \mathbf{R}^n$, on définit l'endomorphisme $\psi(x) = \tilde{\varphi}(x) \circ \tilde{\varphi}(v)^{-1}$.

15) En utilisant la définition d'une application bilinéaire plate, montrer que $\psi(x)$ est autoadjoint.

16) Montrer que, pour tous x, $y \in \mathbf{R}^n$, $\psi(x) \circ \psi(y) = \psi(y) \circ \psi(x)$. En déduire qu'il existe une base orthonormée $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{R}^n$ diagonalisant simultanément tous les endomorphismes $\psi(x)$.

17) Construire à l'aide de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base qui diagonalise φ. On pourra utiliser la symétrie de φ.