Deuxième composition de mathématiques
Mines-Ponts 2011 – MP

Sur le calcul des variations

Soit un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, ni vide, ni réduit à un point, et un ensemble E de fonctions $f : I \to \mathbf{R}$. On se donne une application $J : E \to \mathbf{R}$ définie au moyen d'une intégrale faisant intervenir f et ses dérivées. L'objectif de ce problème est d'étudier le minimum éventuel de J sur E :

$$\min_{f \in E} J(f)\,,$$

et de déterminer, dans certains cas particuliers, les points f de E en lesquels J atteint son minimum.
On note $E^k_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to \mathbf{R}$ de classe C^k telles que $f(0) = a$ et $f(1) = b$. La notation $y^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de la fonction y.

PARTIE A - Préliminaire

1. On pose $j = \exp(2i\pi/3)$. Que vaut $j^4 + j^2 + 1$?
   On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel des matrices à n lignes et p colonnes sur $\mathbf{C}$ et on considère la matrice A de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbf{C})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$
2. Proposer une matrice inversible U et une matrice diagonale D de $\mathscr{M}_{4,4}(\mathbf{C})$ telles que $U^{-1}AU = D$. La méthode choisie pour les obtenir doit être expliquée.
3. En déduire les solutions $X : I \to \mathscr{M}_{4,1}(\mathbf{C})$ de l'équation différentielle
$$(1) \qquad X' = AX\,.$$
4. Déterminer l'ensemble des solutions $y : I \to \mathbf{C}$ de l'équation différentielle
$$(2) \qquad y^{(4)} + y'' + y = 0\,.$$
   et préciser parmi ces solutions celles qui sont à valeurs dans $\mathbf{R}$. On pourra considérer le vecteur
$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}\,.$$

PARTIE B - Un lemme de du Bois-Reymond

5. On considère la fonction $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $h(t) = (1-t^2)^3$ si $|t| \leq 1$ et $h(t) = 0$ sinon. Montrer $h \in C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et représenter son graphe. La fonction h est-elle de classe C^3 sur $\mathbf{R}$?
6. Soit x_0, x_1 des nombres réels tels que $x_0 < x_1$. Construire à partir de h une fonction g dans $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ vérifiant $g(x) > 0$ pour tout x dans $]x_0; x_1[$ et $g(x) = 0$ ailleurs.
7. Soit F dans $C^0([0;1], \mathbf{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$ pour tout u dans $E^2_{0,0}$. Démontrer qu'alors F est nulle.

PARTIE C - Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

Dans cette partie, on prend $E = E^2_{a,b}$ pour un couple donné (a, b) de nombres réels. La fonction J est définie sur E par la formule

$$J(f) = \int_0^1 \left[P\left(f(x)\right) + Q\left(f'(x)\right)\right] \mathrm{d}x\,,$$

où P et Q sont des polynômes fixés dans $\mathbf{R}[X]$.
Soit f_0 dans E. On se propose de démontrer que si $J(f_0) \leq J(f)$ pour tout f dans E, alors f_0 vérifie une certaine équation différentielle. Soit u dans $E^2_{0,0}$.

8. Montrer que l'application q définie sur $\mathbf{R}$ par la formule

$$q(t) = J(f_0 + tu)$$

est polynomiale, c'est-à-dire qu'il existe une famille finie $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de nombres réels telle que $q(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} a_k t^k$ pour tout t dans $\mathbf{R}$. Expliciter le coefficient a_1 sous la forme d'une intégrale faisant intervenir les polynômes dérivés P' et Q'.

9. On suppose que pour tout f dans E, $J(f_0) \leq J(f)$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et en déduire l'équation différentielle :

$$(\Delta) \qquad \forall x \in [0;1]\,, \qquad P'\left(f_0(x)\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[Q'\left(f_0'(x)\right)\right]\,.$$

Exemples

Premier exemple. On choisit $E = E^2_{0,1}$ et $J = J_1$ définie par $J_1(f) = \displaystyle\int_0^1 \left(f'(x)\right)^2 \mathrm{d}x$.

10. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, préciser celles qui appartiennent à $E^2_{0,1}$.

11. Montrer que J_1 admet un minimum sur $E^2_{0,1}$, préciser sa valeur ainsi que les points de $E^2_{0,1}$ où ce minimum est réalisé. (On pourra s'aider de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Deuxième exemple. On choisit $E = E^2_{0,0}$ et $J = J_2$ définie par

$$J_2(f) = \int_0^1 \left[\left(f'(x)\right)^2 + \left(f'(x)\right)^3\right] \mathrm{d}x\,.$$

12. Former l'équation différentielle (Δ) correspondante. Parmi ses solutions, montrer que seule la fonction nulle appartient à $E^2_{0,0}$.

13. Montrer que J_2 n'admet pas de minimum sur $E^2_{0,0}$. (On pourra se servir de la fonction f définie sur l'intervalle $[0;1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$.)

PARTIE D - Un exemple avec dérivée seconde

Dans cette partie, E désigne l'ensemble des fonctions f de $C^4(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telles que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbf{R}_+$. On rappelle que l'ensemble des fonctions g de $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telles que g^2 soit intégrable sur $\mathbf{R}_+$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, que l'on note L^2.
Dans les deux questions suivantes, on considère f dans E.

14. Montrer que le produit ff'' est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ et que $f(x)f'(x)$ ne tend pas vers $+\infty$ quand $x \to +\infty$.

15. En déduire $f' \in L^2$, puis $f(x)f'(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

Dans cette partie, la fonction J est définie par

$$J(f) = \int_0^{+\infty} \left[\left(f(x)\right)^2 - \left(f'(x)\right)^2 + \left(f''(x)\right)^2\right] \mathrm{d}x\,.$$

Par un raisonnement identique à celui de la partie III, on peut montrer, et on l'admettra, que si la fonction J présente un minimum en un élément f de E, alors f est solution sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation (2) : $y^{(4)} + y'' + y = 0$.

16. Déterminer les solutions de (2) qui appartiennent à E. (On pourra d'abord étudier leur appartenance à L^2.)

On note e_1 et e_2 les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+$ par les formules

$$e_1(t) = e^{-t/2} \cos\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{et} \quad e_2(t) = e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2}\right) .$$

Un calcul montre, et on l'admettra, que pour tous réels α et β,

$$J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \frac{\alpha^2}{4} + \frac{3\beta^2}{4} + \frac{\alpha\beta\sqrt{3}}{2} .$$

On pose également, pour tout t dans $\mathbf{R}_+$,

$$\psi(t) = e^{-t/2} \sin\left(t\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}\right) .$$

17. On suppose, dans cette question, que la fonction J présente un minimum en un élément f de E. Montrer que f est solution sur $\mathbf{R}_+$ de l'équation $y'' + y' + y = 0$. Montrer par ailleurs qu'il existe λ dans $\mathbf{R}$ tel que $f = \lambda\psi$.
18. Montrer que pour tout f dans E et tout réel $A > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^A \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right] \mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^A [f(x) + f'(x) + f''(x)]^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2 \ .\end{aligned}$$

Quel est le comportement de $(f(A) + f'(A))^2$ lorsque $A \to +\infty$? En déduire que la fonction J admet effectivement un minimum au point $\lambda\psi$ pour chaque λ réel.

19. Indiquer comment le point de vue de la question précédente permet de retrouver directement toutes les fonctions f_0 dans E telles que $J(f_0) = \min\limits_{f \in E} J(f)$, sans passer par l'équation différentielle (2).

PARTIE E - Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

On reprend les notations de la partie précédente, et pour tout g dans L^2, on note

$$\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} (g(x))^2 \,\mathrm{d}x} .$$

20. Montrer que pour tout f dans E,

$$\|f'\|^2 \leq 2\,\|f\| \cdot \|f''\| \ .$$

On pourra poser $f_\mu(x) = f(\mu x)$ et utiliser le fait que $J(f_\mu) \geq 0$, pour tout réel $\mu > 0$.

21. Déterminer tous les cas d'égalité dans l'inégalité précédente.

Deuxième composition de mathématiques – Mines-Ponts 2011 – MP

PARTIE A - Préliminaire

1. Puisque j et j^2 sont les deux racines cubiques de l'unité non triviales, on a par somme d'une suite géométrique $j^4+j^2+1=\dfrac{j^6-1}{j-1}=0$, et donc $\boxed{j^4+j^2+1=0.}$

2. Comme A est (la transposée d') une matrice compagnon, on a directement $\chi_A=X^4+X^2+1$ et donc les valeurs propres de A sont $\pm j$ et $\pm j^2$, χ_A est simplement scindé sur $\mathbf{C}$ et donc A est diagonalisable. Pour toute racine λ de χ_A, $A-\lambda I_4$ est de rang 3 et, puisque λ est non nul, le premier mineur principal de $A-\lambda I_4$ fournit un mineur inversible et on obtient ainsi un système échelonné de sorte que le vecteur ${}^t(1,\lambda,\lambda^2,\lambda^3)$ est vecteur propre de A associé à λ. On en déduit que U et D conviennent avec

$$\boxed{U=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\ j&j^2&-j&-j^2\\ j^2&j&j^2&j\\ 1&1&-1&-1\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}j&0&0&0\\ 0&j^2&0&0\\ 0&0&-j&0\\ 0&0&0&-j^2\end{pmatrix}.}$$

3. Puisque $U^{-1}AU=D$ l'équation $X'=AX$ s'écrit aussi $(U^{-1}X)'=D(U^{-1}X)$ de sorte que X est solution de (1) si et seulement si $U^{-1}X$ est solution de $Y'=DY$. Comme ce dernier système est diagonal ses solutions sont les applications de la forme

$$t\mapsto\begin{pmatrix}\alpha\exp(jt)\\ \beta\exp(j^2t)\\ \gamma\exp(-jt)\\ \delta\exp(-j^2t)\end{pmatrix}$$

pour $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ dans $\mathbf{C}^4$ et donc les solutions de $X'=AX$ sont de la forme

$$\boxed{t\mapsto\begin{pmatrix}\alpha\exp(jt)+\beta\exp(j^2t)+\gamma\exp(-jt)+\delta\exp(-j^2t)\\ j\alpha\exp(jt)+j^2\beta\exp(j^2t)-j\gamma\exp(-jt)-j^2\delta\exp(-j^2t)\\ j^2\alpha\exp(jt)+j\beta\exp(j^2t)+j^2\gamma\exp(-jt)+j\delta\exp(-j^2t)\\ \alpha\exp(jt)+\beta\exp(j^2t)-\gamma\exp(-jt)-\delta\exp(-j^2t)\end{pmatrix} \text{ pour } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ dans } \mathbf{C}^4.}$$

4. En posant, pour y de I dans $\mathbf{C}$, $Y=\begin{pmatrix}y\\ y'\\ y''\\ y^{(3)}\end{pmatrix}$, y est solution de (2) si et seulement si Y est solution de (1) et donc les solutions de (2) sont les fonctions de la forme

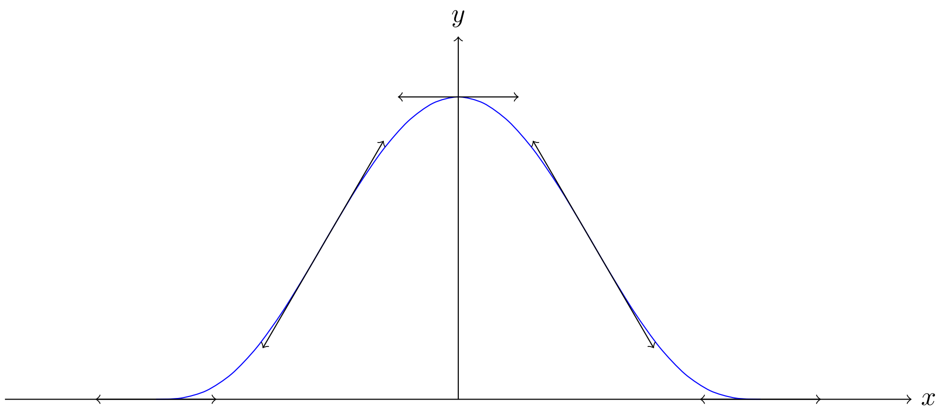
$\boxed{t\mapsto\alpha\exp(jt)+\beta\exp(j^2t)+\gamma\exp(-jt)+\delta\exp(-j^2t), \text{ pour } (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \text{ dans } \mathbf{C}^4.}$

D'après le principe de superposition les solutions à valeurs réelles sont les parties réelles de ces solutions, où encore celles qui sont égales à leur conjuguée. Par indépendance des fonctions exponentielles d'exposants différents et puisque $\overline{\pm j}=\pm j^2$, les solutions à valeurs réelles sont celles, parmi les précédentes, qui vérifient $\boxed{\beta=\overline{\alpha} \text{ et } \delta=\overline{\gamma}.}$

PARTIE B - Un lemme de du Bois-Reymond

5. Par définition et puisque les fonctions polynomiales sont de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, h est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ sauf peut-être en ± 1. En ces points ses dérivées de tous ordres admettent des limites à droite et à gauche. Par parité de la fonction, on ne s'intéresse qu'à son comportement en 1. À droite toutes les limites sont nulles tandis qu'à gauche elles sont nulles jusqu'à l'ordre 2, puisque 1 est racine multiple d'ordre 3 de $(1-X^2)^3$. Il en résulte, en utilisant le théorème du prolongement des fonctions de classe C^k dans le cas des fonctions définies en un point, $\boxed{h \in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ et } h \notin C^3(\mathbf{R},\mathbf{R}).}$

   Pour tracer le graphe, par parité on ne s'intéresse qu'à l'intervalle $[0;1]$. Sur cet intervalle $t \mapsto 1-t^2$ est positive et décroissante, donc h aussi par croissance du cube sur $\mathbf{R}$. Comme h atteint un maximum en 0, la tangente y est horizontale. Par continuité de h' et h'', on a $h(1) = h'(1) = h''(1) = 0$. Enfin un calcul direct montre que pour t dans $[0;1]$ on a $h''(t) = 6(1-t^2)(5t^2-1)$ de sorte qu'il y a un point d'inflexion en $\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ et qu'à cet endroit la tangente admet $-\dfrac{96\sqrt{5}}{125}$ comme pente.



6. L'intervalle $]x_0;x_1[$ est décrit par $\dfrac{x_0+x_1}{2} + t\dfrac{x_1-x_0}{2}$ pour t dans $]-1;1[$ et réciproquement pour x variant dans $]x_0;x_1[$ la quantité $\dfrac{2x-x_0-x_1}{x_1-x_0}$ décrit $]-1;1[$. On peut donc poser, par changement de variable affine, $g(x) = h\left(\dfrac{2x-x_0-x_1}{x_1-x_0}\right)$. Alors, puisqu'on a composé par une fonction affine bijective, donc de classe C^∞ ainsi que sa fonction réciproque, on a $\boxed{g \in C^2(\mathbf{R},\mathbf{R}) \text{ avec } g(x) > 0 \text{ pour } x \in \,]x_0;x_1[\text{ et } g(x)}$

7. On suppose par l'absurde que F est non nulle. Alors on dispose de x dans $[0;1]$ tel que $F(x) \neq 0$ et donc, par continuité de F d'un segment $[x_0;x_1]$ inclus dans $[0;1]$ et tel que F soit de signe constant (strictement) sur ce segment. Mais alors, la fonction g construite précédemment appartient à $E^2_{0,0}$ et donc $\displaystyle\int_0^1 F(x)u(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Néanmoins Fu est de signe constant sur $[0;1]$, continue et non identiquement nulle, ce qui est une contradiction. Par conséquent $\boxed{F \text{ est nulle.}}$

PARTIE C - Une condition nécessaire d'Euler-Lagrange

8. Puisque la formule de Taylor est exacte pour les polynômes et par linéarité de la dérivée, il vient pour tout x dans $[0;1]$ et tout t réel, $(f_0+tu)' = f_0' + tu'$ et

$$P(f_0(x)+tu(x)) + Q(f_0'(x)+tu'(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u(x)^k P^{(k)}(f_0(x)) + u'(x)^k Q^{(k)}(x)}{k!} t^k$$

et donc, par linéarité de l'intégrale,

$$\boxed{q \text{ est polynomiale et } a_1 = \int_0^1 (P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\,\mathrm{d}x.}$$

9. Par linéarité de l'évaluation en 0 et 1, on a $f \in E \Longleftrightarrow f - f_0 \in E^2_{0,0}$ et en particulier, puisque $E^2_{0,0}$ est un espace vectoriel

$$\forall f \in E\ J(f_0) \leq J(f) \Longleftrightarrow \forall u \in E^2_{0,0}\ \min_{t\in\mathbf{R}} J(f_0 + tu) = J(f_0)\,,$$

i.e., en adoptant la notation de la question précédente, q est minimale en 0 pour tout choix de u. Or si une fonction polynomiale est minimale en 0 son coefficient du premier degré est nul, puisque 0 est intérieur à son domaine de définition est que c'en est la dérivée en 0, i.e.

$$\boxed{\forall u \in E^2_{0,0} \quad \int_0^1 (P'(f_0(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\,\mathrm{d}x = 0\,.}$$

Or, puisqu'on a affaire à des fonctions de classe C^2 au moins on a

$$(u \cdot Q' \circ f_0')' = u' \cdot Q' \circ f_0' + u \cdot f_0'' \cdot Q'' \circ f_0'\,.$$

De plus, comme u appartient à $E^2_{0,0}$, $u \cdot Q' \circ f_0'$ s'annule en 0 et 1 et donc, d'après le théorème de Leibniz-Newton, on a

$$\int_0^1 (f_0''(x)Q''(f_0'(x))u(x) + Q'(f_0'(x))u'(x))\,\mathrm{d}x = 0$$

et on en déduit

$$\forall u \in E^2_{0,0} \quad \int_0^1 (P'(f_0(x)) - f_0''(x)Q''(f_0'(x)))\,u(x)\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Il résulte de la partie précédente par continuité de $P' \circ f_0 - f'' \cdot Q'' \circ f_0'$ sur $[0;1]$ que cette fonction est nulle, i.e. avec l'abus de notation de l'énoncé $\boxed{\forall x \in [0;1],\ P'(f_0(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[Q'(f_0'(x))].}$

10. On a $P = 0$ et $Q = X^2$ et donc (Δ) s'écrit $\boxed{f_0'' = 0.}$

Les solutions sont donc les applications affines. Et par conséquent il y en a une et une seule qui prend des valeurs données en deux points distincts. Ici il s'agit de $\boxed{f_0 = \mathrm{Id}.}$

11. Soit f dans $E^2_{0,1}$. Puisque f est de classe C^1 au moins, f' est de carré intégrable sur $[0;1]$, car continue, de même que la fonction constante égale à 1, il en résulte par inégalité de Cauchy-Schwarz

$$1 = (f(1) - f(0))^2 = \left(\int_0^1 f'(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \int_0^1 \mathrm{d}t \cdot J_1(f)$$

i.e. $J_1(f) \geq 1$ avec égalité si et seulement si, puisqu'on a affaire à des fonctions continues, f' est proportionnel à 1, i.e. f est affine. La seule fonction affine dans $E^2_{0,1}$ étant l'identité, on en déduit

$$\boxed{\min_{E^2_{0,1}} J_1 = 1 \text{ et le minimum est réalisé uniquement pour } f = \mathrm{Id}.}$$

12. Cette fois-ci on a $P = 0$ et $Q = X^2 + X^3$ de sorte que (Δ) s'écrit $2f_0'' + 6f_0'f_0'' = 0$ ou encore $\boxed{f_0''(3f_0' + 1) = 0.}$

Soit f une solution de (Δ) et x un point de $[0;1]$ où f'' ne s'annule pas. Alors on dispose d'un voisinage de x sur lequel f'' ne s'annule pas et donc sur lequel f' est constant. Mais alors f'' est nulle sur ce voisinage et cette contradiction assure que les solutions de (Δ) sont celles de $f'' = 0$, i.e. les fonctions affines. Une fonction qui s'annule en deux points distincts étant nécessairement nulle $\boxed{f_0 = 0.}$

13. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par la formule $f(x) = x^2(1-x)$. Puisque u est polynomiale et qu'on a $u(0) = u(1) = 0$, $u \in E_{0,0}^2$. En reprenant les notations de la question 8, q est une fonction polynomiale de degré au plus 3 dont le coefficient de degré 3 est donné par $\displaystyle\int_0^1 (u'(x))^3 \,\mathrm{d}x$. Or, puisque $(u^2, (u')^2)'$ est proportionnel à (u, u'') et $u''' = -6$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} u & u'' \\ u^2 & (u')^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u' & u''' \\ u^2 & (u')^2 \end{vmatrix} = (u')^3 + 6u^2$$

de sorte qu'on a, puisque $u(0) = u(1) = 0$,

$$\int_0^1 (u'(x))^3 \,\mathrm{d}x = -6 \int_0^1 (u(x))^2 \,\mathrm{d}x < 0$$

puisque u^2 est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[0;1]$. Par conséquent q est de degré 3 et admet des limites infinies et de signes opposés en $\pm\infty$. En particulier J_2 ne saurait alors être minoré par 0 : $\boxed{J_2 \text{ n'admet pas de minimum sur } E_{0,0}^2.}$

PARTIE D - Un exemple avec dérivée seconde

14. D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a $|ff''| \leq \dfrac{1}{2}\left(f^2 + (f'')^2\right)$ et donc $|ff''|$ est une fonction continue, donc localement intégrable sur $\mathbf{R}_+$, positive et majorée par une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $\mathbf{R}_+$, donc également intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Par comparaison on en déduit que $\boxed{ff'' \text{ est intégrable sur } \mathbf{R}_+.}$

Si ff' tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on a $1 = \mathrm{o}\left(ff'\right)$ et donc par intégration des relations de comparaison dans le cas divergent $x = \mathrm{o}\left(f^2\right)$ et, par comparaison des fonctions positives, f^2 ne serait pas intégrable en $+\infty$ puisque x ne l'est pas. Cette contradiction assure que $\boxed{ff' \text{ ne tend pas vers } +\infty \text{ en } +\infty.}$

15. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue positive, elle n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+$ si et seulement si $\displaystyle\int_0^x (f')^2$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Comme ff'' est intégrable on a, puisque $(ff')' = ff'' + (f')^2$ et d'après le théorème de Leibniz-Newton,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \int_0^x (f'(t))^2 \,\mathrm{d}t = +\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \left[(f'(t))^2 + f(t)f''(t)\right] \mathrm{d}t = +\infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to+\infty} \left(f(x)f'(x) - f(0)f'(0)\right) = +\infty\end{aligned}$$

et, par linéarité de la limite et d'après la question précédente, cette dernière assertion est fausse. On en déduit $\boxed{f' \in L^2.}$

Le calcul précédent montre qu'on a, pour x dans $\mathbf{R}_+$,

$$f(x)f'(x) = f(0)f'(0) + \int_0^x \left[(f'(t))^2 + f(t)f''(t)\right] \mathrm{d}t$$

et donc ff' admet une limite en $+\infty$ puisque ff'' et $(f')^2$ sont intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Si cette limite est non-nulle, il vient $ff' \sim \lim ff'$ et donc par intégration des relations de comparaison dans le cas divergent $f^2 \sim \lim ff' \cdot \dfrac{x}{2}$ et, par comparaison des fonctions positives, f^2 ne serait pas intégrable en $+\infty$ puisque x ne l'est pas. Cette contradiction assure $\boxed{\lim_{+\infty} ff' = 0.}$

16. Le résultat de la partie I montre que les solutions de (2) sont de la forme

$$t \mapsto u_{\lambda,\varphi,\mu,\psi}(t) = \lambda e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right) + \mu e^{t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \psi\right)$$

avec $(\lambda, \mu, \varphi, \psi)$ des réels. Toutes ces solutions étant de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, leur appartenance à E équivaut au fait qu'elles soient, ainsi que leur dérivée seconde, de carré intégrable. Soit g une fonction de classe C^2 telle que g, g' et g'' soient bornées sur $\mathbf{R}$, alors, en posant $h(t) = e^{-t/2}g(t)$, h est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ et

$$h^2(t) = e^{-t}g^2(t) = \mathrm{O}\left(e^{-t}\right) \quad \text{et} \quad (h''(t))^2 = e^{-t}\left(\frac{1}{4}g(t) - g'(t) + g''(t)\right)^2 = \mathrm{O}\left(e^{-t}\right)$$

et donc, par comparaison avec la fonction $t \mapsto e^{-t}$ qui est positive et intégrable en $+\infty$, $h \in E$. En particulier pour tous λ et φ réels, $u_{\lambda,\varphi,0,0} \in E$ de même que $t \mapsto e^{-t/2}$. Or, par inégalité arithmético-géométrique, si deux fonctions sont dans L^2 leur produit est intégrable et donc si $u_{0,0,1,\psi}$ appartient à E, alors $t \mapsto \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \psi\right)$ est intégrable. Comme il s'agit d'une fonction continue périodique non nulle, c'est impossible. Puisque E est un espace vectoriel qu'on a, pour $(\lambda, \mu, \varphi, \psi)$ réels,

$$u_{\lambda,\varphi,\mu,\psi} \in E \Longrightarrow \mu u_{0,0,1,\psi} \in E \Longrightarrow \mu = 0$$

et donc les solutions de (2) qui appartiennent à E sont les fonctions $u_{\lambda,\varphi,0,0}$, à savoir

$$\boxed{t \mapsto \lambda e^{-t/2} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \varphi\right) \text{ avec } (\lambda, \varphi) \in \mathbf{R}^2}$$

ou encore $\boxed{t \mapsto \alpha e^{-t/2} \cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \beta e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \text{ avec } (\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2.}$

17. D'après ce qui précède si J présente un minimum en un élément f de E, alors f est combinaison linéaire de e_1 et e_2 et donc aussi la partie réelle d'une fonction du type $t \mapsto \lambda \exp(jt)$ avec $\lambda \in \mathbf{C}$. En particulier, puisque $1 + j + j^2 = 0$, $\boxed{f \text{ est solution sur } \mathbf{R}_+ \text{ de } y'' + y' + y = 0.}$

Comme, pour α et β réels, on a $J(\alpha e_1 + \beta e_2) = \dfrac{1}{4}(\alpha + \sqrt{3}\beta)^2$, et puisque

$$J(f) = \min_{g \in E} J(g) \leq \min_{\mathrm{Vect}(e_1,e_2)} J(g) = 0 \leq J(f)$$

on a $J(f) = 0$ et on dispose de α et β réels tels que $\alpha + \sqrt{3}\beta = 0$ et $f = \alpha e_1 + \beta e_2$, i.e. $f(t) = 2\beta e^{-t/2} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{\pi}{3}\right)$. Autrement dit il existe λ dans $\mathbf{R}$ tel que $\boxed{f = \lambda\psi.}$

18. Soit f dans E. Puisque f est de classe C^4, on peut calculer

$$(f + f' + f'')^2 - \left(f^2 - (f')^2 + (f'')^2\right) = 2(ff' + ff'' + f'f'' + (f')^2) = \left((f + f')^2\right)'$$

ou encore

$$(f + f' + f'')^2 - \left((f + f')^2\right)' = \left(f^2 - (f')^2 + (f'')^2\right)$$

et donc, d'après le théorème de LEIBNIZ-NEWTON, pour tout réel $A > 0$,

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^A \left[(f(x))^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2\right] \mathrm{d}x \quad &= \quad \int_0^A \left[f(x) + f'(x) + f''(x)\right]^2 \mathrm{d}x \\ &\quad + (f(0) + f'(0))^2 - (f(A) + f'(A))^2 \ .\end{aligned}}$$

Puisque f et f'' sont de carré intégrable, il en va de même pour f' d'après la question 15 et donc aussi de $f+f'+f''$ puisque L^2 est un espace vectoriel. Il en résulte que $(f+f')^2$ admet une limite en $+\infty$ et comme $f+f'$ est de carré intégrable, cette limite ne saurait être non nulle. Il en résulte $\boxed{\lim_{+\infty}(f+f')^2=0.}$

On en déduit $J(f)=(f(0)+f'(0))^2+\displaystyle\int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2\,\mathrm{d}x$ et donc, en particulier J est une fonction positive et donc, d'après la question précédente,
$\boxed{\min_E J=0 \text{ et ce minimum est atteint en tous les points de } \mathbf{R}\psi.}$

19. Puisque pour f dans E, on a $J(f)=(f(0)+f'(0))^2+\displaystyle\int_0^{+\infty}[f(x)+f'(x)+f''(x)]^2\,\mathrm{d}x$, J est à valeurs positive et s'annule si et seulement si f vérifie : $f\in E$, $f+f'+f''=0$ et $f(0)+f'(0)=0$, puisque $(f+f'+f'')^2$ est une fonction continue et positive. Comme 0 vérifie ces conditions, on en déduit que J admet un minimum, atteint en 0. De plus l'espace des solutions de $y+y'+y''=0$ est un espace vectoriel de dimension 2 et la forme linéaire $y\mapsto y(0)+y'(0)$ est non-nulle d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ dans le cas linéaire. Les deux conditions $f+f'+f''=0$ et $f(0)+f'(0)=0$ fournissent donc une droite, à savoir $\mathbf{R}\psi$. Dès lors J admet un minimum en tous les points de $\mathbf{R}\psi$ si et seulement si $\psi\in E$. Autrement dit

J admet un minimum, égal à 0, et l'atteint sur tous les points de $\mathbf{R}\psi$ car

$$\mathbf{R}\psi=\{f\in E\,|\,f+f'+f''=0 \text{ et } f(0)+f'(0)=0\}\ .$$

PARTIE E - Application : une inégalité de Hardy et Littlewood

20. Si f est dans E et vérifie $\|f\|=0$, alors puisque f^2 est continue et positive, f est nulle et donc l'inégalité de HARDY-LITTLEWOOD est vraie car $f=f'=f''=0$. Il en va de même si $\|f'\|=0$ par positivité des normes.
Pour f dans L^2 et μ dans $\mathbf{R}_+^*$, en posant $f_\mu(x)=f(\mu x)$, $f_\mu\in L^2$ par changement de variable affine bijectif et on a $\|f\|^2=\mu\|f_\mu\|^2$. Et donc, puisque si f appartient à E on a $f'_\mu=\mu(f')_\mu$ et $f''_\mu=\mu^2(f'')_\mu$, il vient $\mu\|f'\|^2=\left\|f'_\mu\right\|^2$ et $\mu^3\|f''\|^2=\left\|f''_\mu\right\|^2$, d'où

$$\mu J(f_\mu)=\mu^4\|f''\|^2-\mu^2\|f'\|^2+\|f\|^2\ .$$

Pour f dans E avec $\|f\|$ et $\|f'\|$ non nuls on peut poser $\mu=\dfrac{\sqrt{2}\,\|f\|}{\|f'\|}$ et il vient, puisque μ et $J(f_\mu)$ sont positifs, $\dfrac{4\|f\|^4\|f''\|^2}{\|f'\|^4}-\|f\|^2\geq 0$. Par positivité des normes on en déduit, en prenant les racines carrées, $\boxed{\|f'\|^2\leq 2\|f\|\cdot\|f''\|.}$

21. En reprenant les notations précédentes on a

$$\|f'\|^2=2\|f\|\cdot\|f''\|\iff\|f'\|=0\quad\text{ou}\quad J(f_\mu)=0 \text{ avec } \mu=\frac{\sqrt{2}\,\|f\|}{\|f'\|}$$

et cette dernière condition entraîne que f_μ appartient à $\mathbf{R}\psi$. De plus le calcul précédent montre qu'on a $J(\psi_\mu)\leq J(\psi_1)$ puisqu'on a choisi μ de sorte à minimiser $J(\psi_\lambda)$ pour $\lambda>0$. Comme $J(\psi)=0$ et que J est à valeurs positives, cela entraîne $J(\psi_\mu)=0$ et donc $\mu=1$, i.e. que ψ vérifie le cas d'égalité. Par homogénéité et changement de variable, on en déduit que les fonctions $t\mapsto\lambda\psi(\mu t)$, avec λ et μ

réels et $\mu > 0$, sont dans le même cas, et on peut remarquer que le cas $\mu = +\infty$ redonne les fonctions constantes. Par conséquent, pour f dans E,

$$\boxed{\|f'\|^2 = 2\,\|f\| \cdot \|f''\| \iff f \text{ est constante ou bien il existe } \lambda \text{ et } \mu \text{ réels avec } \mu > 0 \text{ tels que, pour tout } t \text{ dans } \mathbf{R}_+, \text{ on ait } f(t)\lambda e^{-\mu t} \sin\left(\sqrt{3}\mu t - \frac{\pi}{3}\right).}$$