Critère de diagonalisation de Klarès

Soit n un entier naturel non nul et $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. On note O_n la matrice nulle et I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{C})$. La *trace* d'une matrice U de $M_n(\mathbb{C})$ est notée $\mathrm{tr}(U)$. On dit que deux matrices U et V de $M_n(\mathbb{C})$ *commutent* si $UV = VU$. Une matrice N de $M_n(\mathbb{C})$ est dite *nilpotente* s'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $N^k = O_n$.

Dans tout le problème, on considère une matrice A de $M_n(\mathbb{C})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé, c'est-à-dire l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{C}^n$ est A. Le polynôme caractéristique de A est noté P et les valeurs propres complexes distinctes de A sont notées $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$ on note :

- α_i l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ_i, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine λ_i du polynôme P ;
- P_i le polynôme défini par $P_i(X) = (\lambda_i - X)^{\alpha_i}$;
- F_i le sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$ défini par $F_i = \mathrm{Ker}\left(\left(f - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n}\right)^{\alpha_i}\right)$;
- f_i l'endomorphisme de F_i obtenu par restriction de f à F_i.

La partie B, à l'exception de la question 11), est indépendante de la partie A.
La partie C est indépendante des parties précédentes.

A. Décomposition de Dunford

1) Justifier que l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$ est somme directe des espaces F_i :

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i .$$

2) En considérant une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la somme directe précédente, montrer que pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, le polynôme caractéristique de f_i est P_i. (On pourra d'abord établir que P_i est un polynôme annulateur de f_i.)

3) Montrer qu'il existe une matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = P^{-1}AP$ soit une matrice définie par blocs de la forme suivante :

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots\cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots\cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}$$

où $N_i \in M_{\alpha_i}(\mathbb{C})$ est nilpotente pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$.

4) En déduire que la matrice A s'écrit sous la forme $A = D + N$, où D est une matrice diagonalisable et N une matrice nilpotente de $M_n(\mathbb{C})$ qui commutent.

Les matrices D et N vérifiant ces conditions constituent la *décomposition de Dunford* de la matrice A. Dans toute la suite du problème, on admettra l'*unicité* de cette décomposition, c'est-à-dire que D et N sont déterminées de façon unique par A.

Un exemple pour $n = 3$:

5) Calculer la décomposition de Dunford de $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

B. Commutation et conjugaison

Pour toute matrice B et toute matrice inversible P de $M_n(\mathbb{C})$, on note comm_B et conj_P les endomorphismes de $M_n(\mathbb{C})$ définis par :

$$\forall X \in M_n(\mathbb{C}), \qquad \begin{cases} \mathrm{comm}_B(X) = BX - XB \\ \mathrm{conj}_P(X) = PXP^{-1}. \end{cases}$$

Le but de cette partie est de démontrer que A est diagonalisable si et seulement si comm_A est diagonalisable.

6) Soit P une matrice inversible de $M_n(\mathbb{C})$. Calculer $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P$.

Pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $M_n(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui est égal à 1.

7) Si A est une matrice diagonale, montrer que pour tous $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, comm_A admet $E_{i,j}$ comme vecteur propre. Déterminer l'ensemble des valeurs propres de comm_A.

8) En déduire que si A est diagonalisable, comm_A l'est aussi.

9) Montrer que si A est nilpotente, comm_A l'est également, c'est-à-dire qu'il existe un entier $k > 0$ pour lequel $(\mathrm{comm}_A)^k$ est l'endomorphisme nul de $M_n(\mathbb{C})$.

10) Montrer que si A est nilpotente, et si comm_A est l'endomorphisme nul, alors A est la matrice nulle.

D'après la partie A, l'endomorphisme comm_A admet une décomposition de Dunford de la forme $\mathrm{comm}_A = d + n$, où les endomorphismes diagonalisable d et nilpotent n commutent : $dn = nd$.

11) Déterminer la décomposition de Dunford de comm_A à l'aide de celle de A et conclure.

C. Formes bilinéaires sur un espace vectoriel complexe

Soit p un entier > 0 et E un espace vectoriel de dimension p sur $\mathbb{C}$. On note E^* le dual de E, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

On considère une forme bilinéaire symétrique b sur $\mathbb{C}$, c'est-à-dire une application $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *linéaire par rapport à chacune de ses deux composantes* (et non sesquilinéaire par rapport à la deuxième) et telle que $b(x, y) = b(y, x)$ pour tous $x, y \in E$. Si F est un sous-espace vectoriel de E, on appelle *orthogonal de F relativement à b* le sous-espace vectoriel de E défini par

$$F^{\perp_b} = \left\{x \in E\,;\ \forall y \in F,\ b(x, y) = 0\right\}.$$

On suppose que b est *non dégénérée*, c'est-à-dire que $E^{\perp_b} = \{0\}$.

12) Soit u un endomorphisme de E. Démontrer les implications suivantes :
(i) u est diagonalisable $\Longrightarrow$ (ii) $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(u^2)$ $\Longrightarrow$ (iii) $\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} u = \{0\}$.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, de dimension q, et soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_q)$ une base de F. Pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$, on note φ_i la forme linéaire sur E définie par $\varphi_i(x) = b(\varepsilon_i, x)$.

13) Montrer que $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_q)$ est une famille libre de E^*.

On complète cette famille libre en une base $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ de E^* et on note $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ la base de E *antéduale* (dont $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p)$ est la base duale).

14) Montrer que $F^{\perp_b}$ est engendré par $(e_{q+1}, e_{q+2}, \dots, e_p)$, et en déduire la valeur de $\dim F + \dim(F^{\perp_b})$.

D. Critère de Klarès

Le but de cette partie est de démontrer que la matrice A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A) = \operatorname{Ker}\left((\operatorname{comm}_A)^2\right)$.

15) Montrer que l'application φ de $M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C})$ dans $\mathbb{C}$, définie par la formule $\varphi(X, Y) = \operatorname{tr}(XY)$ pour tous $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$, est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

16) Établir l'égalité $\left(\operatorname{Ker}(\operatorname{comm}_A)\right)^{\perp_\varphi} = \operatorname{Im}(\operatorname{comm}_A)$.

17) En déduire que si A est nilpotente, il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $A = \operatorname{comm}_A(X)$. Calculer alors $\operatorname{comm}_{A+\lambda I_n}(X)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit D et N les matrices de la décomposition de Dunford de A définies à la question 4).

18) Démontrer qu'il existe une matrice X de $M_n(\mathbb{C})$ telle que $N = \operatorname{comm}_A(X)$.

19) Conclure.

FIN DU PROBLÈME

PARTIE I

1. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P est scindé et donc, d'après les définitions données, $P = \prod_{i=1}^{r} P_i$. Comme les λ_i sont tous disctincs, les polynômes P_i sont premiers entre eux deux à deux et donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux, les noyaux $\mathrm{Ker}(P_i(f))$, i.e. les F_i, sont en somme directe et de somme $\mathrm{Ker}(P(f))$. Enfin le théorème de Cayley-Hamilton assure que P est un polynôme annulateur de f et il vient $\boxed{\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.}$

2. Soit i dans $[\![1, r]\!]$. Comme f et $P_i(f)$ commutent, $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ est f-stable et donc f_i est bien un endomorphisme (induit par f) de F_i. Il en résulte que $P_i(f_i)$ est l'endomorphisme induit par $P_i(f)$ sur F_i, i.e. 0, et donc P_i est un polynôme annulateur de f_i. Il en résulte que le polynôme minimal de f_i est une puissance de $\lambda_i - X$ et donc que le spectre de f_i est réduit à $\{\lambda_i\}$. Comme le polynôme caractéristique de f_i est scindé, puisque défini sur $\mathbf{C}$, et que ses racines sont les éléments du spectre de f_i, il est donc égal à une puissance de $\lambda_i - X$. Notons β_i cette puissance.
Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{C}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, disons $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$. La matrice de f relativement à $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs et dans chacun des blocs se trouve la matrice de f_i dans la base $\mathcal{B}_i$. Il en résulte que le polynôme caractéristique de f est le produit des polynômes caractéristiques des f_i, i.e. $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{r} (\lambda_i - X)^{\beta_i}$. Par unicité de la décomposition primaire de P, il vient $\beta_i = \alpha_i$, pour tout i dans $[\![1, r]\!]$, i.e. $\boxed{\text{le polynôme caractéristique de } f_i \text{ est } P_i.}$

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{C}^n$ adaptée à la décomposition $\mathbf{C}^n = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, disons $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathcal{B}_i$. On note, pour i dans $[\![1, r]\!]$, $n_i = f_i - \lambda_i \,\mathrm{Id}_{F_i}$. Puisque P_i annule f_i, n_i est nilpotent (d'indice inférieur à α_i) et donc f_i est somme de l'homothétie $\lambda_i \,\mathrm{Id}_{F_i}$ et de l'endomorphisme nilpotent n_i. En notant N_i la matrice de n_i dans la base $\mathcal{B}_i$, la matrice de f_i est donc somme de $\lambda_i I_{\alpha_i}$ et de N_i, avec N_i nilpotente et donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est de la forme A' donnée par l'énoncé. Si Q est la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$, il vient
$$\boxed{A' = Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} + N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} + N_r \end{pmatrix}}.$$

4. On pose $D = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\alpha_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r I_{\alpha_r} \end{pmatrix} Q^{-1}$ et $N = Q \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & N_r \end{pmatrix} Q^{-1}$. Alors
$DN = ND = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_r N_r \end{pmatrix} Q^{-1}$. De plus D est diagonalisable par construction

et, puisque $M \mapsto QMQ^{-1}$ est un morphisme d'anneaux, N est nilpotente (d'indice inférieur à $\max\limits_{1\leq i\leq r} \alpha_i$), i.e. $\boxed{A = D + N \text{ avec } D \text{ diagonalisable et } N \text{ nilpotente, commutant entre elles.}}$

5. Un calcul direct donne $P = -X^3 + 5X^2 - 8X + 4$, i.e. $P = (2 - X)^2(1 - X)$. On a $F_1 = \mathrm{V}ect\,(e_2 + e_3)$, $\mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}) = \mathrm{V}ect\,(e_1 + e_2)$. Les plans stables correspondent aux vecteurs propres pour la transposée de A. On trouve ainsi les plans d'équations $x-y+z = 0$ et $x-y = 0$. On en déduit que F_2 est le plan d'équation $x-y = 0$, engendré par e_1+e_2 et e_3. Comme $f(e_3) = 2e_3+(e_1+e_2)$, on est amené à définir les endomorphismes d et n tels que : $d(e_2+e_3) = e_2+e_3$, $d(e_1+e_2) = 2(e_1+e_2)$ et $d(e_3) = 2e_3$, $n(e_1+e_2) = n(e_2+e_3) = 0$ et $n(e_3) = e_1+e_2$. Ainsi la décomposition de Dunford de A est $\boxed{A = D + N \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$.

PARTIE II

6. Soit X dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, il vient $\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P(X) = P^{-1}APX - XP^{-1}AP$ et donc $\boxed{\mathrm{conj}_{P^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_P = \mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{P^{-1}}(A)}.}$

7. Soit $a_1, \ldots, a_n$ les coefficients diagonaux de A. Pour i et j dans $[\![1, n]\!]$, on a $\mathrm{comm}_A(E_{i,j}) = AE_{i,j} - E_{i,j}A = a_iE_{i,j} - a_jE_{i,j} = (a_i - a_j)E_{i,j}$. Comme $E_{i,j}$ est non nul, on conclut que $\boxed{E_{i,j} \text{ est vecteur propre de } \mathrm{comm}_A.}$

   Comme $(E_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$, il en résulte que comm_A est diagonalisable et que $\boxed{\text{le spectre de } \mathrm{comm}_A \text{ est } \{\, a_i - a_j \mid (i, j) \in [\![1, n]\!]^2\}.}$

8. Si A est diagonalisable, on dispose de Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ tel que $\mathrm{conj}_{Q^{-1}}(A)$ soit diagonale. D'après ce qui précède, $\mathrm{comm}_{\mathrm{conj}_{Q^{-1}}(A)}$ est donc diagonalisable, i.e. $\mathrm{conj}_{Q^{-1}} \circ \mathrm{comm}_A \circ \mathrm{conj}_Q$ est diagonalisable. Or $\mathrm{conj}_{Q^{-1}} = \left(\mathrm{conj}_Q\right)^{-1}$ et donc comm_A est conjuguée (dans $\mathrm{End}\,\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$) à un endomorphisme diagonalisable et l'est donc lui-même, i.e. $\boxed{\mathrm{comm}_A \text{ est diagonalisable.}}$

9. Soit X dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$. On montre par récurrence sur l'entier n supérieur ou égal à 1 le prédicat $(\mathbf{H}_n)$ donné par : $\mathrm{comm}_A^n(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k A^{n-k}XA^k$.

   La définition de comm_A est exactement $(\mathbf{H}_1)$. Soit alors n dans $\mathbf{N}^*$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ soit vrai. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{comm}_A^{n+1}(X) &= A\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k A^{n-k}XA^k\right) - \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k A^{n-k}XA^k\right)A \\ &= A^{n+1}X + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)(-1)^k A^{n+1-k}XA^k + (-1)^{n+1}XA^{n+1} \end{aligned}$$

   et donc le prédicat est héréditaire. Par le principe de récurrence, $(\mathbf{H}_n)$ est vrai pour tout n dans $\mathbf{N}^*$. Si A est nilpotente, on dispose de p dans $\mathbf{N}^*$ tel que $A^p = 0$. Or, pour k dans $[\![0, 2p-1]\!]$, soit $k \geq p$, soit $2p - 1 - k \geq p$ et donc, en appliquant la formule précédente, il vient $\mathrm{comm}_A^{2p-1} = 0$. Il en résulte que $\boxed{\mathrm{comm}_A \text{ est nilpotente.}}$

10. Si comm_A est nul, alors f commute à tous les éléments de $\text{End}(E)$ et est donc une homothétie, i.e. A est scalaire. Or si A est nilpotente sa seule valeur propre est 0 et donc A est diagonale, de diagonale nulle, i.e. $\boxed{A = 0.}$

11. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. D'après ce qui précède comm_D et comm_N sont respectivement diagonalisable et nilpotent. Par linéarité de la multiplication matricielle, on a de plus $\text{comm}_A = \text{comm}_{D+N} = \text{comm}_D + \text{comm}_N$. Enfin un calcul direct montre qu'on a $\text{comm}_D \circ \text{comm}_N - \text{comm}_N \circ \text{comm}_D = \text{comm}_{DN-ND} = \text{comm}_0 = 0$. Par unicité de la décomposition de Dunford, celle-ci s'écrit $\boxed{\text{comm}_A = \text{comm}_D + \text{comm}_N.}$

    Si comm_A est diagonalisable, alors d'après l'unicité de la décomposition de Dunford, celle-ci est $\text{comm}_A = \text{comm}_A + 0$ et donc $\text{comm}_N = 0$, d'où $N = 0$ d'après ce qui précède et donc $A = D$. Il en résulte que A est diagonalisable. La réciproque ayant déjà été démontrée, il vient $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement } \text{comm}_A \text{ l'est.}}$

PARTIE III

12. Comme u^2 commute à u, $\text{Ker}(u^2)$ est u-stable. Si u est diagonalisable, sa restriction à $\text{Ker}(u^2)$ l'est aussi et y est annulée par le polynôme X^2, c'est donc que son polynôme minimal divise X^2 et comme ce polynôme minimal est simplement scindé, c'est que c'est X, i.e. u est nul sur $\text{Ker}(u^2)$ ou encore $\text{Ker}(u^2) \subset \text{Ker}(u)$. L'inclusion réciproque étant toujours vraie, on a $\boxed{\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2).}$

    On a $\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \text{Ker}(u_{|\,\text{Im}(u)}) = u(\text{Ker}(u^2))$. Par conséquent si $\text{Ker}(u) = \text{Ker}(u^2)$, il vient $\boxed{\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u) = \{0\}.}$

13. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ dans $\mathbf{C}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i = 0$. Soit x dans E, il vient

$$0 = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i b(\varepsilon_i, x) = b\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i, x\right)$$

    et donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i \in E^{\perp_b}$. Puisque b est non dégénérée, il s'ensuit $\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i = 0$ et donc, par indépendance de $(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_q)$, tout les λ_i sont non nuls. Donc $\boxed{\text{la famille } (\varphi_i)_{1 \le i \le q} \text{ est libre.}}$

14. Soit x dans E. On a donc $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x) e_i$. Si $x \in F^{\perp_b}$, pour $j \in [\![1, q]\!]$, $b(x, \varepsilon_j) = 0$, i.e. $\varphi_j(x) = 0$. Réciproquement si $x = \displaystyle\sum_{i=q+1}^{p} \varphi_i(x) e_i$ et $y \in F$, alors $y = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \varphi_j(y) \varepsilon_j$ et donc $b(x, y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{q} \sum_{i=q+1}^{p} \varphi_j(y) \varphi_i(x) \varphi_j(e_i) = 0$. Il en résulte $\boxed{F^{\perp_b} = \mathrm{V}ect\,(e_{q+1}, \dots, e_p)).}$

    Comme $(e_{q+1}, \dots, e_p)$ est une sous-famille d'une base, elle est libre et forme donc une base de $F^{\perp_b}$. Il en résulte $\dim(F^{\perp_b}) = p - q$, i.e. $\boxed{\dim F + \dim F^{\perp_b} = \dim(E).}$

PARTIE IV

15. L'application produit $(M,N) \mapsto MN$ est bilinéaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ et la trace est linéaire, donc φ est bilinéaire. Plus précisément, soit M et N dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$. On a $\mathrm{Tr}(MN) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E_{i,j}^*(M)E_{j,i}^*(N)$ et donc φ est symétrique. De plus $\varphi(M, {}^{\mathrm{t}}\overline{M})$ est la somme des modules au carré de tous les termes de M. Il en résulte $\varphi(M, {}^{\mathrm{t}}\overline{M}) = 0 \Leftrightarrow M = 0$ et en particulier $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})^{\perp_\varphi} = \{0\}$, i.e. $\boxed{\varphi \text{ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.}}$

16. Soit M dans $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$. On dispose alors de X dans $\mathfrak{M}_n(\mathbf{C})$ tel que $M = AX - XA$. Soit maintenant N dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)$, i.e. tel que A et N commutent. Il vient

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(MN) &= \mathrm{Tr}(AXN - XAN) = \mathrm{Tr}(AXN) - \mathrm{Tr}(XAN) = \varphi(A, XN) - \varphi(X, AN) \\ &= \varphi(XN, A) - \varphi(X, NA) = \mathrm{Tr}(XNA) - \mathrm{Tr}(XNA) = 0 \end{aligned}$$

par symétrie de φ et puisque A et N commutent. Il en résulte $M \in (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$. Or d'après le théorème du rang et les deux questions précédentes les dimensions de $\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$ et $(\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$ sont toutes deux égales à $\mathrm{codim}(\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))$. Il en résulte qu'il sont égaux, i.e. $\boxed{\mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A) = (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}.}$

17. Soit M dans $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)$, i.e. M commutant à A. Si A est nilpotente, on dispose de k dans $\mathbf{N}^*$ tel que $A^k = 0$ et alors $(AM)^k = A^kM^k = 0$ et donc AM est nilpotente. Toutes ses valeurs propres sont donc nulles et, puisque le corps de base est $\mathbf{C}$ et donc que AM est trigonalisable, sa trace est la somme de ses valeurs propres, i.e. 0. Donc $A \in (\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A))^{\perp_\varphi}$. D'après ce qui précède $A \in \mathrm{Im}(\mathrm{comm}_A)$, i.e. $\boxed{\exists X \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}),\ \mathrm{comm}_A(X) = A.}$

Soit λ dans $\mathbf{C}$, on a $\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n} = \mathrm{comm}_A + \lambda\,\mathrm{comm}_{I_n} = \mathrm{comm}_A$, d'où $\boxed{\mathrm{comm}_{A+\lambda I_n}(X) = A.}$

18. Soit i dans $[\![1, r]\!]$ et $\mathcal{B}_i$ une base de F_i. On écrit $f_i = d_i + n_i$ la décomposition de Dunford de la restriction de f à F_i. On a donc $d_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i}$. Soit A_i la matrice de f_i dans $\mathcal{B}_i$ et $D_i + N_i$ sa décomposition de Dunford. D'après ce qui précède, il existe une matrice X_i dans $\mathfrak{M}_{\alpha_i}(\mathbf{C})$ telle que $\mathrm{comm}_{N_i+\lambda_i I_{\alpha_i}}(X_i) = N_i$, i.e. $N_i = \mathrm{comm}_{A_i}(X_i)$. Soit u_i l'endomorphisme de F_i associé à X_i relativement à $\mathcal{B}_i$ et u l'endomorphisme de $\mathbf{C}^n$ dont les restrictions aux F_i sont les u_i. Alors, relativement à $\bigcup_{i=1}^r \mathcal{B}_i$, les matrices de f, n et u sont diagonales par blocs et dans ces blocs sont respectivement A_i, N_i et X_i. Comme $A_iX_i - X_iA_i = N_i$, on en déduit $f \circ u - u \circ f = n$ et donc, en prenant les matrices de ces endomorphismes dans la base canonique, il vient $\boxed{\exists X \in \mathfrak{M}_n(\mathbf{C}),\ \mathrm{comm}_A(X) = N.}$

19. Si A est diagonalisable, alors comm_A aussi d'après 8) et donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2)$, d'après 12). Réciproquement soit $A = D+N$ la décomposition de Dunford de A. Comme D et N commutent, il en est de même de A et N, donc $N \in \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A)$. On dipose également de X tel que $\mathrm{comm}_A(X) = N$, d'après ce qui précède, et donc $X \in \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2)$. Par conséquent, puisque $\mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2)$, $0 = \mathrm{comm}_A(X) = N$ et donc $A = D$, i.e. A est diagonalisable. Il vient $\boxed{A \text{ est diagonalisable si et seulement si } \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{comm}_A^2).}$