Deuxième composition de mathématiques
Mines-Ponts – MP

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note φ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\varphi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que φ_0 est la fonction constante 1. Soit $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous-espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\varphi_{\lambda_k})_{k\in\mathbf{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$ pour l'une ou l'autre des deux normes classiques N_∞ ou N_2 définies par :

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \quad \text{et} \quad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} .$$

On admettra le théorème suivant (dû à Karl Weierstrass) : pour toute fonction f dans $C([0,1])$, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de fonctions polynomiales telle que $N_\infty(f - P_n)$ tende vers 0, i.e. $\lim_n P_n = f$ pour la norme N_∞.

La question préliminaire et les parties A, B, C et D sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1) Montrer que $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

A - Déterminants de Cauchy

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ et $(b_k)_{1\leq k\leq n}$ de réels telles que $a_i + b_k \neq 0$ pour tous i et j dans $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \leq n$, le déterminant de Cauchy d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix} .$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(X - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(X + b_k)} .$$

2) Montrer que si $R(X)$ est de la forme $R(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X + b_k}$, alors

$$A_n Dn = R(a_n) D_{n-1} .$$

On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix} .$$

3) En déduire

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \leq i,j \leq n} (a_i + b_j)} .$$

B - Distance d'un point à une partie dans un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x, A)$ défini par :

$$d(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\| .$$

4) Montrer que $d(x, A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.

5) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors

$$d(x, A) = \lim_n d(x, A_n) .$$

On considère un sous-espace vectoriel V de dimension finie de E, et on note $B = \{y \in E \mid \|y - x\| \leq \|x\|\}$.

6) Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.

7) En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

C - Distance d'un point à un sous-espace de dimension finie dans un espace préhilbertien

Dans cette partie, on suppose que la norme sur l'espace vectoriel E est définie à partir d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur E : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On rappelle que, pour tout x dans E, il existe un unique vecteur y de V tel que $x - y$ soit orthogonal à V, i.e. pour z dans V, $\langle x - y \mid z \rangle = 0$. Ce vecteur est appelé projection orthogonale de x sur V.

8) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors pour tout $x \in E$, la projection orthogonale de x sur V est l'unique élément $y \in V$ vérifiant $d(x, V) = \|x - y\|$.

Pour tout suite finie $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E^n$, on désigne par $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ le déterminant de la *matrice de Gram* d'ordre n définie par :

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \langle x_1 \mid x_1 \rangle & \langle x_1 \mid x_2 \rangle & \cdots & \langle x_1 \mid x_n \rangle \\ \langle x_2 \mid x_1 \rangle & \langle x_2 \mid x_2 \rangle & \cdots & \langle x_2 \mid x_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_n \mid x_1 \rangle & \langle x_n \mid x_2 \rangle & \cdots & \langle x_n \mid x_n \rangle \end{pmatrix}$$

9) Montrer que $G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ si et seulement si la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est liée.

10) On suppose que la famille $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est libre et l'on désigne par V l'espace vectoriel qu'elle engendre. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$d(x, V)^2 = \frac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)} .$$

D - Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$, on note $\overline{A}^\infty$ et $\overline{A}^2$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2, respectivement. Pour $f \in C([0,1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

11) Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$ on a $\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{ f \in C([0,1]) \mid f(0) = 0\}$, et on rappelle que φ_0 désigne la fonction constante 1.

12) Montrer $\varphi_0 \in \overline{V_0}^2$.

13) En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est pas dense pour la norme N_∞.

14) Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

15) Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\varphi_m \in \overline{V}^\infty$.

16) En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\varphi_m \in \overline{V}^2$.

E - Un critère de densité de W pour la norme N_2

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note W_n l'espace vectoriel engendré par la famille finie $(\varphi_{\lambda_k})_{0 \leq k \leq n}$.

17) Montrer que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si $\lim\limits_n d(\varphi_\mu, W_n) = 0$ pour tout entier $\mu \geq 0$.

18) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$,

$$d(\varphi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu + 1}} \prod_{k=0}^{n} \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} .$$

19) Montrer que pour tout $\mu \geq 0$, la suite $\left(\dfrac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1} \right)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers 1 si et seulement si la suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbf{N}}$ tend vers $+\infty$.

(On pourra pour cela étudier les variations de la fonction $x \in [0, \mu] \mapsto \dfrac{\mu - x}{x + \mu + 1}$.)

20) En déduire que l'espace W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 si et seulement si la série $\sum\limits_k \dfrac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

F - Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) Montrer que si W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞, alors la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente.

22) Soit $\psi = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \varphi_{\lambda_k}$ un élément quelconque de W_n. Montrer que si $\lambda_k \geq 1$ pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n\}$, alors pour tout $\mu \geq 1$, on a :

$$N_\infty(\varphi_\mu - \psi) \leq N_2\left(\mu\varphi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \varphi_{\lambda_k - 1}\right) .$$

23) On suppose que la suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}}$ vérifie les deux conditions suivantes :

$$\begin{cases} (i) \ : \quad \lambda_0 = 0 \\ (ii) \ : \quad \lambda_k \geq 1 \text{ pour tout } k \geq 1 \ . \end{cases}$$

Montrer que sous ces conditions, si la série $\displaystyle\sum_k \frac{1}{\lambda_k}$ est divergente, alors W est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

24) Montrer que la conclusion précédente est encore valable si on remplace la condition (ii) par la condition plus faible :

$$(ii)' \ : \quad \inf_{k\geq 1} \lambda_k > 0 \ .$$

Deuxième composition de mathématiques – Mines-Ponts – MP

Question préliminaire

1) Soit $\sum_{\lambda\geq 0} a_\lambda \varphi_\lambda = 0$ une relation de dépendance linéaire entre les éléments de la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$, avec $(a_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ une famille presque nulle de réels. On note I l'ensemble fini des indices λ tels que $a_\lambda \neq 0$. Si I est non vide on pose $n = \mathrm{Card}(I)$ et $I = \{\, \lambda_k \mid 1 \leq k \leq n\}$. Comme les fonctions φ_λ sont de classe C^∞ sur $]0,1]$, on peut dériver la relation de dépendance linéaire et la multiplier par l'identité. On obtient alors $\sum_{\lambda\geq 0} a_\lambda \lambda \varphi_\lambda = 0$ et on peut itérer le raisonnement. En particulier pour $0 \leq p \leq n-1$, il vient $\sum_{k=1}^n a_{\lambda_k} \lambda_k^p = 0$, en évaluant les relations obtenues en 1. Le déterminant de Vandermonde des $(\lambda_k)_{1\leq k\leq n-1}$ étant non nul par hypothèse, on en déduit que tous les a_k sont nuls. Cette contradiction assure que I est vide et donc $\boxed{\text{la famille } (\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0} \text{ est une famille libre de } C([0,1]).}$

Remarque : la famille $(\varphi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille de vecteurs propres pour des valeurs propres distinctes de l'endomorphisme de $C^\infty(]0,1])$ défini par $y \mapsto xy'$. Ils forment donc une famille libre.

A - Déterminants de Cauchy

2) On dipose de $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ tel que $R = \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{A_k}{X+b_k}$.

On a

$$D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

et donc, par multilinéarité du déterminant,

$$A_n D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_1+b_n} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \dfrac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

En rajoutant la combinaison linéaire des $n-1$ premières colonnes obtenue en les multipliant respectivement par $A_1, \ldots, A_{n-1}$, on obtient

$$A_n D_n = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & R(a_1) \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{a_n+b_1} & \dfrac{1}{a_n+b_2} & \cdots & R(a_n) \end{vmatrix}.$$

Or $R(a_1) = \cdots = R(a_{n-1}) = 0$ par définition de R et donc, en développant par rapport à la dernière colonne, il vient $\boxed{A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}.}$

3) Si la famille des $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ n'est formée de réels tous distincts, alors deux lignes de la matrice définissant D_n sont égales et donc $D_n = 0$. De même si tous les $(b_k)_{1\leq k\leq n}$, on a affaire à deux colonnes égales et donc $D_n = 0$. Dans ces deux cas la formule demandée est vraie. On suppose maintenant qu'on n'est pas dans ces cas.

On va démontrer le prédicat $(\mathbf{H}_m)$ par récurrence sur l'entier m dans $[\![1, n]\!]$:

$$(\mathbf{H}_m) \ : \quad D_m = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq m} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq m} (a_i + b_j)} .$$

Pour $m = 1$, le numérateur est, par convention, égal à 1, et on a bien $D_1 = \dfrac{1}{a_1 + b_1}$.

Soit m dans $[\![1, n-1]\!]$ tel que $(\mathbf{H}_m)$ soit vrai. On applique ce qui précède en prenant pour n l'entier $m+1$. Alors R est une fraction rationnelle de degré strictement négatif à pôles simples, et donc sa décomposition en éléments simples est de la forme décrite dans la question précédente, i.e. on dispose de $(A_k)_{1\leq k\leq m+1}$ dans $\mathbf{R}^{m+1}$ tel que

$$\frac{\prod_{k=1}^{m}(X - a_k)}{\prod_{k=1}^{m+1}(X + b_k)} = \sum_{k=1}^{m+1} \frac{A_k}{X + b_k} .$$

En multipliant l'égalité précédente par $X + b_{m+1}$ et en évaluant en $-b_{m+1}$, il vient $A_{m+1} = \dfrac{\prod_{k=1}^{m}(-b_{m+1} - a_k)}{\prod_{k=1}^{m}(-b_{m+1} + b_k)}$. Cette dernière quantité est donc non nulle et il vient

$$D_{m+1} = \frac{R(a_{m+1} D_m}{A_{m+1}} = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq m+1} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq m+1} (a_i + b_j)}$$

D'après le principe de récurrence, on en conclut que $(\mathbf{H}_n)$ est vraie, i.e.

$$\boxed{D_n = \frac{\displaystyle\prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} (a_i + b_j)}.}$$

B - Distance d'un point à une partie dans un espace normé

4) Soit x dans E. Alors la distance $d(x, A)$ est nulle si et seulement s'il existe une suite (a_n) de points de A tels que $d(x, a_n) \to 0$, par définition de l'infimum. Cette dernière condition exprime que x est limite de points de A, i.e. qu'il est adhérent à A. On a donc

$\boxed{d(x, A) = 0 \text{ si et seulement si } x \text{ est adhérent à } A.}$

5) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de parties de E de réunion égale à A et x dans E. Par croissance de (A_n), la suite $(d(x, A_n))$ est décroissante et par inclusion de A_n dans A, cette suite de distances est minorée par $d(x, A)$. Par conséquent elle converge vers son infimum.

   Soit maintenant d un réel tel que $d > d(x, A)$. Par définition, il existe donc a dans A tel que $d(x, a) < d$ et donc on dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $a \in A_n$ et donc $d(x, A_n) < d$. Il en résulte que d n'est pas un minorant de la suite $(d(x, A_n))$. Par conséquent $d(x, A)$ est le plus grands des minorants de la suite $(d(x, A_n))$, donc son infimum et donc sa limite, i.e. $\boxed{d(x, A) = \lim_n d(x, A_n).}$

6) Puisque B est une boule fermée, B est fermée et bornée. Comme V est de dimension finie, il est fermé et donc $B \cap V$ est compact en tant que fermé, car intersection de deux fermés, et borné, car inclus dans un borné, dans un espace de dimension finie : $\boxed{B \cap V \text{ est compact.}}$

   Puisque $B \cap V \subset V$, on a $d(x, V) \leq d(x, B \cap V)$. Puisque $B \cap V$ contient 0, $d(x, B \cap V) \leq d(x, 0) = \|x\|$. Si $d(x, V) = \|x\|$, alors a égalité dans toutes ces inégalités et donc $d(x, V) = d(x, B \cap V)$.

   Sinon, soit (x_n) une suite de points de V telle que $d(x, x_n)$ converge vers $d(x, V)$ avec $d(x, V) < \|x\|$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang la suite (x_n) est à valeurs dans $B \cap V$ et donc, à partir de ce rang, $d(x, B \cap V) \leq d(x, x_n)$. En passant à la limite on en déduit $d(x, B \cap V) \leq d(x, V)$ et, finalement, $\boxed{d(x, V) = d(x, B \cap V).}$

7) Comme $B \cap V$ est compact, l'application $y \mapsto d(x, y)$, définie sur $B \cap V$, atteint son minimum, i.e. $d(x, B \cap V)$ est atteinte. D'après la question précédente il en va de même pour $d(x, V)$: $\boxed{\text{il existe } y \text{ dans } V \text{ tel que } d(x, V) = \|x - y\|.}$

C - Distance d'un point à un sous-espce de dimension finie dans un espace préhilbertien.

8) Soit V un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, x dans E et y la projection orthogonale de x sur V. Soit enfin z dans V. D'après le théorème de Pythagore, on a $\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y - z\|^2$ et donc $d(x, y) \leq d(x, z)$ avec égalité si et seulement si $y = z$:

   $\boxed{\text{la projection orthogonale de } x \text{ sur } V \text{ est l'unique élément } y \text{ de } V \text{ tel que } d(x, V) = \|x - y\|.}$

9) Soit $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires et C la combinaison linéaire des colonnes $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ de $M(x_1, \cdots, x_n)$ correspondante : $C = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$. Si une telle combinaison linéaire est alors le vecteur $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ est orthogonal à $x_1, \ldots, x_n$ et donc aussi à lui-même, par linéarité du produit scalaire. Ce vecteur est donc nul. Réciproquement toute relation de dépendance linéaire pour la famille $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ fournit une relation de dépendance linéaire des colonnes $(C_i)_{1\leq i\leq n}$. Il en résulte que le rang de $M(x_1, \cdots, x_n)$ est n si et seulement si le rang de $(x_1, \cdots, x_n)$ est n, i.e. par contraposée $\boxed{G(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \text{ si et seulement si la famille } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ est liée.}}$

10) Soit x dans E, y la projection orthogonale de x sur V et $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de scalaires telle que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. En retranchant la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i C_i$ de la dernière colonne de

$M(x_1, \cdots, x_n, x)$, on obtient

$$G(x_1, \cdots, x_n, x) = \begin{vmatrix} \langle x_1 \mid x_1\rangle & \langle x_1 \mid x_2\rangle & \cdots & \langle x_1 \mid x_n\rangle & \langle x_1 \mid x-y\rangle \\ \langle x_2 \mid x_1\rangle & \langle x_2 \mid x_2\rangle & \cdots & \langle x_2 \mid x_n\rangle & \langle x_2 \mid x-y\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \langle x_n \mid x_1\rangle & \langle x_n \mid x_2\rangle & \cdots & \langle x_n \mid x_n\rangle & \langle x_n \mid x-y\rangle \\ \langle x \mid x_1\rangle & \langle x \mid x_2\rangle & \cdots & \langle x \mid x_n\rangle & \langle x \mid x-y\rangle \end{vmatrix}$$

et la dernière colonne est identiquement nulle à l'exception du dernier terme qui vaut $\langle x \mid x-y\rangle$ ou encore $\langle x-y+y \mid x-y\rangle$, soit $\langle x-y \mid x-y\rangle$ par orthogonalité de $x-y$ avec y. Il vient donc, en développant par rapport à la dernière colonne, $G(x_1, \cdots, x_n, x) = \|x-y\|^2 G(x_1, \cdots, x_n)$.

D'où, puisque $d(x, V) = \|x-y\|$, $\boxed{d(x,V)^2 = \dfrac{G(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)}{G(x_1, x_2, \ldots, x_n)}.}$

D - Comparaison des normes N_∞ et N_2

11) Soit f dans $C([0,1])$. Comme f est continue et $[0,1]$ compact, $N_\infty(f)$ est bien définie et est un majorant de $|f|$ sur $[0,1]$. Comme f est continue, $|f|^2$ aussi et $N_2(f)$ est également bien défini. De plus $|f|^2$ étant majoré par $N_\infty(f)^2$,l'inégalité de la moyenne donne $\boxed{N_2(f) \leq N_\infty(f).}$

Il en résulte que l'identité est une application linéaire continue, car 1-Lipschitzienne, de $C([0,1])$ muni de N_∞ dans $C([0,1])$ muni de N_2. Par conséquent si une suite de $C([0,1])$ converge pour N_∞, son image par l'identité converge pour N_2 vers l'image de la limite par l'identité, i.e. vers la même limite. On en conclut que si x appartient à $\overline{A}^\infty$, il est limite de points de A pour N_∞, donc pour N_2 et est donc dans $\overline{A}^2$, i.e. $\boxed{\overline{A}^\infty \subset \overline{A}^2.}$

12) On considère, pour n dans $\mathbf{N}$ la fonction f_n affine par morceaux valant 0 en 0, 1 en 2^{-n} et constante sur $[2^{-n}, 1]$. Cette une fonction continue puisqu'affine par morceaux et continue en ses changements de pente. Comme $f_n(0) = 0$, on a $f_n \in V_0$.

De plus $|f_n - \varphi_0|$ est nulle sur $[2^{-n}, 1]$ et majorée par 1 sur $[0, 2^{-n}]$. L'inégalité de la moyenne entraîne donc $N_2(f_n - \varphi_0) \leq (2^{-n})^{1/2}$ et ainsi $f_n \to \varphi_0$ pour la norme N_2. Par conséquent $\boxed{\varphi_0 \in \overline{V_0}^2.}$

13) Soit f dans $C([0,1])$. On a $f = (f - f(0)\varphi_0) + f(0)\varphi_0$. Si f_n est une suite de points de V_0 tendant vers φ_0, par linéarité de la limite, la suite $f - f(0)\varphi_0 + f(0)f_n$ converge vers f. Comme c'est une suite de points de V_0, il en résulte $f \in \overline{V_0}^2$ et donc $\boxed{V_0 \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_2.}$

Soit maintenant (f_n) une suite de points de V_0 tendant vers φ_0 pour N_∞. À partir d'un certain rang, on a $N_\infty(f_n - \varphi_0) < 1$ et en particulier $|f_n(0) - \varphi_0(0)| < 1$, ce qui est contradictoire avec $f_n \in V_0$ et $\varphi_0(0)1$. Donc φ_0 n'est pas dans l'adhérence de V_0 pour N_∞ et donc $\boxed{V_0 \text{ n'est pas dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_\infty.}$

14) Soit V un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé. Son adhérence contient V et n'est donc pas vide. Elle est stable par combinaison linéaire par linéarité de la limite et donc $\boxed{\overline{V} \text{ est un espace vectoriel.}}$

15) Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$. Si V est dense dans $C([0,1])$ pour N_∞, son adhérence contient tous les φ_m pour tout entier naturel m. Réciproquement si tel est le cas, l'adhérence de V pour N_∞ contient donc toutes les fonctions polynomiales et donc l'adhérence de cet ensemble, i.e. tout $C([0,1])$ d'après le théorème de Weierstrass, i.e.

$\boxed{V \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_\infty \text{ si et seulement si, pour tout entier naturel } m,\ \varphi_m \in \overline{V}^\infty.}$

16) Comme précédemment, la condition est nécessaire. Si la condition est remplie, $\overline{V}^2$ est un espace vectoriel, d'après 14), contenant les φ_m pour m dans $\mathbf{N}$ et est donc dense dans $C([0,1])$ pour N_∞, d'après 15), et donc aussi pour N_2 d'après 11). Mais l'adhérence $\overline{V}^2$ étant fermée (pour N_2), cela veut dire qu'on a $\overline{V}^2 = C([0,1])$.
D'où

$\boxed{V \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_2 \text{ si et seulement si, pour tout entier naturel } m,\ \varphi_m \in \overline{V}^\infty.}$

E - Un critère de densité de W pour la norme N_2

17) D'après 16), W est dense pour N_2 si et seulement son adhérence pour N_2 contient les φ_μ pour μ dans $\mathbf{N}$. D'après 4), cela équivaut à $d(\varphi_\mu, W) = 0$ et donc aussi, d'après 5) et le fait que W est réunion croissante des W_n, à $\lim_n d(\varphi_\mu, W_n) = 0$, i.e.

$\boxed{\text{l'espace } W \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour la norme } N_2 \text{ si et seulement si } \lim_n d(\varphi_\mu, W_n) = 0 \text{ pour tout entier } \mu \geq 0.}$

18) On a $W_n = \mathrm{V}ect\,(\varphi_{\lambda_0}, \cdots, \varphi_{\lambda_n})$ et cette famille est libre, d'après 1). Or la norme N_2 dérive d'un produit scalaire et W_n est de dimension finie. La distance cherchée est donc donnée par la formule obtenue en 10).
Pour λ et μ dans $\mathbf{R}_+$, on a

$$\langle \varphi_\lambda \mid \varphi_\mu \rangle = \int_0^1 t^{\lambda+\mu}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda+\mu+1}$$

et on en déduit que les matrices de Gram apparaissant dans la formule 10) sont des déterminants de Cauchy (de tailles $n+2$ et $n+1$) obtenus pour $a_{i+1} = \lambda_i + 1$ et $b_{i+1} = \lambda_i$, pour $0 \leq i \leq n$, et $a_{n+2} = \mu + 1$ et $b_{n+2} = \mu$. La formule 3) donne directement

$$d(\varphi_\mu, W_n)^2 = \frac{\prod_{k=0}^n (\mu - \lambda_k)^2}{(2\mu+1)\prod_{k=0}^n (\lambda_k + \mu + 1)^2}$$

et donc, par positivité des λ_k et de μ, $\boxed{d(\varphi_\mu, W_n) = \frac{1}{\sqrt{2\mu+1}} \prod_{k=0}^n \frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}}$

19) Si la suite (λ_k) tend vers $+\infty$, alors $|\lambda_k - \mu| = \lambda_k - \mu$) partir d'un certain rang et donc $\dfrac{|\mu - \lambda_k|}{\mu + \lambda_k + 1} \sim 1$.

Réciproquement, supposons que la suite $\dfrac{|\mu - \lambda_k|}{\mu + \lambda_k + 1}$ tende vers 1. Si la suite (λ_k) ne diverge pas vers l'infini, elle admet une sous-suite bornée et donc aussi une valeur d'adhérence d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Si λ est cette valeur d'adhérence, par continuité de la fonction $x \mapsto \dfrac{|\mu - x|}{\mu + x + 1}$ sur $\mathbf{R}_+$ (ce qui est le cas puisque que c'est la composée de la valeur absolue avec une fraction rationnelle sans pôle sur $\mathbf{R}_+$), on a $|\lambda - \mu| = \lambda + \mu + 1$. Mais, par inégalité triangulaire, on a $|\lambda - \mu| \leq \lambda + \mu < \lambda + \mu + 1$ et cette contradiction assure que la suite (λ_k) diverge vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{la suite } \left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right)_{k \in \mathbf{N}} \text{ tend vers 1 si et seulement si la suite } (\lambda_k)_{k\in\mathbf{N}} \text{ tend vers } +\infty.}$$

20) Montrons que la condition est nécessaire. On écrit 18) pour $\mu = 0$. On a donc

$$d(\varphi_0, W_n) = \prod_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + 1} = \prod_{k=0}^{n} \left(1 + \frac{1}{\lambda_k}\right)^{-1}.$$

Cette distance tend vers 0 si et seulement si le logarithme de son inverse tend vers $+\infty$, i.e. si et seulement si la série $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{\lambda_k}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Si (λ_k) ne diverge pas vers $+\infty$, cette série est grossièrement divergente. Sinon, comme c'est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à celui de la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$, ces deux séries sont de même nature et donc si $d(\varphi_0, W_n)$ tend vers 0, alors $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge.

Réciproquement, soit μ dans $\mathbf{N}$.

Si (λ_k) ne diverge pas vers $+\infty$, d'après 19), $\ln(d(\varphi_\mu, W_n))$ est une série grossièrement divergente, à termes négatifs, donc $d(\varphi_\mu, W_n)$ converge vers 0 et, d'après 17), W est dense dans $C([0,1])$.

Supposons maintenant que la suite (λ_k) diverge vers $+\infty$ et que la série $\sum \dfrac{1}{\lambda_k}$ diverge. Comme elle est à termes positifs, elle diverge vers $+\infty$. Pour $\lambda_k \geq \mu$, on a

$$-\ln\left(\frac{|\lambda_k - \mu|}{\lambda_k + \mu + 1}\right) = \ln\left(\frac{\lambda_k + \mu + 1}{\lambda_k - \mu}\right) = \ln\left(1 + \frac{2\mu + 1}{\lambda_k - \mu}\right)$$

et donc, en reprenant l'argument précédent à l'envers, $-\ln(d(\varphi_\mu, W_n))$ est une série à termes positifs de même nature que $\sum \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_k - \mu}$ (cette série étant définie à partir d'un certain rang seulement, a priori).

Comme (λ_k) diverge vers $+\infty$, $\dfrac{1}{\lambda_k - \mu} \sim \dfrac{1}{\lambda_k}$ et donc cette dernière série est de même nature que $\sum \dfrac{2\mu + 1}{\lambda_k}$ et est donc divergente (vers $+\infty$). Il en résulte que $d(\varphi_\mu, W_n)$ tend vers 0 et donc que W est dense dans $C([0,1])$.

$$\boxed{\text{L'espace } W \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour la norme } N_2 \text{ si et seulement si la série } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente.}}$$

F - Un critère de densité de W pour la norme N_∞

21) D'après 11), W est dense pour N_∞ impose qu'il le soit pour N_2 et donc, d'après 20),

$$\boxed{\text{si l'espace } W \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour la norme } N_\infty \text{ alors la série } \sum_k \frac{1}{\lambda_k} \text{ est divergente.}}$$

22) Avec les notations de l'énoncé

$$\begin{aligned}
N_\infty(\varphi_\mu - \psi) &= \sup_{0\le x\le 1} \left| x^\mu - \sum_{k=0}^{n} a_k x^{\lambda_k} \right| \\
&= \sup_{0\le x\le 1} \left| \mu \int_0^x t^{\mu-1}\,\mathrm{d}t - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \int_0^x t^{\lambda_k - 1}\,\mathrm{d}t \right| \\
&\le \sup_{0\le x\le 1} \int_0^x \left| \mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k t^{\lambda_k-1} \right| \mathrm{d}t \\
&\le \int_0^1 \left| \mu t^{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k t^{\lambda_k-1} \right| \mathrm{d}t\ .
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\boxed{N_\infty(\varphi_\mu - \psi) \le N_2\left(\mu\varphi_{\mu-1} - \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k \varphi_{\lambda_k - 1}\right).}$$

23) Pour $k \in \mathbf{N}^*$, on pose $\mu_k = \lambda_k - 1$. Si la suite (λ_k) ne diverge pas vers l'infini, il en est de même pour la suite (μ_k). Sinon les séries de leurs inverses sont des séries à termes positifs de termes généraux équivalents et donc de même nature. Il en résulte que la série $\sum \frac{1}{\mu_k}$ diverge et donc que la famille (φ_{μ_k}) est dense dans $C([0,1])$ pour N_2 d'après 20).
Soit alors μ dans $\mathbf{N}^*$, on a alors $\varphi_{\mu-1}$ qui est dans l'adhérence pour N_2 des (φ_{μ_k}) et donc, d'après 22), φ_μ est dans l'adhérence pour N_∞ des (φ_{λ_k}). Comme φ_0 est dans W par hypothèse, on conclut grâce à 16) que $\boxed{W \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour } N_\infty.}$

24) Posons $\alpha = \inf_{k\ge 1} \lambda_k$ et, pour k dans $\mathbf{N}$, $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\alpha}$. Alors le résultat précédent s'applique à (μ_k) puisque les séries $\sum \frac{1}{\mu_k}$ et $\sum \frac{1}{\lambda_k}$ sont de même nature. Il en résulte que l'espace engendré par les φ_{μ_k} est dense pour N_∞ dans $C([0,1])$.
Or φ_α est une bijection de $[0,1]$ sur lui-même, de sorte que, pour tous f et g dans $C([0,1])$, on a $N_\infty(f-g) = N_\infty(f\circ\varphi_\alpha - g\circ\varphi_\alpha)$. Il en résulte que si les φ_{μ_k} sont denses, il en est de même pour les $\varphi_{\mu_k}\circ\varphi_\alpha$. Or $\varphi_{\mu_k}\circ\varphi_\alpha = \varphi_{\lambda_k}$. Donc $\boxed{W \text{ est dense dans } C([0,1]) \text{ pour la norme } N_\infty.}$