

DEUXIÈME COMPOSITION MINES-PONTS 2005 – MP

Soit A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres sont notées respectivement $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$, répétées suivant leur multiplicité. On veut démontrer l'inégalité :

$$\det(A + B) \leq \max_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}), \quad (1)$$

où S_n désigne le groupe des permutations de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Notations

On identifie \mathbf{R}^n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ et on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne canonique sur \mathbf{R}^n . On munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de la norme matricielle que, pour alléger les notations, on notera aussi $\|\cdot\|$, donnée par

$$\|M\| = \sup \{ \|MX\| \mid X \in \mathbf{R}^n, \|X\| = 1 \} .$$

Pour toute matrice carrée M , on note tM sa matrice transposée, $\det(M)$ son déterminant et $\text{Tr}(M)$ sa trace. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est notée Id .

Une matrice M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite symétrique (respectivement antisymétrique) lorsque $M = {}^tM$ (respectivement ${}^tM = -M$). On note \mathcal{S}_n (respectivement \mathcal{A}_n) le sous-espace vectoriel des matrices symétriques (respectivement anti-symétriques).

PARTIE I - Préliminaires

- 1) Montrer $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.
- 2) On note $(E_{(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, expliciter $\text{Tr}(ME_{(i,j)})$ en fonction des coefficients de M .
- 3) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour toute matrice T dans \mathcal{A}_n , $\text{Tr}(MT) = 0$. La matrice M est-elle symétrique ou anti-symétrique ?
- 4) Soit T dans \mathcal{A}_n , montrer que $\exp(T)$ est orthogonale.
- 5) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer, pour s au voisinage de 0 :

$$\exp(sM) = \text{Id} + sM + O(s^2) . \quad (2)$$

- 6) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Pour j dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, on note $\alpha_j(M)$ le coefficient de X^j dans le polynôme caractéristique de M :

$$\det(M - X\text{Id}) = \sum_{j=0}^n \alpha_j(M) X^j .$$

Montrer que pour tout j dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, l'application $M \mapsto \alpha_j(M)$ est continue.

- 7) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer pour s au voisinage de 0,

$$\det(\text{Id} + sM) = 1 + s \text{Tr}(M) + O(s^2) ,$$

et

$$\det(\text{Id} + sM + O(s^2)) = 1 + s \text{Tr}(M) + O(s^2) . \quad (3)$$

- 8) On suppose que M , dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, n'est pas inversible. Construire une matrice N_0 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ telle que pour tout $s > 0$ on ait $\det(M + sN_0) > 0$.

- 9) Montrer que l'on peut choisir N_0 à coefficients réels diagonalisable (respectivement symétrique) si M est diagonalisable (respectivement symétrique).

PARTIE II - Démonstration de l'inégalité (1)

On rappelle que A et B sont des matrices réelles symétriques.

- 10) Montrer que si les matrices A et B commutent alors il existe σ dans S_n tel que :

$$\det(A + B) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) .$$

- 11) Soit \mathcal{O}_n l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que \mathcal{O}_n est une partie compacte de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

- 12) Pour tout M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, on considère la partie $\mathcal{O}_n(M)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ définie par

$$\mathcal{O}_n(M) = \{UMU^{-1} \mid U \in \mathcal{O}_n\} .$$

Montrer qu'il existe B_0 dans $\mathcal{O}_n(B)$ telle que

$$\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C) .$$

II.1 - $A + B_0$ inversible

De cette question à la question 17 on suppose que $A + B_0$ est inversible.

Pour T dans \mathcal{M}_n et pour tout réel s , on définit $\psi_T(s)$ par

$$\psi_T(s) = \det(A + \exp(sT)B_0 \exp(-sT)) .$$

- 13) Montrer que pour s au voisinage de 0, on a

$$\psi_T(s) = \det(A + B_0) [1 + s \operatorname{Tr}((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1})] + O(s^2) . \quad (4)$$

- 14) Montrer que pour tout s réel, on a $\psi_T(s) \leq \psi_T(0)$.

- 15) Montrer l'égalité suivante :

$$\operatorname{Tr}(TB_0(A + B_0)^{-1}) = \operatorname{Tr}(T(A + B_0)^{-1}B_0) . \quad (5)$$

- 16) Montrer que B_0 commute avec $(A + B_0)^{-1}$ et A .

- 17) Démontrer l'inégalité (1).

II.2 - $A + B_0$ singulière

On suppose dorénavant que $A + B_0$ n'est pas inversible.

- 18) Montrer qu'il existe deux suites de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $(B_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ et $(N_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ telles que

(i) $\lim N_k = B_0$,

(ii) $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $B_k \in \mathcal{O}_n(N_k)$,

(iii) $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $\det(A + N_k) \leq \det(A + B_k)$

(iv) $\forall k \in \mathbf{N}^*$, B_k commute avec A .

- 19) Démontrer l'inégalité (1).

PARTIE III - Une permutation qui réalise le maximum

Indépendamment des matrices A et B , étant données deux suites de réels $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$, on se propose de préciser l'inégalité (1), en explicitant une permutation $\sigma \in S_n$ pour laquelle le produit

$$P(\sigma) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)})$$

est maximum. On supposera que les hypothèses suivantes sont vérifiées ;

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n \\ a_i + b_j > 0 \text{ pour tout } (i, j) . \end{array} \right. \quad (\mathbf{H})$$

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la propriété $\pi(n)$ suivante : pour toutes les suites $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ et $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$ vérifiant **(H)** et toute permutation σ dans S_n , on a

$$\prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}) .$$

20) Établir $\pi(n)$ pour tout $n \geq 2$.

Indication : pour $n > 2$ et $\sigma \in S_n$ donnés, on distinguera deux cas :

Cas 1 : σ vérifie $\sigma(n) = 1$. On montrera qu'il existe alors τ dans \mathfrak{S}_{n-1} tel que pour i dans $[[1; n-1]]$, $\sigma(i) = \tau(i) + 1$.

Cas 2 : il existe $i < n$ et $j > 1$ tels que $\sigma(i) = 1$ et $\sigma(n) = j$ et on ramènera l'étude du second cas au premier en factorisant $P(\sigma)$ par $(a_i + b_1)(a_n + b_j)$.

DEUXÈME COMPOSITION – MINES-PONTS 2005 - MP

PARTIE I - Préliminaires

1) La transposition étant une involution linéaire, ses sous-espaces propres pour les valeurs propres 1 et -1 sont en somme directe. De plus leur somme est égale à $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ puisque toute matrice M s'écrit comme somme de la matrice symétrique $\frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et de la matrice anti-symétrique $\frac{1}{2}(M - {}^tM)$. Il en résulte $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$.

2) On note $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n}$ de sorte qu'on a, pour $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ et en notant δ le symbole de KRONECKER,

$$ME_{(i,j)} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} E_{(k,\ell)} E_{(i,j)} = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n m_{k,\ell} \delta_{\ell,i} E_{(k,j)} = \sum_{k=1}^n m_{k,i} E_{(k,j)}$$

et donc $\text{Tr}(ME_{(i,j)}) = m_{j,i}$.

3) L'application $(A, B) \mapsto \text{Tr}({}^tAB)$ munit $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de son produit scalaire canonique et la transposition est une symétrie orthogonale par commutativité de la trace et invariance de la trace par transposition, donc la somme directe $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ est aussi orthogonale. On a donc, pour T dans \mathcal{A}_n et en notant $\langle \cdot | \cdot \rangle$ le produit scalaire,

$$\text{Tr}(MT) = 0 \iff \langle M | {}^tT \rangle = 0 \iff -\langle M | T \rangle = 0 \iff \langle M | T \rangle = 0$$

et donc, puisque $\mathcal{A}_n^\perp = \mathcal{S}_n$, on a : $\forall T \in \mathcal{A}_n \text{ Tr}(MT) = 0 \iff M \text{ est symétrique.}$

Remarque : on peut obtenir ce résultat de façon calculatoire. Soit en effet (i, j) dans $\llbracket 1; n \rrbracket^2$. On a $E_{(i,j)} - E_{(j,i)} \in \mathcal{A}_n$ et donc $m_{j,i} - m_{i,j} = 0$, en utilisant les notations de la question précédente. Il en résulte que M est symétrique. Réciproquement si M est symétrique on a $\text{Tr}(MT) = \text{Tr}(-TM)$ par invariance de la trace par la transposition et puisque T est anti-symétrique et M symétrique. Par commutativité de la trace, il en résulte $\text{Tr}(MT) = -\text{Tr}(MT)$ et donc $\text{Tr}(MT) = 0$.

4) La transposition étant une application linéaire sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, elle y est continue. Pour M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et k dans \mathbf{N} , on a ${}^t(M^k) = ({}^tM)^k$, donc la série définissant $\exp({}^tM)$ et celle définissant $\exp(M)$ sont transposées l'une de l'autre. Par passage à la limite et continuité, on en déduit $\exp({}^tM) = {}^t\exp(M)$. Comme on a ${}^tT = -T$, il vient ${}^t\exp(T) = \exp({}^tT) = \exp(-T)$ et donc, puisque T et $-T$ commutent,

$${}^t\exp(T) \exp(T) = \exp(-T) \exp(T) = \exp(0) = \text{Id}.$$

Autrement dit $\exp(T)$ est orthogonale.

5) La norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vérifie, pour X dans \mathbf{R}^n et M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, $\|MX\| \leq \|M\| \|X\|$. On en déduit qu'elle est sous-multiplicative et il vient, en utilisant l'inégalité triangulaire, pour tout entier N supérieur à 2,

$$\left\| \sum_{k=2}^N \frac{M^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=2}^N \frac{\|M^k\|}{k!} \leq \sum_{k=2}^N \frac{\|M\|^k}{k!}$$

et donc, en passant à la limite dans ces séries convergentes et par continuité de la norme,

$$\|\exp(M) - \text{Id} - M\| \leq \exp(\|M\|) - 1 - \|M\|.$$

Soit alors s un réel, en appliquant ce qui précède à sM , il vient

$$0 \leq \|\exp(sM) - \text{Id} - sM\| \leq \exp(|s| \|M\|) - 1 - |s| \|M\| = O\left(s^2 \|M\|^2\right) = O(s^2)$$

et donc, par encadrement, $\exp(sM) = \text{Id} + sM + O(s^2)$.

- 6) L'application déterminant étant polynomiale, la fonction de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}$ qui à (M, λ) associe $\det(M - \lambda \text{Id})$ est polynomiale. Les coefficients de λ étant obtenus en spécialisant en 0 cette fonction ou l'une de ses dérivées par rapport à λ , ils sont également polynomiaux en M . Autrement dit, pour $0 \leq j \leq n$, α_j est polynomiale et, en particulier, elle est continue.

Remarque : on peut aussi raisonner sur l'expression du déterminant. Les applications de \mathbf{R} dans $\mathbf{R}[X]$ données par $a \mapsto a - X$ et $a \mapsto a$ sont continues car leurs coordonnées dans la base canonique de $\mathbf{R}[X]$ le sont. Il en va donc de même pour les applications, à σ dans S_n et i et j dans $[[1; n]]$ fixés, de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}[X]$ données par $M \mapsto a_{i, \sigma(i)}$ (si $\sigma(i) \neq i$) et $M \mapsto a_{i, i} - X$ (sinon), en notant $M = (a_{i, j})$, puisqu'elles sont obtenues par composition avec les formes coordonnées sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il en va de même pour des produits de telles fonctions, puis de sommes de ces produits et finalement de

$$M \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (a_{i, \sigma(i)} - \delta_{i, \sigma(i)} X).$$

Enfin il en va de même pour les composées de cette application avec les formes coordonnées de $\mathbf{R}_n[X]$ relativement à la base canonique, i.e. les applications α_j .

- 7) Pour s réel non nul on a

$$\det(\text{Id} + sM) = s^n \det(M + s^{-1} \text{Id}) = \sum_{j=0}^n \alpha_j(M) s^n (-s)^j = \sum_{j=0}^n (-1)^j \alpha_j(M) s^{n-j}$$

avec $\alpha_n(M) = (-1)^n$ et $\alpha_{n-1}(M) = (-1)^{n-1} \text{Tr}(M)$, par propriété du polynôme caractéristique. Cette égalité étant encore valide si $s = 0$, on en déduit $\det(\text{Id} + sM) = 1 + s \text{Tr}(M) + O(s^2)$.

On applique ce qui précède à $M + sN$ pour une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Il vient

$$\det(\text{Id} + sM + s^2N) = 1 + s \text{Tr}(M) + s^2 \text{Tr}(N) + \sum_{j=2}^n (-1)^{n-j} \alpha_{n-j}(M + sN) s^j .$$

Soit alors φ une fonction dans $O(s^2)$. On peut écrire $\varphi(s) = s^2 \psi(s)$ avec ψ bornée au voisinage de 0. Soit I un tel voisinage. Quitte à le restreindre on peut supposer I compact. Soit alors K un compact de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ contenant $\psi(I)$. Par continuité des fonctions α_j , elles sont bornées sur tout compact et donc sur l'image du compact $I \times K$ par la fonction continue $(s, N) \mapsto M + sN$.

On en déduit $\det(\text{Id} + sM + O(s^2)) = 1 + s \text{Tr}(M) + O(s^2)$.

- 8) Soit r le rang de M . On note $\text{Id}_{n,r} = \sum_{i=1}^r E_{(i,i)}$. D'après le théorème du rang, on dispose de P et Q inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ avec $M = P \text{Id}_{n,r} Q$. On pose alors

$$D = \text{Id} + (\det(PQ) - 1) E_{(r+1, r+1)} \quad \text{et} \quad N_0 = PDQ$$

de sorte qu'on a, pour $s > 0$, $M + sN_0 = PD_s Q$ avec

$$D_s = (1 + s) \text{Id}_{n,r} + s \det(PQ) E_{(r+1, r+1)} + s(\text{Id} - \text{Id}_{n, r+1}) .$$

Il vient ainsi $\det(M + sN_0) = \det(PQ)^2 (1 + s)^r s^{n-r}$ et donc $\det(M + sN_0) > 0$.

- 9) On reprend les notations précédentes. Si M est diagonalisable, on peut choisir $Q = D'P^{-1}$ avec D' diagonale. Alors DD' sera également diagonale et donc N_0 est conjuguée à une matrice diagonale et N_0 est diagonalisable.

Si M est symétrique, alors elle est diagonalisable dans une base orthonormée d'après le théorème spectral, de sorte qu'on peut choisir $Q = D'^t P$ avec D' diagonale (et P orthogonale). Une fois encore DD' est diagonale, donc symétrique, et puisqu'on a $N_0 = P(DD')^t P$, N_0 est symétrique.

PARTIE II - Démonstration de l'inégalité (1)

- 10) Puisqu'elles sont symétriques réelles, d'après le théorème spectral A et B sont diagonalisables. Puisqu'elles commutent, elles sont alors simultanément diagonalisables. On dispose donc de P inversible telle que PAP^{-1} et PBP^{-1} sont toutes les deux diagonales. Puisque les diagonales de ces deux matrices sont les valeurs propres de A et B respectivement (comptées avec multiplicités), on dispose de deux permutations σ_A et σ_B de S_n telles que PAP^{-1} soit la matrice de diagonale $(a_{\sigma_A(k)})_{1 \leq k \leq n}$ et PBP^{-1} la matrice de diagonale $(b_{\sigma_B(k)})_{1 \leq k \leq n}$. En posant $\sigma = \sigma_B \sigma_A^{-1}$ il vient

$$\det(A + B) = \det(P(A + B)P^{-1}) = \prod_{k=1}^n (a_{\sigma_A(k)} + b_{\sigma_B(k)}) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}),$$

i.e. $\boxed{\det(A + B) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)})}$.

- 11) Puisque la transposition est linéaire et que le produit matriciel est bilinéaire, ce sont des applications continues, car on a affaire à des espaces de dimensions finies. Il en résulte que \mathcal{O}_n est l'image réciproque du fermé $\{\text{Id}\}$ par l'application continue $M \mapsto {}^tMM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans lui-même. Comme les applications orthogonales préservent la norme, elles sont toutes de norme égale à 1. Il en résulte que \mathcal{O}_n est une partie fermée et bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Comme ce dernier espace est de dimension finie, il résulte du théorème de HEINE-BOREL que \mathcal{O}_n est compact.

- 12) Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Par continuité de la transposition et du produit matriciel, l'application $U \mapsto UM {}^tU$ est continue. L'image du compact \mathcal{O}_n est donc compacte d'après le théorème de WEIERSTRASS et, par définition de \mathcal{O}_n , c'est aussi l'image de \mathcal{O}_n par $U \mapsto UMU^{-1}$. Il en résulte que $\mathcal{O}_n(M)$ est compact.

L'application de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans \mathbf{R} donnée par $M \mapsto \det(A + M)$ est polynomiale donc continue. Il résulte du théorème de WEIERSTRASS que sa restriction au compact $\mathcal{O}_n(B)$ atteint son maximum en un point. On dispose donc de B_0 dans $\mathcal{O}_n(B)$ tel que

$$\boxed{\det(A + B_0) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(B)} \det(A + C)}$$

II.1 - $A + B_0$ inversible

- 13) Pour s au voisinage de 0 on a, d'après la question 5,

$$\exp(sT)B_0 \exp(-sT) = (\text{Id} + sT)B_0(\text{Id} - sT) + O(s^2) = B_0 + s(TB_0 - B_0T) + O(s^2)$$

et donc, par multiplicativité du déterminant,

$$\psi_T(s) = \det(A + B_0) \det(\text{Id} + s(TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1} + O(s^2))$$

et donc, d'après (3), $\boxed{\psi_T(s) = \det(A + B_0) [1 + s \text{Tr}((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1})] + O(s^2)}$.

- 14) On dispose de U dans \mathcal{O}_n avec $B_0 = UBU^{-1}$. D'après la question 4, pour T dans \mathcal{A}_n et s dans \mathbf{R} , sT et $-sT$ sont anti-symétriques et donc $\exp(sT)$ et $\exp(-sT)$ sont orthogonales. Puisque sT et $-sT$ commutent, leurs exponentielles sont inverses l'une de l'autre, de sorte que $\exp(sT)B_0 \exp(-sT)$ est la conjuguée de B par $\exp(sT)U$, qui est un produit de matrices orthogonales donc est orthogonale car \mathcal{O}_n est un groupe, i.e. appartient à $\mathcal{O}_n(B)$. Par définition de B_0 il en résulte $\boxed{\psi_T(s) \leq \psi_T(0)}$.

- 15) Il résulte de (4) que ψ_T est dérivable en 0 de dérivée $\det(A + B_0) \text{Tr}((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1})$. Comme 0 est un maximum local de ψ_T en un point intérieur de son domaine de définition, il en résulte que

cette dérivée est nulle et donc, par inversibilité de $A + B_0$ que $\text{Tr}((TB_0 - B_0T)(A + B_0)^{-1})$ est nul. Par linéarité de la trace, on en déduit

$$\text{Tr}(TB_0(A + B_0)^{-1}) = \text{Tr}(B_0T(A + B_0)^{-1}).$$

Par commutativité de la trace on a $\text{Tr}(B_0T(A + B_0)^{-1}) = \text{Tr}(T(A + B_0)^{-1}B_0)$ et on conclut

$$\boxed{\text{Tr}(TB_0(A + B_0)^{-1}) = \text{Tr}(T(A + B_0)^{-1}B_0)}.$$

- 16) On note M la matrice $B_0(A + B_0)^{-1} - (A + B_0)^{-1}B_0$. Il résulte de ce qui précède $\text{Tr}(TM) = 0$ et donc, par commutativité de la trace, $\text{Tr}(MT) = 0$. Par conséquent, d'après la question 3, M est symétrique. Or B est symétrique et, avec les notations précédentes, $B_0 = UBU^{-1} = UB^tU$, donc B_0 aussi. Par conséquent $A + B_0$ est symétrique et, puisqu'elle est inversible, son inverse l'est encore. Or si X et Y sont symétriques, XY est symétrique si et seulement si ${}^t(XY) = {}^tY{}^tX = YX = XY$, i.e. si et seulement si X et Y commutent. Par conséquent $\boxed{B_0 \text{ et } (A + B_0)^{-1} \text{ commutent.}}$

On a donc $B_0(A + B_0)^{-1} = (A + B_0)^{-1}B_0$ et donc, par multiplication des deux côtés par $A + B_0$, B_0 commute à $A + B_0$ et donc aussi à A , i.e. $\boxed{B_0 \text{ et } A \text{ commutent.}}$

- 17) Puisque B appartient à $\mathcal{O}_n(B)$, on a d'après la question 12, $\det(A + B) \leq \det(A + B_0)$. Comme les valeurs propres de B_0 sont également celles de B , puisque ces deux matrices sont conjuguées, il résulte de la question 10 qu'on dispose de σ dans S_n vérifiant $\det(A + B_0) = \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)})$ et donc

$$\boxed{\det(A + B) \leq \max_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)})}.$$

- 18) D'après la question 9 on dispose d'une matrice N_0 symétrique telle que $\det(A + B_0 + sN_0)$ soit strictement positif pour tout s strictement positif. Soit $(u_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ une suite de réels strictement positifs et tendant vers 0, par exemple $u_k = \frac{1}{k}$. Soit $k > 0$. On pose $N_k = B_0 + u_k N_0$. On dispose alors, d'après la question 12, de B_k dans $\mathcal{O}_n(N_k)$ vérifiant $\det(A + B_k) = \sup_{C \in \mathcal{O}_n(N_k)} \det(A + C) \geq \det(A + N_k)$. De plus on a $\det(A + B_k) \geq \det(A + N_k) > 0$ et donc $A + B_k$ est inversible. Il résulte de la question 16 que B_k commute avec A . Enfin comme $N_k - B_0 = O(u_k) = o(1)$,

$\boxed{\text{les suites } (B_k, k > 0) \text{ et } (N_k, k > 0) \text{ vérifient les quatre propriétés requises.}}$

- 19) D'après la propriété (ii) précédente on dispose de $(U_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ une suite de matrices de \mathcal{O}_n vérifiant $B_k = U_k N_k {}^t U_k$. Par compacité de \mathcal{O}_n , il résulte du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS qu'on dispose d'une sous-suite de $(U_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$ qui converge dans \mathcal{O}_n . On note U la limite de cette sous-suite. Par continuité de la transposition et du produit matriciel, il en résulte que la sous-suite correspondante de (B_k) converge vers une matrice B' vérifiant $B' = UB_0 {}^t U = UB_0 U^{-1}$. En particulier $B' \in \mathcal{O}_n(B)$. De plus, par passage à la limite dans les égalités de commutation et dans les inégalités de déterminant (qui est continu), B' commute à A et $\det(A + B_0) \leq \det(A + B')$. Il résulte de cette dernière inégalité et la définition de B_0 qu'on a $\det(A + B') = \det(A + B_0)$. On est donc ramené au cas où A et B_0

commutent et on conclut comme en 17, $\boxed{\det(A + B) \leq \max_{\sigma \in S_n} \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)})}$.

PARTIE III - Une permutation qui réalise le maximum

- 20) Soit f_1, \dots, f_n des fonctions définies sur un intervalle I de \mathbf{R} avec $f_{k+1} - f_k$ croissante pour tout k entre 1 et $n - 1$, ainsi que des éléments x_1, \dots, x_n de I vérifiant $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. On va montrer

par récurrence sur le nombre d'inversions de la permutation σ de S_n qu'on a

$$\sum_{k=1}^n f_k(b_{n-k+1}) \leq \sum_{k=1}^n f_k(b_{\sigma(k)}) \leq \sum_{k=1}^n f_k(b_k).$$

On démontre seulement la seconde inégalité par récurrence. Elle est immédiate s'il n'y a aucune inversion puisqu'alors σ est l'identité. Soit alors σ dans S_n et j et k dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ vérifiant $j < k$ et $\sigma(j) > \sigma(k)$. Soit τ la permutation définie par $\tau(j) = \sigma(k)$, $\tau(k) = \sigma(j)$ et $\tau(i) = \sigma(i)$ sinon. Alors τ a moins d'inversions que σ et on a

$$\begin{aligned} f_j(x_{\tau(j)}) + f_k(x_{\tau(k)}) - f_j(x_{\sigma(j)}) - f_k(x_{\sigma(k)}) &= f_j(x_{\sigma(k)}) + f_k(x_{\sigma(j)}) - f_j(x_{\sigma(j)}) - f_k(x_{\sigma(k)}) \\ &= (f_k - f_j)(x_{\sigma(j)}) - (f_k - f_j)(x_{\sigma(k)}) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{k=1}^n f_k(b_{\sigma(k)}) \leq \sum_{k=1}^n f_k(b_{\tau(k)}).$$

Il résulte du principe de récurrence que la seconde inégalité est vraie.

On applique alors cette inégalité aux fonctions données par $x \mapsto -f_k(-x)$, définies sur $-I$, et aux réels $-x_n, \dots, -x_1$. Et il vient

$$\sum_{k=1}^n f_k(b_{n-k+1}) \leq \sum_{k=1}^n f_k(b_{\sigma(k)}).$$

On considère enfin les fonctions données par $f_k(x) = -\ln(a_k + x)$. Par hypothèse sur la famille (b_k) , les fonctions (f_k) sont définies sur un intervalle contenant les (b_k) . De plus $f_{k+1} - f_k$ est la fonction $x \mapsto \ln\left(1 - \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1} + x}\right)$ et cette fonction est croissante comme composée de fonctions monotones :

$x \mapsto a_{k+1} + x$ (croissante), $x \mapsto \frac{1}{x}$ (décroissante), $x \mapsto (a_{k+1} - a_k)x$ (croissante), $x \mapsto 1 - x$ (décroissante) et \ln (croissante). Par composition avec $x \mapsto \exp(-x)$ qui est décroissante, l'inégalité précédente donne

$$\prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1}) \geq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \geq \prod_{k=1}^n (a_k + b_k).$$

En particulier $\prod_{k=1}^n (a_k + b_{\sigma(k)}) \leq \prod_{k=1}^n (a_k + b_{n-k+1})$.

Remarque : l'inégalité générale proposée dans ce corrigé est l'inégalité de VINCE. Son cas le plus élémentaire est donné par les fonctions linéaires $f_k(x) = a_k x$ et elle donne alors l'inégalité de réarrangement

$$\sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Elle est basée sur le fait très simple que, si $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$ alors $(b_2 - b_1)(a_2 - a_1) \geq 0$ et donc $a_1 b_2 + a_2 b_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Cette inégalité est très simple et pourtant très profonde.

La démonstration proposée par l'énoncé marche très bien mais la récurrence est pénible puisqu'il faut au contraire augmenter le nombre d'inversion et aller vers la permutation qui renverse l'ordre.