Lycée Lesage MP

MATHÉMATIQUES

DEVOIR SURVEILLÉ 1

17 septembre 2022 – Durée 4h

Les calculatrices sont interdites.

Sujet unique
Irrationalité de π^2

Merci d'indiquer votre nom sur chacune des copies (de préférence doubles).

Correction et barème tiennent compte de la qualité de la rédaction et du soin apporté à la copie.

UNE COPIE NON RÉDIGÉE NE SERA PAS CORRIGÉE.

Irrationalité de π^2

Exercice 1 – Algèbre linéaire (ENAC 2006)

Répondre au QCM suivant en indiquant une réponse parmi les trois suivantes :

— Pas de réponse correcte,

— Seule la réponse (x) est correcte

— Les réponses (x) et (y) sont correctes.

Il est inutile de justifier votre réponse, une réponse partielle est jugée incorrecte (s'il y a plusieurs bonnes réponses, en indiquer seulement une est considéré comme erroné).

L'espace $\mathbf{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$. Soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui à tout triplet (x, y, z) de réels associe le triplet $(x + 3z, 0, y - 2z)$.

1. La matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (c)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}. \quad (d)\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. L'endomorphisme f est de rang :

2.a) 3 car A a trois colonnes non nulles

2.b) au plus 2 car A a une ligne nulle

2.c) 2 car le rang est égal au nombre de lignes non nulles de l'une des représentations matricielles de l'endomorphisme

2.d) 3 car f est défini sur un espace vectoriel de dimension 3

3. Le noyau de l'endomorphisme f a pour dimension :

3.a) 0 car $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$

3.b) 1 car $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbf{R}^3) - \mathrm{rg}(f)$

3.c) 2 car la matrice A de f a deux colonnes non nulles linéairement indépendantes

3.d) 3 car f est défini sur un espace vectoriel de dimension 3

4. Les sous-espaces image et noyau de f vérifient

4.a) $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$

4.b) $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont en somme directe car $\dim(\mathbf{R}^3) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$

4.c) $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Im}(f)$

4.d) $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ker}(f)$

Exercice 2 – Géométrique euclidienne

L'espace euclidien $\mathbf{R}^3$ est rapporté à sa base canonique $\mathcal{B}$ et est muni de son produit scalaire canonique. On considère les plans Q_1 et Q_2 d'équations respectives $Q_1\ : x + 2y - z + 1 = 0$ et $Q_2\ : x - y + 2z - 2 = 0$, et $D = Q_1 \cap Q_2$. Soit Δ la droite d'équations cartésiennes : $2x - y + 1 = z = 0$.

1. Montrer que D est une droite et en donner une représentation paramétrique.
2. Déterminer une perpendiculaire commune à D et Δ et calculer la distance $d(D, \Delta)$.

Exercice 3 – Problème de Bâle

1. Soit $\theta \in \mathbf{R}$ et P_m le polynôme donné par
$$P_m = \binom{2m+1}{1} x^m - \binom{2m+1}{3} x^{m-1} + \cdots + (-1)^m .$$
Démontrer en utilisant la formule de De Moivre
$$\frac{\sin((2m+1)\theta)}{\sin^{2m+1}(\theta)} = P_m(\cot^2\theta) .$$
2. Expliciter les racines de P_m et en déduire
$$\sum_{k=1}^{m} \cot^2 \frac{k\pi}{2m+1} = \frac{m(2m-1)}{3} .$$
3. Démontrer, pour tout $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cot^2(x) \leq x^{-2} \leq 1 + \cot^2(x)$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Problème – Irrationalité de π^2

Notations : on pose, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et x réel
$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 2n} \int_0^1 (1-t^2)^n \cos(xt)\,\mathrm{d}t .$$

1. Démontrer que pour tout (a, b) dans $\mathbf{R}^2$, on a
$$|\cos(b) - \cos(a) + (b-a)\sin(a)| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2 .$$
2. En déduire que si u est une fonction continue sur l'intervalle $[0; 1]$ et si U est définie sur $\mathbf{R}$ par
$$U(x) = \int_0^1 u(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t ,$$
alors U est dérivable sur $\mathbf{R}$ et, pour x réel, $U'(x) = -\displaystyle\int_0^1 u(t)t\sin(xt)\,\mathrm{d}t$.
3. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Calculer f_n' et donner un lien algébrique entre f_{n+1}, f_n et f_n'.
4. Calculer $f_1(x)$ pour tout réel x.
5. Soit n dans $\mathbf{N}^*$. Montrer qu'il existe un couple (A_n, B_n) de polynômes à coefficients entiers tel que
   - les degrés de A_n et B_n sont inférieurs (ou égaux) à n.
   - A_n est impair et B_n est pair.
   - $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = A_n(x)\cos(x) + B_n(x)\sin(x)$.
6. Démontrer que le couple (A_n, B_n) précédent est unique.
7. On suppose que l'on peut écrire $\dfrac{\pi^2}{4} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q dans $\mathbf{N}^*$. On définit alors
$$u_n = q^n \sqrt{\frac{p}{q}} \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{2n}}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times 4n} \int_0^1 (1-t^2)^{2n} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\mathrm{d}t .$$
Démontrer que u_n est un entier naturel non nul.
8. En considérant la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$, démontrer que π^2 est irrationnel. Qu'en est-il de π ?

IRRATIONALITÉ DE π^2

Exercice 1 – Algèbre linéaire (ENAC 2006)

1. $\boxed{\text{(c)}}$. On a $f(e_1) = e_1$, $f(e_2) = e_3$ et $f(e_3) = 3e_1 - 2e_3$. La matrice A de f par rapport à la base $\mathcal{B}$ s'écrit donc :
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
2. $\boxed{\text{(b) et (c).}}$ L'endomorphisme f est de rang au plus 2 car A a une ligne nulle et en fait de rang 2 car le rang est égal au nombre de lignes non nulles de l'une des représentations matricielles de l'endomorphisme, à savoir sous forme de matrice échelonnée et une telle représentation s'obtient en échangeant la seconde et la troisième ligne de A.
3. $\boxed{\text{(b).}}$ Le noyau de l'endomorphisme f a pour dimension 1 car $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbf{R}^3) - \mathrm{rg}(f)$.
4. $\boxed{\text{Aucune bonne réponse.}}$ Les sous-espaces image et noyau sont effectivement en somme directe mais pas en raison du théorème du rang, plutôt parce que leur intersection est réduite à $\{0\}$. On a $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{V}ect\,(e_3 + 2e_2 - 3e_1)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{V}ect\,(e_1, e_3)$.

Exercice 2

1. Les plans Q_1 et Q_2 ne sont pas parallèles, puisque les vecteurs $n_1(1, 2, -1)$ et $n_2(1, -1, 2)$, qui sont normaux à Q_1 et Q_2 respectivement, ne sont pas colinéaires. Un vecteur directeur de D est donné par $n_1 \wedge n_2(3, -3, -3)$. Comme $(0, 0, 1)$ appartient à Q_1 et Q_2,

   $\boxed{D \text{ est une droite d'équations paramétriques (de paramètre } x) : y = -x \text{ et } z = 1 - x.}$
2. Un point de D s'écrit $(x, -x, 1 - x)$ et un point de Δ s'écrit $(x', 2x' + 1, 0)$ pour x et x' réels. Le vecteur qui relie ces points est alors perpendiculaire aux vecteurs directeurs $(1, -1, -1)$ et $(1, 2, 0)$ de D et Δ respectivement si et seulement si $-3x - x' = x + 5x' + 2 = 0$ i.e. si et seulement si $x = 1/7$ et $x' = -3/7$. Une perpendiculaire commune est donc la droite joignant $(1/7, -1/7, 6/7)$ et $(-3/7, 1/7, 0)$ (et elle existe et est unique puisque ces points sont distincts). La distance entre ces droites est la distance entre deux points, i.e. $2\sqrt{14}/7$. D'où

   $\boxed{\begin{array}{l}\text{La perpendiculaire commune à } D \text{ et } \Delta \text{ est la droite } (AB) \text{ avec } A(1/7, -1/7, 6/7) \text{ et } B(-3/7, 1/7, 0).\\ \text{De plus } d(D, \Delta) = 2\sqrt{14}/7.\end{array}}$

Exercice 3

1. D'après la formule de DE MOIVRE, ou encore $e^{i(2m+1)\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^{2m+1}$, il vient, en prenant les parties imaginaires, que $\sin((2m+1)\theta)$ est égal à
$$\binom{2m+1}{1}\cos^{2m}(\theta)\sin(\theta) - \binom{2m+1}{3}\cos^{2m-2}(\theta)\sin^3(\theta) + \cdots + (-1)^m \sin^{2m+1}(\theta)$$
et donc, en divisant par $\sin^{2m+1}(\theta)$ (et en supposant que cette quantité est non nulle), il vient

   $\boxed{\text{Pour } \theta \text{ dans } \mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}, \text{ on a } \dfrac{\sin((2m+1)\theta)}{\sin^{2m+1}(\theta)} = P_m(\cot^2\theta).}$

2. D'après l'expression précédente $\cot^2(k\pi/(2m+1))$ est une racine de P_m pour k entier compris entre 1 et m. Puisque les nombres $k\pi/(2m+1)$ sont tous différents et dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, leurs cotangentes sont toutes positives et différentes, donc les quantités $\cot^2(k\pi/(2m+1))$ sont toutes différentes. Comme P_m est de degré m, il a au plus m racines et ce sont donc exactement ces quantités. Autrement dit

$$P_m = \binom{2m+1}{1}(X - \cot^2(\pi/(2m+1)))(X - \cot^2(2\pi/(2m+1)))\cdots(X - \cot^2(m\pi/(2m+1)))$$

et donc, en comparant les termes de degré $m-1$,

$$-\binom{2m+1}{1}\sum_{k=1}^{m}\cot^2\frac{k\pi}{2m+1} = -\binom{2m+1}{3}$$

et il vient :

$$\boxed{\text{les racines de } P_m \text{ sont } \left(\cot^2(k\pi/(2m+1))\right)_{1\leq k\leq m} \text{ et } \sum_{k=1}^{m}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right) = \frac{m(2m-1)}{3}.}$$

3. La tangente en 0 au graphe de la fonction tangente est la première bissectrice. Par convexité, il en résulte que, pour tout $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $x \leq \tan(x)$ et donc aussi $\cot^2(x) \leq x^{-2}$.
La fonction sinus est, elle, concave sur cet intervalle et sa tangente en 0 est aussi la première bissectrice. Il en résulte que, pour tout $x \in \left]0; \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leq x$ et donc aussi $x^{-2} \leq \sin^{-2}(x) = 1 + \cot^2(x)$.
En sommant les inégalités $\cot^2(x) \leq x^{-2} \leq 1 + \cot^2(x)$ pour $x = k\pi/(2m+1)$, il vient

$$\frac{m(2m-1)}{3} \leq \frac{(2m+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leq \frac{m(2m-1)}{3} + m$$

et donc

$$\frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2} \leq \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2} \leq \frac{\pi^2}{3}\frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2} + \frac{m\pi^2}{(2m+1)^2}\ .$$

Or

$$\frac{m(2m-1)}{(2m+1)^2} = \frac{m^2(2-1/m)}{m^2(4+4/m+1/m^2)} = \frac{1}{2}\frac{1-1/2m}{1+1/m+1/3m^2}$$

admet $1/2$ comme limite quand m tend vers $+\infty$. De plus

$$\frac{m\pi^2}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{4m}\frac{1}{1+1/m+1/4m^2}$$

admet 0 comme limite quand m tend vers $+\infty$.
Donc chacun des termes extrêmes de l'encadrement tend vers $\pi^2/6$. Par encadrement des limites il en résulte que la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}$ tend vers $\pi^2/6$ lorsque m tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[,\ \cot^2(x) \leq x^{-2} \leq 1 + \cot^2(x) \text{ et } \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Problème – Irrationalité de π^2

1. Soit (a,b) dans $\mathbf{R}^2$. Comme cos est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, on peut lui appliquer la formule de TAYLOR-LAGRANGE à l'ordre 2 sur l'intervalle $[a;b]$. On a donc l'existence de c dans $]a;b[$ tel que $\cos(b) = \cos(a) - (b-a)\sin(a) - \frac{1}{2}(b-a)^2\cos(c)$. Comme $|\cos|$ est majoré par 1, il vient
$\boxed{\text{pour tout } (a,b) \text{ dans } \mathbf{R}^2, \text{ on a } |\cos(b)-\cos(a)+(b-a)\sin(a)| \leq \frac{1}{2}(b-a)^2.}$

2. La fonction U est définie sur $\mathbf{R}$ puisque l'intégrande est une fonction continue de t, à x réel fixé. Soit x et y réels, on a
$$U(y) - U(x) = \int_0^1 u(t)\left(\cos(yt) - \cos(xt)\right) \mathrm{d}t$$
et donc, d'après l'inégalité de la moyenne et la positivité de l'intégrale,
$$\begin{aligned}\left|U(y) - U(x) + (y-x)\int_0^1 u(t)t\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right| &= \left|\int_0^1 u(t)\left(\cos(yt) - \cos(xt) + t(y-x)\sin(xt)\right)\mathrm{d}t\right| \\ &\leq \int_0^1 |u(t)|\,\frac{(y-x)^2t^2}{2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}(y-x)^2\int_0^1 |u(t)|\,t^2\,\mathrm{d}t \leq \mathrm{o}_x\left(y-x\right)\end{aligned}$$
cette dernière intégrale étant bien définie puisque $t \mapsto |u(t)|\,t^2$ est continue sur $[0;1]$. D'après le critère de WEIERSTRASS, on en conclut $\boxed{U \text{ est dérivable sur } \mathbf{R} \text{ et, pour } x \text{ réel, } U'(x) = -\int_0^1 u(t)\sin(xt)\,\mathrm{d}t.}$

3. Soit n dans $\mathbf{N}^*$ et x réel. On a
$$f_n(x) = \frac{x^{2n+1}}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\int_0^1 (1-t^2)^n\cos(xt)\,\mathrm{d}t\ .$$
et donc, d'après la question précédente,
$$\boxed{f_n'(x) = \frac{(2n+1)x^{2n}}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\int_0^1 (1-t^2)^n\cos(xt)\,\mathrm{d}t - \frac{x^{2n+1}}{2\times 4\times 6\times\cdots\times 2n}\int_0^1 (1-t^2)^n t\sin(xt)\,\mathrm{d}t\ .}$$
On intègre par parties la seconde intégrale :
$$\int_0^1 (1-t^2)^n t\sin(xt)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2(n+1)}x\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
et il en résulte $\boxed{xf_n'(x) = (2n+1)f_n(x) - f_{n+1}(x).}$

4. Par définition, pour x réel, on a
$$f_1(x) = \frac{x^3}{2}\int_0^1 (1-t^2)\cos(xt)\,\mathrm{d}t$$
et on peut donc intégrer par parties successivement
$$\begin{aligned}f_1(x) = x^2\int_0^1 \frac{1-t^2}{2}x\cos(xt)\,\mathrm{d}t &= x^2\left(\left[\frac{1-t^2}{2}\sin(xt)\right]_0^1 + \int_0^1 t\sin(xt)\,\mathrm{d}t\right) = x\int_0^1 tx\sin(xt)\,\mathrm{d}t \\ &= x\left(\left[-t\cos(xt)\right]_0^1 + \int_0^1 \cos(xt)\,\mathrm{d}t\right) = -x\cos(x) + \left[\sin(xt)\right]_0^1 = -x\cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$
$\boxed{\text{Pour } x \text{ réel, on a } f_1(x) = -x\cos(x) + \sin(x).}$

5. On démontre le résultat par récurrence. Soit $(\mathbf{H}_n)$ le prédicat sur n entier naturel non nul défini par : il existe un couple (A_n, B_n) de polynômes à coefficients entiers tel que les degrés de A_n et B_n sont inférieurs (ou égaux) à n ; A_n est impair et B_n est pair et on a $\forall x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = A_n(x)\cos(x) + B_n(x)\sin(x)$. Alors $(\mathbf{H}_1)$ est vrai en prenant $A_1 = -X$ et $B_1 = 1$.
Soit maintenant n dans $\mathbf{N}^*$ tel que $(\mathbf{H}_n)$ est vrai. Soit (A_n, B_n) un couple de polynômes dont l'existence est donnée par $(\mathbf{H}_n)$. Il vient $f_n' = (A_n' + B_n)\cos + (B_n' - A_n)\sin$ et donc, d'après la question 3, on a $f_{n+1} = ((2n+1)A_n - XA_n' - XB_n)\cos + ((2n+1)B_n - XB_n' + XA_n)\sin$.
De plus comme A_n est impair, A_n' et XA_n sont pairs et XA_n' est impair. Comme B_n est pair, B_n' et XB_n sont impairs et XB_n' est pair. Par conséquent $(2n+1)A_n - XA_n' - XB_n$ est impair et $(2n+1)B_n - XB_n' + XA_n$ est pair. De même tous ces polynômes sont à coefficients entiers.
Enfin $\deg(A_n) \leq n$, donc $\deg(XA_n') \leq 1 + \deg(A_n') \leq 1 + (n-1) = n$ et $\deg(XA_n) \leq 1 + n$. De même $\deg(B_n) \leq n$, donc $\deg(XB_n') \leq 1 + \deg(B_n') \leq 1 + (n-1) = n$ et $\deg(XB_n) \leq 1 + n$. Il en résulte $\deg((2n+1)A_n - XA_n' - XB_n) \leq n+1$ et $\deg((2n+1)B_n - XB_n' + XA_n) \leq n+1$. On en déduit $(\mathbf{H}_{n+1})$ et donc, d'après le principe de récurrence :
$\boxed{\text{Pour } n \text{ dans } \mathbf{N}^*, \text{ il existe un couple } (A_n, B_n) \text{ de polynômes à coefficients entiers tel que les degrés de } A_n \text{ et } B_n \text{ sont inférieurs (ou égaux) à } n,\ A_n \text{ est impair et } B_n \text{ est pair et } \forall x \in \mathbf{R},\ f_n(x) = A_n(x)\cos(x) + B_n(x)\sin(x).}$

6. On suppose $A_n \cos + B_n \sin = C_n \cos + D_n \sin$ avec A_n, B_n, C_n, D_n dans $\mathbf{R}_n[X]$. On a alors $(A_n - C_n)\cos = (D_n - B_n)\sin$. Il en résulte que le polynôme $A_n - C_n$ admet pour racine tous les $k\pi$ avec k entier. Il est donc nul et $A_n = C_n$. Dès lors $D_n - B_n$ s'annule en dehors des valeurs précédentes et est donc également nul, et $D_n = B_n$. $\boxed{\text{Le couple } (A_n, B_n) \text{ précédent est unique.}}$

7. Avec les notations de l'énoncé, on a donc $u_n = q^n f_{2n}(\pi/2)$ et donc $u_n = q^n B_{2n}(\pi/2)$. Comme B_{2n} est pair, à coefficients entiers et de degré inférieur à $2n$, on peut l'écrire sous la forme $B_{2n} = P_n(X^2)$ avec P_n à coefficients entiers et de degré inférieur à n. Il vient $B_{2n}(\pi/2) = P_n(p/q)$. Si on écrit $P_n = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $a_0, \ldots, a_n$ entiers, il vient $u_n = a_0 q^n + a_1 q p^{n-1} + \cdots + a_n p^n$ et donc u_n est entier.
Par ailleurs u_n est un produit de termes strictement positifs multiplié par l'intégrale d'une fonction positive, continue et non identiquement nulle sur $[0;1]$, c'est donc un réel strictement positif et donc $\boxed{u_n \text{ est un entier naturel non nul.}}$

8. Puisque l'intégrande est une fonction positive majorée par 1, on a $0 \leq \int_0^1 (1-t^2)^{2n} \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) \mathrm{d}t \leq 1$ et donc
$$u_n = \mathrm{O}\left(\frac{q^n \sqrt{p}^{4n+1}}{\sqrt{q}^{4n+1} 2^n\,(2n)!}\right)$$
et donc, par croissances comparées entre les suites géométriques et les factorielles, $u_n = \mathrm{o}(1)$, i.e. $\lim u_n = 0$. Or une suite d'entiers convergente est nécessairement stationnaire. D'après la question précédente, si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est stationnaire, elle l'est en une valeur entière strictement positive et ceci est une contradiction. On ne peut donc pas écrire $\pi^2/4$ sous la forme p/q avec p et q dans $\mathbf{N}^*$. Comme $\pi^2/4$ est positif, cela revient à dire qu'il n'est pas rationnel et donc π^2 non plus. Enfin, si π était rationnel, il en serait de même pour π^2 et donc π est également irrationnel. $\boxed{\text{Les nombres } \pi^2 \text{ et } \pi \text{ sont irrationnels.}}$

L'irrationalité de π a été démontré en 1768 par Johann Heinrich LAMBERT, mais sa démonstration est complexe : elle utilise le développement en fraction continue de tangente. Sa démonstration a été simplifiée en 1997 par Miklos LACZKOVICH, mais reste ardue. La démonstration reproduite ici suit les idées données en 1945 par Dame Mary Lucy CARTWRIGHT et sont une simplification des idées de Charles HERMITE (1873). Une démonstration, peut-être encore plus simple, a été donnée en 1947 par Ivan NIVEN, suivant les mêmes idées que celle de Mary CARTWRIGHT.