

PREMIÈRE COMPOSITION

ENSAE 1997 – MP

Dans ce problème on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbf{R}^d (d entier naturel non nul) et $B(x, r)$ la boule euclidienne ouverte dans \mathbf{R}^d de centre x dans \mathbf{R}^d et de rayon r strictement positif.

PARTIE I

I.1) Soit F une partie bornée de \mathbf{R}^d , non vide. Démontrer que, pour tout δ dans \mathbf{R}_+^* , l'ensemble d'entiers $\mathcal{M}(\delta, F)$ donné par

$$\mathcal{M}(\delta, F) = \left\{ N \in \mathbf{N}^* \mid \exists (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbf{R}^d)^N, F \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta) \right\}$$

est non vide.

On désigne par $N(\delta, F)$ le plus petit entier N appartenant à $\mathcal{M}(\delta, F)$. On note

$$\text{B-dim}(F) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)}$$

quand la limite écrite existe.

I.2) Soit F, F' et F'' trois parties bornées de \mathbf{R}^d non vides telles que $\text{B-dim}(F)$ et $\text{B-dim}(F')$ existent et soit λ un réel non nul. On pose $\lambda F = \{\lambda x \mid x \in F\}$. Montrer

I.2.a) si $F \subset F'$ alors $\text{B-dim}(F) \leq \text{B-dim}(F')$;

I.2.b) $\text{B-dim}(\lambda F)$ existe et $\text{B-dim}(\lambda F) = \text{B-dim}(F)$;

I.2.c) $\text{B-dim}(F \cup F')$ existe et $\text{B-dim}(F \cup F') = \max\{\text{B-dim}(F), \text{B-dim}(F')\}$;

I.2.d) si $F \subset F'' \subset F'$ et $\text{B-dim}(F) = \text{B-dim}(F')$ alors $\text{B-dim}(F'')$ existe et $\text{B-dim}(F'') = \text{B-dim}(F)$.

I.3) Calculer $\text{B-dim}(F)$ quand F est une partie finie de \mathbf{R}^d .

Soit (v_1, \dots, v_d) une base de l'espace vectoriel \mathbf{R}^d . Pour δ réel strictement positif et k_1, \dots, k_d entiers relatifs on pose

$$C(k_1, \dots, k_d, \delta) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_d v_d \mid \forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \lambda_i \in [k_i \delta; k_i \delta + \delta]\}$$

et on appelle δ -cube une telle partie de \mathbf{R}^d . On note $C_\delta(v_1, \dots, v_d)$ l'ensemble des δ -cubes. Pour F partie non vide bornée de \mathbf{R}^d , on note $A(\delta, F)$ le nombre de δ -cubes dont l'intersection avec F est non vide :

$$\begin{aligned} A(\delta, F) &= \text{Card}(\{C \in C_\delta(v_1, \dots, v_d) \mid C \cap F \neq \emptyset\}) \\ &= \text{Card}(\{(k_1, \dots, k_d) \in \mathbf{Z}^d \mid C(k_1, \dots, k_d, \delta) \cap F \neq \emptyset\}) . \end{aligned}$$

I.4.a) Montrer que l'application de \mathbf{R}^d dans \mathbf{R}_+ qui, à tout élément x de \mathbf{R}^d s'écrivant $x = x_1 v_1 + \dots + x_d v_d$ associe le réel positif $\sup_{1 \leq i \leq d} |x_i|$ est une norme sur \mathbf{R}^d . On la note $\|\cdot\|_\infty$. Cette norme est-elle équivalente à la norme euclidienne ?

I.4.b) Montrer qu'il existe un réel positif γ ne dépendant que de d et du choix de v_1, \dots, v_d tel que, pour tout $\delta > 0$ et tout x dans \mathbf{R}^d , on ait

$$A(\delta, B(x, \delta)) \leq \gamma .$$

I.4.c) Montrer qu'il existe deux constantes γ_1, γ_2 strictement positives ne dépendant que de d et du choix de v_1, \dots, v_d telles que, pour toute partie bornée F de \mathbf{R}^d et tout δ strictement positif, on ait

$$\gamma_1 A(\delta, F) \leq N(\delta, F) \leq \gamma_2 A(\delta, F) .$$

I.4.d) Soit F une partie bornée de \mathbf{R}^d . Montrer que $B - \dim(F)$ existe si et seulement si $\frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)}$ admet une limite lorsque δ tend vers 0 par valeurs supérieures et que dans ce cas on a

$$B - \dim(F) = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)} .$$

I.5) Soit L un sous-espace vectoriel de \mathbf{R}^d de dimension p supérieure à 1 et de base (v_1, \dots, v_p) .

I.5.a) Pour $\alpha > 0$ et pour

$$U_\alpha = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_p v_p \mid \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \lambda_i \in [-\alpha; \alpha]\} ,$$

estimer $A(\delta, U_\alpha)$ puis $B - \dim(U_\alpha)$.

I.5.b) Pour tout R strictement positif, montrer qu'il existe α_1 et α_2 strictement positifs tels que

$$U_{\alpha_1} \subset L \cap B(0, R) \subset U_{\alpha_2} .$$

I.5.c) En déduire que, pour tout $R > 0$, $B - \dim(L \cap B(0, R)) = p$.

PARTIE II

Soit E une partie compacte non vide de \mathbf{R}^d . On considère des applications S_1, \dots, S_m de E dans E pour lesquelles il existe des constantes c_1, \dots, c_m dans $[0; 1[$ telles que

$$\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket \forall (x, y) \in E^2 \quad \|S_i(x) - S_i(y)\| \leq c_i \|x - y\| .$$

On note \mathcal{K} l'ensemble des compacts non vides de E . Pour A dans \mathcal{K} on pose

$$\varphi(A) = \bigcup_{i=1}^m S_i(A) .$$

II.1) Montrer que φ est une application de \mathcal{K} dans lui-même.

Pour $k \geq 1$, on définit $\varphi^k = \varphi \circ \dots \circ \varphi$ (k termes) et on pose

$$F = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \varphi^k(E) .$$

II.2) Montrer que F est un compact non vide et vérifie $\varphi(F) = F$.

Pour A dans \mathcal{K} et $\mu > 0$ on pose

$$A^\mu = \{y \in \mathbf{R}^d \mid \exists x \in A, \|x - y\| \leq \mu\}$$

et, pour B dans \mathcal{K} ,

$$d(A, B) = \inf \{\mu \in \mathbf{R}_+^* \mid A \subset B^\mu \text{ et } B \subset A^\mu\} .$$

II.3) Montrer, pour A et B dans \mathcal{K} ,

$$d(A, B) = 0 \iff A = B .$$

II.4) Pour tous $A_1, \dots, A_m, B_1, \dots, B_m$ dans \mathcal{K} , montrer

$$d\left(\bigcup_{i=1}^m A_i, \bigcup_{i=1}^m B_i\right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} d(A_i, B_i) .$$

II.5) Trouver une constante M dans $]0; 1[$ ne dépendant que de c_1, \dots, c_m telle que pour A et B dans \mathcal{K} on ait

$$d(\varphi(A), \varphi(B)) \leq Md(A, B) .$$

II.6) Montrer que F est l'unique compact non vide dans E tel que $\varphi(F) = F$.

II.7) Montrer

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} d(\varphi^k(E), F) = 0 .$$

On suppose désormais qu'en plus des hypothèses précédentes, pour tout i dans $\llbracket 1; m \rrbracket$, S_i est une bijection de \mathbf{R}^d dans lui-même telle que pour tous x et y dans \mathbf{R}^d ,

$$\|S_i(x) - S_i(y)\| = c_i \|x - y\| ,$$

avec c_1, \dots, c_m dans $]0; 1[$, et les ensembles $S_1(E), \dots, S_m(E)$ sont disjoints.

II.8.a) Montrer qu'il existe un unique s_0 dans \mathbf{R}_+ tel que

$$\sum_{i=1}^m c_i^{s_0} = 1 .$$

II.8.b) On suppose

$$N(\delta, F) \underset{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}}{\sim} C\delta^{-s}$$

avec C et s dans \mathbf{R}_+ . Montrer

$$s = B - \dim(F) = s_0 .$$

PREMIÈRE COMPOSITION – ENSAE 1997 – MP

PARTIE I

I.1) Soit δ dans \mathbf{R}_+^* tel que $\mathcal{M}(\delta, F)$ soit vide. On construit alors (x_n) à valeurs dans F par récurrence en choisissant x_N arbitraire dans $F \setminus \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta)$, la réunion étant vide par convention si $N = 0$. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, on dispose d'une valeur d'adhérence de (x_n) , disons ℓ , et alors la boule $B(\ell, \frac{\delta}{2})$ contient alors une infinité de termes de (x_n) et donc d'au moins deux. Leur distance mutuelle est alors strictement inférieure à δ , par inégalité triangulaire, et cette contradiction montre que $\mathcal{M}(\delta, F)$ est non vide.

I.2.a) Si $F \subset F'$ alors pour tout δ dans \mathbf{R}_+^* on a $\mathcal{M}(\delta, F') \subset \mathcal{M}(\delta, F)$ car un recouvrement de F' est aussi un recouvrement de F , et donc $N(\delta, F) \leq N(\delta, F')$ par décroissance de l'infimum. Par croissance et négativité stricte du logarithme sur $]0; 1[$, on en déduit que, pour δ dans cet intervalle, on a $\frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta, F'))}{-\ln(\delta)}$. Par passage à la limite, supposées exister, il vient

$$\boxed{\text{B} - \dim(F) \leq \text{B} - \dim(F')}.$$

I.2.b) Par bijectivité des homothéties de rapport non nul et homogénéité de la norme, on a pour tous x dans E et δ dans \mathbf{R}_+^* , $\lambda B(x, \delta) = B(\lambda x, |\lambda| \delta)$ et on en déduit $\mathcal{M}(|\lambda| \delta, \lambda F) = \mathcal{M}(\delta, F)$, puis $N(|\lambda| \delta, \lambda F) = N(\delta, F)$ et donc

$$\frac{\ln(N(\delta, \lambda F))}{-\ln(\delta)} = \frac{\ln(N(\delta |\lambda|^{-1}, F))}{-\ln(\delta) + \ln(|\lambda|)}$$

et comme $-\ln(\delta) + \ln(|\lambda|) = -\ln(\delta) + \text{O}(1) \sim -\ln(\delta)$ au voisinage de 0 à droite, le membre de droite admet $\text{B} - \dim(F)$ comme limite, i.e. $\boxed{\text{B} - \dim(\lambda F) \text{ existe et vaut } \text{B} - \dim(F)}$.

I.2.c) Soit δ dans \mathbf{R}_+^* . On a $\mathcal{M}(\delta, F \cup F') \subset \mathcal{M}(\delta, F) + \mathcal{M}(\delta, F')$, où la somme des deux ensembles est l'ensemble des sommes d'éléments de chaque ensemble, puisque pour $(x_1, \dots, x_{N+N'})$ dans \mathbf{R}^d , on a

$$\left(F \subset \bigcup_{i=1}^N B(x_i, \delta) \text{ et } F' \subset \bigcup_{i=N+1}^{N+N'} B(x_i, \delta) \right) \implies F \cup F' \subset \bigcup_{i=1}^{N+N'} B(x_i, \delta)$$

et on en déduit $N(\delta, F \cup F') \leq N(\delta, F) + N(\delta, F')$. Comme en question 2a, N est une fonction croissante de sa deuxième variable et ainsi

$$\begin{aligned} \max(N(\delta, F), N(\delta, F')) &\leq N(\delta, F \cup F') \leq N(\delta, F) + N(\delta, F') \\ &\leq \max(N(\delta, F), N(\delta, F')) + \min(N(\delta, F), N(\delta, F')) \end{aligned}$$

Par croissance et négativité stricte du logarithme sur $]0; 1[$, il vient

$$\begin{aligned} \max\left(\frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)}, \frac{\ln(N(\delta, F'))}{-\ln(\delta)}\right) &\leq \frac{\ln(N(\delta, F \cup F'))}{-\ln(\delta)} \leq \\ &\frac{\ln(\max(N(\delta, F), N(\delta, F')))}{-\ln(\delta)} + \frac{\ln\left(1 + \frac{\min(N(\delta, F), N(\delta, F'))}{\max(N(\delta, F), N(\delta, F'))}\right)}{-\ln(\delta)}. \end{aligned}$$

Le deuxième terme du membre de droite est alors dans $\frac{\text{O}(1)}{-\ln(\delta)}$, donc dans $\text{o}(1)$. Par théorème d'encadrement des limites, on en déduit que

$$\boxed{\text{B} - \dim(F \cup F') \text{ existe et vaut } \max(\text{B} - \dim(F), \text{B} - \dim(F'))}.$$

I.2.d) La démonstration donnée en question 2a montre que pour δ dans $]0; 1[$, on a

$$\frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta, F''))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta, F'))}{-\ln(\delta)}$$

et donc par théorème d'encadrement des limites, $\boxed{B - \dim(F'') \text{ existe et vaut } B - \dim(F)}$.

I.3) En prenant des boules centrées en les points de F , on obtient un recouvrement de F et donc pour tout δ dans \mathbf{R}_+^* , on a $N(\delta, F) \leq \text{Card}(F)$ et donc $\frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} = O\left(\frac{1}{-\ln(\delta)}\right) = o(1)$. Il en résulte

$$\boxed{B - \dim(F) = 0}.$$

I.4.a) L'application est bien définie car d est fini, et positive par positivité de la valeur absolue. Pour x et y dans \mathbf{R}^d et λ dans \mathbf{R} , on dispose de (x_i) et (y_i) tels que $x = x_1v_1 + \dots + x_dv_d$ et $y = y_1v_1 + \dots + y_dv_d$. On a alors $x + y = (x_1 + y_1)v_1 + \dots + (x_d + y_d)v_d$ et $\lambda x = \lambda x_1v_1 + \dots + \lambda x_dv_d$ et donc : par positivité de $|\lambda|$, $\sup |\lambda x_i| = |\lambda| \sum |x_i|$ et, par inégalité triangulaire,

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket |x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \sup |x_j| + \sup |y_j|,$$

d'où par passage au supremum $\sup |x_i + y_i| \leq \sup |x_j| + \sup |y_j|$. On en conclut que

$\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur \mathbf{R}^d . Comme \mathbf{R}^d est de dimension finie, toutes les normes sur \mathbf{R}^d sont équivalentes, et ainsi $\|\cdot\|_\infty$ est équivalente à $\|\cdot\|$.

I.4.b) Puisqu'on a affaire à des normes équivalentes, on dispose de M dans \mathbf{R}_+^* tel que la boule $B(0, 1)$ est incluse dans la boule de centre 0 et de rayon M pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Par homogénéité des normes, on en déduit que pour x dans \mathbf{R}^d et δ dans \mathbf{R}_+^* , $B(x, \delta)$ est inclus dans le cube de centre x et de rayon $M\delta$, i.e. les vecteurs (y_1, \dots, y_d) de \mathbf{R}^d tels que, pour tout i dans $\llbracket 1; d \rrbracket$, $|y_i - x_i| \leq M\delta$ et donc $\left[\frac{x_i}{\delta} - M\right] \delta \leq y_i \leq \left[\frac{x_i}{\delta} + M\right] \delta + \delta$. Par conséquent, pour k_1, \dots, k_d entiers, $C(k_1, \dots, k_d, \delta) \cap B(x, \delta)$ est vide si pour un indice i on a $k_i > \left[\frac{x_i}{\delta} + M\right]$ ou $k_i < \left[\frac{x_i}{\delta} - M\right]$. Comme $\left[\frac{x_i}{\delta} + M\right] - \left[\frac{x_i}{\delta} - M\right] \leq \frac{x_i}{\delta} + M - \left(\frac{x_i}{\delta} - M - 1\right)$, il y a donc au plus $(2M + 1)^d$ δ -cubes qui rencontrent $B(x, \delta)$. Ainsi en posant $\gamma = (2M + 1)^d$, on a $\boxed{A(\delta, B(x, \delta)) \leq \gamma}$.

I.4.c) Soit F une partie bornée de \mathbf{R}^d et δ dans \mathbf{R}_+^* . Alors F est inclus dans la réunion de $N(\delta, F)$ boules euclidiennes de rayon δ , chacune d'elles rencontrant au plus γ δ -cubes et donc F rencontre au plus $(1 + \gamma)N(\delta, F)$ δ -cubes. On peut ainsi poser, par positivité stricte de $1 + \gamma$, $\gamma_1 = \frac{1}{1 + \gamma}$ et γ_1 ne dépend que de d et v_1, \dots, v_d .

Remarquons que si C et C' sont deux δ -cubes, C' est l'image de C par une translation, disons de vecteur a , alors si C est recouvert par des boules, C' l'est par les boules images par la translation de vecteur a et réciproquement, de sorte qu'on a $N(\delta, C) = N(\delta, C')$. De plus, par définition de $A(\delta, F)$, F est inclus dans la réunion des $A(\delta, F)$ δ -cubes qui le rencontrent et donc, dans la réunion des $A(\delta, F)N(\delta, C)$ boules euclidiennes qui recouvrent ces δ -cubes, i.e. en posant $\gamma_2 = N(\delta, C)$ pour un C quelconque dans $C_\delta(v_1, \dots, v_d)$, on a $N(\delta, F) \leq \gamma_2 A(\delta, F)$. On a en particulier $\gamma_2 = N(\delta, C(0, \dots, 0, \delta))$ et donc, d'après les éléments donnés en question 2b, $\gamma_2 = N(1, \delta^{-1}C(0, \dots, 0, \delta))$. Comme on a $\delta^{-1}C(0, \dots, 0, \delta) = C(0, \dots, 0, 1)$, γ_2 ne dépend que de d et v_1, \dots, v_d et $\boxed{\gamma_1 A(\delta, F) \leq N(\delta, F) \leq \gamma_2 A(\delta, F)}$.

I.4.d) D'après ce qui précède et par croissance et négativité stricte du logarithme sur $]0; 1[$, on a

$$\frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)} - \frac{\ln(\gamma_1)}{\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \leq \frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)} - \frac{\ln(\gamma_2)}{\ln(\delta)}$$

et donc $\frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)} - \frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} = o(1)$, de sorte que les deux termes de la différence ont une limite simultanément et qu'elle est alors identique, i.e.

$$\boxed{B - \dim(F) \text{ et } \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \frac{\ln(A(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \text{ existent simultanément et sont alors égaux.}}$$

I.5.a) Soit k_1, \dots, k_d des entiers. Alors $C(k_1, \dots, k_d, \delta)$ rencontre U_α si et seulement si pour tout entier i dans $\llbracket 1; p \rrbracket$ on a $k_i \delta \leq \alpha$ et $(k_i + 1)\delta \geq -\alpha$, i.e. $-\left[\frac{\alpha}{\delta}\right] - 1 \leq k_i \leq \left[\frac{\alpha}{\delta}\right]$, et donc

$$\boxed{A(\delta, U_\alpha) = 2^p \left(1 + \left[\frac{\alpha}{\delta}\right]\right)^p.}$$

On a $1 + \left[\frac{\alpha}{\delta}\right] = \delta^{-1} \left(\delta + \delta \left[\frac{\alpha}{\delta}\right]\right)$ et le terme entre parenthèses est compris entre $\alpha + \delta$ et $\alpha + 2\delta$ et est donc équivalent à α . Il en résulte $A(\delta, U_\alpha) = (2\alpha)^p \delta^{-p} (1 + o(1))$, puis $\ln(A(\delta, U_\alpha)) = -p \ln(\delta) + O(1)$ et donc, d'après la question précédente $\boxed{B - \dim(U_\alpha) \text{ existe et vaut } p.}$

I.5.b) Soit R strictement positif. D'après l'équivalence des normes vue en question 4a, la boule $B(0, R)$ contient une boule de centre 0 pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et est contenue dans une autre telle boule. On note α_1 et α_2 leurs rayons et on a alors directement $\boxed{U_{\alpha_1} \subset L \cap B(0, R) \subset U_{\alpha_2}.}$

I.5.c) D'après la question 5a, on a $B - \dim(U_{\alpha_1}) = B - \dim(U_{\alpha_2}) = p$, et il résulte de la question précédente et de la question 2d qu'on a $\boxed{B - \dim(L \cap B(0, R)) = p.}$

PARTIE II

II.1) Soit A dans \mathcal{K} et (x_n) une suite à valeurs dans $\varphi(A)$. On dispose de i dans $\llbracket 1; m \rrbracket$ et d'une suite extraite de (x_n) à valeurs dans $S_i(A)$. On note (y_n) cette suite extraite et on dispose de (a_n) à valeurs dans A telle que $(y_n) = (S_i(a_n))$. Comme A est compact, on dispose d'une sous-suite de (a_n) convergeant dans A . On note (b_n) cette sous-suite et a sa limite, de sorte qu'on a $b_n - a = o(1)$. Comme $\|S_i(b_n) - S_i(a)\| = O(\|b_n - a\|)$, on en déduit qu'on dispose d'une sous-suite de (y_n) convergeant vers $S_i(a)$, donc dans $\varphi(A)$, ce qui montre que $\varphi(A)$ est compact. Comme A est non vide, $\varphi(A)$ l'est aussi. Comme S_i est à valeurs dans E , φ aussi et donc $\boxed{\varphi \text{ est une application de } \mathcal{K} \text{ dans lui-même.}}$

Remarque : les fonctions S_i sont lipschitziennes donc continues et il résulte du théorème de WEIERS-TRASS que $S_i(A)$ est alors compact non vide et donc $\varphi(A)$ aussi en tant que réunion d'images continues de compacts non vides.

II.2) D'après ce qui précède $\varphi(E)$ est un compact non vide de E et donc, par récurrence immédiate, il en va de même pour $\varphi^k(E)$ pour tout entier k strictement positif. Leur intersection est donc une intersection de fermés, donc fermée, dans le compact $\varphi(E)$ et est donc compacte. Soit (x_k) une suite telle que $x_k \in \varphi^k(E)$ pour tout k dans \mathbf{N}^* . En particulier (x_k) est à valeurs dans E . Par compacité on dispose de a valeur d'adhérence de (x_k) . Comme $\varphi(E) \subset E$, pour tout entier k , on a $\varphi^{k+1}(E) \subset \varphi^k(E)$ et donc la suite $(\varphi^k(E))$ est une suite décroissante de compacts de E , de sorte que, pour tout k , a est limite d'une suite à valeurs dans $\varphi^k(E)$ à partir du rang k . Comme ce dernier est fermé, on a $a \in \varphi^k(E)$ et donc $a \in F$. Ainsi $\boxed{F \text{ est un compact non vide.}}$ Soit x dans F et k dans \mathbf{N}^* . On a donc $x \in \varphi^k(E)$ et donc $\varphi(x) \in \varphi^{k+1}(E) \subset \varphi^k(E)$, puis $\varphi(x) \in F$. Ainsi $\varphi(F) \subset F$. De plus on dispose de y_k dans $\varphi^{k-1}(E)$ et i_k dans $\llbracket 1; m \rrbracket$ tels que $x = S_{i_k}(y_k)$. Puisque $\llbracket 1; m \rrbracket$ est fini, il est compact, et donc (i_k, y_k) est une suite à valeurs dans le compact $\llbracket 1; m \rrbracket \times E$. On dispose d'une sous-suite convergente et donc d'une sous-suite de (j_k, z_k) avec (j_k) stationnaire tendant vers i dans $\llbracket 1; m \rrbracket$ et (z_k) convergeant vers z dans F , pour les mêmes arguments que ceux invoqués pour a précédemment. On a alors $\|S_i(z_k) - S_i(a)\| = O(\|z_k - a\|) = o(1)$ et comme $S_i(z_k) = x$ par construction, on a $x = S_i(a)$ et donc $x \in \varphi(F)$, puis $F \subset \varphi(F)$. Finalement $\boxed{\varphi(F) = F.}$

II.3) Soit A et B dans \mathcal{K} . Par construction A^μ est fonction croissante de μ et donc l'ensemble

$$\{\mu \in \mathbf{R}_+^* \mid A \subset B^\mu \text{ et } B \subset A^\mu\}$$

est un intervalle non majoré de \mathbf{R}_+^* . La quantité $d(A, B)$ est donc nulle si et seulement si cet ensemble est \mathbf{R}_+^* , i.e. $A \subset \bigcap_{\mu>0} B^\mu$ et $B \subset \bigcap_{\mu>0} A^\mu$. Par définition cela équivaut à $A \subset \overline{B}$ et $B \subset \overline{A}$. Comme un

compact est fermé, ceci équivaut à $A \subset B$ et $B \subset A$, i.e. $d(A, B) = 0 \iff A = B$.

II.4) Si μ est un réel strictement supérieur à $\max_{1 \leq i \leq m} (d(A_i, B_i))$, alors pour tout i dans $\llbracket 1; m \rrbracket$, $A_i \subset B_i^\mu$ et donc

$$\bigcup_{i=1}^m A_i \subset \left(\bigcup_{i=1}^m B_i \right)^\mu, \text{ et réciproquement } B_i \subset A_i^\mu \text{ et } \bigcup_{i=1}^m B_i \subset \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right)^\mu, \text{ de sorte que } d\left(\bigcup_{i=1}^m A_i, \bigcup_{i=1}^m B_i \right)$$

est inférieur à μ . Par passage à l'infimum, il vient $d\left(\bigcup_{i=1}^m A_i, \bigcup_{i=1}^m B_i \right) \leq \max_{1 \leq i \leq m} (d(A_i, B_i))$.

II.5) Par hypothèse, pour i dans $\llbracket 1; m \rrbracket$, S_i envoie une boule de rayon μ dans une boule de rayon inférieur à $c_i \mu$ et donc, pour A et B dans \mathcal{K} , $A \subset B^\mu \iff A \subset \bigcup_{b \in B} B(b, \mu) \implies S_i(A) \subset \bigcup_{b \in B} B(S_i(b), c_i \mu)$ et il vient

$d(S_i(A), S_i(B)) \leq c_i d(A, B)$ et donc, grâce à la question précédente, en posant $M = \max(c_1, \dots, c_m)$, on a $0 \leq M < 1$ et $d(\varphi(A), \varphi(B)) \leq M d(A, B)$.

II.6) Soit G dans \mathcal{K} tel que $\varphi(G) = G$. Comme $\varphi(F) = F$, la relation précédente donne $d(F, G) \leq M d(F, G)$ et donc, puisque M appartient à $]0; 1[$, $d(F, G) = 0$. Il résulte de la question 3 qu'on a $F = G$. Comme F est point fixe de φ d'après la question 2, F est l'unique compact non vide de E tel que $\varphi(F) = F$.

II.7) On a par récurrence immédiate, d'après la question 5, pour tout entier k dans \mathbf{N}^* , $d(\varphi^k(E), \varphi^k(F)) = M^k d(E, F)$ et donc, puisque $\varphi^k(F) = F$, $d(\varphi^k(E), F) = O(M^k) = o(1)$, i.e. $d(\varphi^k(E), F) \rightarrow 0$.

II.8.a) Par continuité et décroissance stricte des exponentielles de base dans $]0; 1[$, la fonction $s \mapsto \sum_{i=1}^m c_i^s$ est continue et strictement décroissante sur \mathbf{R}_+ et réalise donc une bijection sur son image, d'après le théorème de la bijection. En 0 elle vaut m , donc est supérieure ou égale à 1, et sa limite en l'infini est nulle, donc 1 fait partie de son image et ainsi il existe un unique s_0 dans \mathbf{R}_+ tel que $\sum_{i=1}^m c_i^{s_0} = 1$.

II.8.b) On a alors $\delta^s N(\delta, F) = C + o(1)$, puis $s \ln(\delta) + \ln(N(\delta, F)) = O(1)$ et donc $\frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} = s + o(1)$,

i.e. $\text{B-dim}(F)$ existe et vaut s . Par hypothèse sur les S_i , F est inclus dans une réunion de boules euclidiennes de rayon δ si et seulement si $S_i(F)$ est inclus dans la réunion des boules images et celles-ci sont de rayon $c_i \delta$ et donc $N(\delta, S_i(F)) = N(\delta/c_i, F)$. Par disjonction des images par S_i , pour δ assez petit, $N(\delta, F)$ est la somme des $N(\delta, S_i(F))$ et il vient

$$\delta^{-s} N(\delta, F) = \sum_{i=1}^m \delta^{-s} N(\delta, S_i(F)) = \sum_{i=1}^m c_i^s \delta^{-s} N(\delta, F)$$

i.e. en passant à la limite en δ , $C = C \sum_{i=1}^m c_i^s$. Comme C ne saurait être nul car $N(\delta, F)$ est à valeurs dans \mathbf{N}^* , et par unicité de s_0 , il vient $\text{B-dim}(F) = s = s_0$.