Avertissement et Notations

L'usage des calculatrices et téléphones portables est interdit.

L'objet de cette épreuve est l'étude des nombres de Pisot, qui interviennent dans différents domaines de l'arithmétique et de l'analyse. L'épreuve comporte quatre parties. Ces parties ne sont pas indépendantes (les parties 1 à 3 sont liées, la partie 4 ne dépend que de la partie 1). Les résultats de questions non-traitées peuvent être admis et utilisés dans les réponses aux questions suivantes, mais cela doit être clairement indiqué dans la copie.

Dans la suite, on notera $\mathbb{Z}[X]$ (resp. $\mathbb{Q}[X]$) l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ (resp. dans $\mathbb{Q}$). On utilisera les deux définitions suivantes:

- $\theta \in \mathbb{C}$ est un *nombre algébrique*, s'il est racine d'un polynôme non-nul de $\mathbb{Q}[X]$.
- $\theta \in \mathbb{C}$ est un *entier algébrique*, s'il est racine d'un polynôme unitaire de $\mathbb{Z}[X]$.

Il est clair qu'un entier algébrique est un nombre algébrique, la réciproque étant fausse. D'autres définitions (dont celle des nombres de Pisot) sont données dans la partie 1.

Partie 1

1. Soit θ un nombre algébrique. Montrer que $I_\theta := \{P \in \mathbb{Q}[X], P(\theta) = 0\}$ est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$. En déduire qu'il existe un unique polynôme $\Pi_\theta \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire, de degré minimal, et annulant θ. Le polynôme Π_θ est appelé *polynôme minimal de θ.*

2. Un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est dit *primitif* si ses coefficients sont premiers entre eux dans leur ensemble. Montrer que si $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ sont primitifs, leur produit PQ l'est aussi.

   Indication: On raisonnera par l'absurde. En notant $P = \sum a_k X^k, Q = \sum b_k X^k$ et $PQ = \sum c_k X^k$, on introduira un diviseur premier p de tous les c_k, ainsi que le plus petit entier N pour lequel p ne divise pas a_N.

3. En déduire que si θ est un entier algébrique, alors $\Pi_\theta \in \mathbb{Z}[X]$.

4. *On appelle nombre de Pisot un entier algébrique θ tel que:*

   i) $|\theta| \geq 1$.

   ii) $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq \theta, \ \Pi_\theta(\alpha) = 0 \Rightarrow |\alpha| < 1$.

   On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres de Pisot. Montrer que $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}$.

5. Soit $\theta \in \mathcal{P}$. On admet qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, et des nombres complexes $\alpha_0, \ldots, \alpha_k$ de module strictement plus petit que 1, tels que

$$\theta^n + \sum_{i=0}^{k} \alpha_i^n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{pour tout } \ n \in \mathbb{N}.$$

   En déduire que la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ est convergente. On montrera dans la partie 3 la réciproque de ce résultat.

Partie 2

Dans toute cette partie,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$$

désigne une série entière à coefficients complexes c_n, $n \in \mathbb{N}$, de rayon de convergence $R > 0$ (éventuellement infini). On note $D(0,R) := \{z \in \mathbb{C}, |z| < R\}$.

1. On suppose dans cette question que f est une fraction rationnelle, c'est-à-dire qu'il existe $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ avec $Q(z) \neq 0$ et $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ pour tout $z \in D(0,R)$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, des complexes non tous nuls $\beta_0, \ldots, \beta_p$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que
$$\beta_0 c_n \ + \ \beta_1 c_{n+1} \ + \ \ldots \ + \ \beta_p c_{n+p} = 0, \qquad \text{pour tout } n \geq n_0. \tag{0.1}$$

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe $p \in \mathbb{N}$, des complexes non tous nuls $\beta_0, \ldots, \beta_p$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que (0.1) soit vérifiée. Montrer que f est une fraction rationnelle.

3. On suppose que f est une fraction rationnelle. Montrer que les déterminants
$$\Delta_m := \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & \ldots & c_m \\ c_1 & c_2 & \ldots & \ldots & c_{m+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_m & c_{m+1} & \ldots & \ldots & c_{2m} \end{vmatrix}, \quad m \in \mathbb{N}$$
sont tous nuls à partir d'un certain rang.

4. On suppose réciproquement que $\Delta_m = 0$ pour tout m à partir d'un certain rang. On note p le rang minimal. On souhaite montrer que f est une fraction rationnelle. On suppose $p \geq 1$ (le cas $p = 0$ est trivial).
   (a) Montrer qu'il existe des complexes $\beta_0, \ldots, \beta_{p-1}$ tels que
   $$C_{j+p} := \beta_0 c_j \ + \ \beta_1 c_{j+1} \ + \ \ldots \ + \ \beta_{p-1} c_{j+p-1} + c_{j+p}$$
   soit nul pour tout $j = 0, \ldots, p$.
   (b) Montrer que $\Delta_{p+1} = -\Delta_{p-1}(C_{2p+1})^2$.
   (c) Montrer que $C_{j+p} = 0$ pour tout $j \in \mathbb{N}$.
   Indication: on pourra raisonner par récurrence, et montrer que si C_{j+p} est nul pour tout $j \leq m-1$ ($m > p$), alors $\Delta_m = (-1)^{m+p}\Delta_{p-1}(C_{p+m})^{m-p+1}$.
   (d) En déduire que f est une fraction rationnelle.

5. On suppose que f est une fraction rationnelle, que l'on écrit sous forme irréductible:
$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{p_0 + p_1 z + \cdots + p_m z^m}{q_0 + q_1 z + \cdots + q_n z^n}, \quad z \in D(0,R)$$
avec P et Q premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$, uniques à constante multiplicative près. On suppose de plus que f est à coefficients dans $\mathbb{Z}$: $c_n \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \geq 0$.

   On admet que les coefficients p_i et q_j peuvent alors être choisis dans $\mathbb{Z}$ et premiers entre eux dans leur ensemble. On supposera désormais ces deux hypothèses satisfaites.

(a) Montrer que les coefficients q_j de Q sont premiers entre eux dans leur ensemble.

(b) En utilisant le théorème de Bezout dans $\mathbb{Q}[X]$, montrer qu'il existe $U, V \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ tels que $r = Q\,(Uf + V)$.

(c) En déduire que r divise les coefficients de $Uf + V$.

Indication: on pourra s'inspirer du résultat de la question 2, Partie 1, en le généralisant aux séries entières.

(d) Conclure que $q_0 = \pm 1$.

Partie 3

Soient $\theta > 1$ et $\lambda > 0$ tels que la série de terme général $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ converge. L'objectif de cette partie est de montrer que θ est un nombre de Pisot. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on écrit $\lambda\theta^n = a_n + \varepsilon_n$, avec $a_n \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. On introduit aussi $\eta_m := a_m - \theta a_{m-1}$, $m \geq 1$.

1. (a) Montrer que les séries de terme général ε_n^2 et η_n^2 convergent.

   (b) On introduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ le déterminant $\Delta_n := |(a_{i+j})_{0 \leq i,j \leq n}|$. Montrer que

   $$\Delta_n^2 \leq \left(\sum_0^n a_m^2\right)\left(\sum_1^{n+1} \eta_m^2\right)\left(\sum_2^{n+2} \eta_m^2\right)\cdots\left(\sum_n^{2n} \eta_m^2\right)$$

   Indication: on utilisera sans démonstration le lemme d'Hadamard suivant: pour toute matrice A réelle de taille n, de colonnes $A_1, \ldots, A_n$, on a

   $$|\det(A)| \leq \|A_1\|_2 \ldots \|A_n\|_2, \quad \textit{où } \|\ \|_2 \textit{ désigne la norme euclidienne sur } \mathbb{R}^n.$$

   (c) Déduire des questions précédentes que $\Delta_n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

2. En utilisant les résultats de la partie 2, montrer qu'il existe deux polynômes $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux, tels que $Q(0) = 1$ et

   $$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \forall |z| < \theta^{-1}.$$

3. On garde les notations de la question précédente. Montrer que la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n z^n$ a un rayon de convergence $R \geq 1$, et que

   $$f(z) = \frac{\lambda}{1 - \theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad \forall |z| < \theta^{-1}.$$

4. En déduire que θ^{-1} est l'unique zéro de Q dans le disque unité ouvert.

5. Montrer que $(1 - |z|)\, f(z) \to 0$ quand $|z| \to 1$. En déduire que θ^{-1} est l'unique zéro de Q dans le disque unité fermé.

6. En déduire que θ est un nombre de Pisot.

Partie 4

On rappelle pour cette partie le résultat suivant, démontré dans les parties précédentes:

Soit $\theta \geq 1$. Si θ est un nombre de Pisot, la série de terme général $\sin^2(\pi\theta^n)$ converge. Réciproquement, s'il existe $\lambda > 0$ tel que la série de terme général $\sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ converge, alors θ est un nombre de Pisot.

Soit $\theta > 1$. On introduit, pour tout $u > 0$,

$$\Gamma(u) \;:=\; \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} \cos(u\theta^{-k})$$

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que dans le cas $\theta = 2$, $\Gamma(u) = \dfrac{\sin(2u)}{2u}$ pour tout $u > 0$.

   Indication: on fera bon usage de la formule $\cos x \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x$.
3. On suppose dans cette question que $\Gamma(u) \not\to 0$ lorsque $u \to +\infty$.
   (a) Montrer l'existence d'un $\delta > 0$, d'une suite réelle convergente $(\lambda_s)_{s\in\mathbb{N}}$, et d'une suite d'entiers strictement croissante $(m_s)_{s\in\mathbb{N}}$ tels que:
   $$\text{pour tout } \; s \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq \lambda_s < \theta, \;\; \text{et} \;\; |\Gamma(\pi\lambda_s\theta^{m_s})| \geq \delta.$$
   On notera $u_s = \pi\lambda_s\theta^{m_s}$, et $\lambda \in [1, \theta]$ la limite des λ_s.

   (b) Montrer que pour tout $s \in \mathbb{N}$,
   $$|\Gamma(u_s)| \;\leq\; |\cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\ldots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})|\,.$$
   En déduire que pour tout $s \in \mathbb{N}$,
   $$\sum_{q=0}^{m_s} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q) \leq \ln(1/\delta^2).$$
   (c) En déduire que θ est un nombre de Pisot.
4. On suppose dans cette question que θ est un nombre de Pisot avec $\theta \neq 2$.
   (a) Montrer que $\theta^m \neq \frac{2k+1}{2}$, pour tout $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Montrer que le produit $\prod_{m=1}^{n}\cos^2(\pi\theta^{-m})$ converge vers un nombre $A > 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   (c) Montrer que le produit $\prod_{m=1}^{n}\cos^2(\pi\theta^{m})$ converge vers un nombre $B > 0$ lorsque $n \to +\infty$.

   (d) En déduire que $\Gamma(u) \not\to 0$ lorsque $u \to +\infty$.

Composition C – ENS MP* 2012

PARTIE I

1. Puisque l'application $P \longmapsto P(\theta)$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbf{Q}[X]$ dans $\mathbf{C}$, son noyau est un idéal de $\mathbf{Q}[X]$, i.e. $\boxed{I_\theta \text{ est un idéal de } \mathbf{Q}[X].}$

   Puisque θ est algébrique sur $\mathbf{Q}$, I_θ n'est pas réduit à $\{0\}$. De plus, puisque $\mathbf{Q}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$, l'anneau $\mathbf{Q}[X]$ est principal et on dispose donc d'un polynôme unitaire Π_θ dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que $I_\theta = \Pi_\theta \mathbf{Q}[X]$.

   Enfin si un polynôme unitaire annule θ, c'est un multiple de Π_θ et donc s'il a un degré inférieur ou égal à celui de Π_θ, il lui est égal. Ainsi

   $\boxed{\Pi_\theta \text{ est l'unique polynôme unitaire de } \mathbf{Q}[X] \text{ annulant } \theta \text{ et de degré minimal pour ces conditions.}}$

2. Soit p un nombre premier et P et Q dans $\mathbf{Z}[X]$ primitifs avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k$. On note X et Y les ensembles définis par $X = \{k \in [\![0, n]\!] \mid p \nmid a_k\}$ et $Y = \{k \in [\![0, m]\!] \mid p \nmid b_k\}$. Puisque P et Q sont primitifs, X et Y sont non vides. Comme ce sont des parties de $\mathbf{N}$, elles admettent un plus petit élément. On note $r = \min X$ et $s = \min Y$. Par définition le coefficient de degré rs de PQ est égal à $\sum_{k=0}^{r+s} a_k b_{r+s-k}$ et est donc congru à $a_r b_s$ modulo p puisque, dans la somme, soit $k < r$ et alors $r + s - k > s$, donc $p \mid b_{r+s-k}$, soit $k > r$ et alors $p|a_k$. Comme $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est intègre, $a_r b_s$ n'est pas divisible par p et donc le pgcd des coefficients de PQ n'est pas divisible par p.

   Comme il ne l'est donc pas aucun nombre premier, c'est qu'il est égal à 1, i.e. $\boxed{PQ \text{ est primitif.}}$

3. Soit θ un entier algébrique. On dispose de P dans $\mathbf{Z}[X]$ unitaire annulant θ et de Π_θ défini en I.1., et donc aussi de Q dans $\mathbf{Q}[X]$ tel que $P = \Pi_\theta Q$. On note X et Y les ensembles définis par $X = \{a \in \mathbf{N}^* \mid a\Pi_\theta \in \mathbf{Z}[X]\}$ et $Y = \{a \in \mathbf{N}^* \mid aQ \in \mathbf{Z}[X]\}$. Ces ensembles sont non vides car le produit des dénominateurs des coefficients respectifs convient, par exemple. On dispose donc de a et b donnés par $a = \min X$ et $b = \min Y$. Par définition du minimum, pour tout nombre premier p, a/p et b/p n'appartiennent pas à X et Y respectivement et donc les coefficients de $a\Pi_\theta$ et bQ ne sont pas tous divisibles par p. Il en résulte que ces deux polynômes sont primitifs.

   D'après ce qui précède abP est donc primitif. Comme P l'est, puisque P est unitaire à coefficients entiers, et que ab divise tous les coefficients de abP, c'est donc qu'on a $ab = 1$ et, par suite, $a = b = 1$. En particulier $a = 1$, i.e. $\boxed{\Pi_\theta \in \mathbf{Z}[X].}$

4. Soit θ est un nombre de Pisot. On dispose de Π_θ défini en I.1. D'après la question précédente Π_θ est à coefficients réels et donc $\overline{\theta}$ est également racine de Π_θ. Comme $|\overline{\theta}| = |\theta|$, il résulte de la propriété (ii) des nombres de Pisot qu'on a $\overline{\theta} = \theta$, i.e. $\boxed{\mathcal{P} \subset \mathbf{R}.}$

5. En reprenant les notations de la question, on pose $a = \max_{0 \le i \le k} |\alpha_i|$. On a alors $\sum_{i=0}^{k} \alpha_i^n = O(a^n) = o(1)$ et donc, par π-périodicité de $\sin^2$ et l'équivalent en 0 $\sin(x) \sim x$, on a

$\sin^2(\pi\theta^n) = \sin^2(O(a^n)) = O(a^{2n})$. Puisque $0 \leq a^2 < 1$, par comparaison à une série géométrique, $\boxed{\sum \sin^2(\pi\theta^n) \text{ est convergente.}}$

PARTIE II

1. On dispose de P et Q dans $\mathbf{C}[X]$, avec $Q \neq 0$ tels que $Q(z)f(z) = P(z)$ pour z dans $D(0,R)$. On pose $p = \deg(Q)$ et on écrit $Q = \sum_{k=0}^{p} \beta_{p-k} X^k$ avec $(\beta_k)_{0 \leq k \leq p} \in \mathbf{C}^{p+1}$ et $\beta_0 \neq 0$. Puisque f est développable en série entière sur $D(0,R)$ et Q l'est sur $\mathbf{C}$, puisque c'est un polynôme, le produit Qf est développable en série entière sur $D(0,R)$ et son développement est donné par le produit de Cauchy des deux développements. Par unicité de ce développement, c'est aussi celui de P et donc il est donné par une série dont les termes sont nuls à partir du rang $\deg(P)+1$. En notant $n_0 = \deg(P)+1$, il vient pour $n \geq n_0$, en considérant le coefficient de P de degré $n+p$, $\boxed{\sum_{k=0}^{p} \beta_k c_{n+k} = 0.}$

2. Avec les notations de l'énoncé, on pose $Q_1 = \sum_{k=0}^{p} \beta_{p_k} X^k$. Puisque les scalaires $(\beta_k)_{0 \leq k \leq p}$ ne sont pas tous nuls, Q_1 n'est pas le polynôme nul. Le raisonnement fait précédemment montre que $Q_1 f$ est développable en série entière sur $D(0,R)$ et l'unicité de ce développement montre que $Q_1 f$ est égal à une fonction polynomiale, de polynôme associé noté P_1, sur $D(0,R)$ d'après (0.1).
Soit alors Q_0 le polynôme divisant Q_1 dont les racines sont les racines de Q_1 appartenant à $D(0,R)$ et ayant la même multiplicité, de sorte que $Q_1 = Q_0 Q$ avec Q ne s'annulant pas sur $D(0,R)$. De l'égalité $Q_1 f = Q_0(Qf)$, avec Qf développable en série entière sur $D(0,R)$ en tant que produit de f et d'une fonction polynomiale, on déduit, par unicité du développement en série entière, $Q_0 \mid P_1$. On note $P_1 = Q_0 P$ et il vient $Qf = P$ sur $D(0,R)$.
Puisque Q ne s'annule pas sur $D(0,R)$, on en déduit pour z dans $D(0,R)$, $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ et donc $\boxed{f \text{ est une fraction rationnelle.}}$

3. On reprend les notations de II.1 et on note D_m la matrice dont Δ_m est le déterminant. Soit m supérieur à $n_0 + p$. Alors le vecteur ligne $(0, \cdots, 0, \beta_0, \cdots, \beta_p)$ de taille $m+1$, multiplié par D_m est la matrice nulle, d'après (0.1). Puisque ce vecteur ligne n'est pas nul, D_m n'est pas inversible, i.e. $\boxed{\Delta_m = 0.}$

4. On reprend la notation précédente : D_m désigne la matrice dont Δ_m est le déterminant. On note également $L_k^{(m)}$ la ligne de D_m associées à c_k, i.e. $L_k^{(m)} = (c_k, \cdots, c_{k+m})$.
   (a) Puisque $\Delta_p = 0$, on dispose de $(\beta_k)_{0 \leq k \leq p}$ dans $\mathbf{C}^{p+1}$ non tous nuls tels que la combinaison linéaire des lignes $\sum_{k=0}^{p} \beta_k L_k^{(m)}$ est nulle.
   Comme $\Delta_{p-1} \neq 0$, une telle combinaison linéaire n'existe pas entre les lignes de D_{p-1} et donc, a fortiori, entre les p premières lignes de la matrice D_p. Il en résulte $\beta_p \neq 0$ et donc, quitte à diviser par β_p, on peut le supposer égal à 1. Autrement dit, pour tout j dans $[\![0,p]\!]$, $\boxed{C_{j+p} = 0.}$

(b) Dans D_{p+1}, on ajoute à chacune des deux dernières lignes (i.e. $L_p^{(p+1)}$ et $L_{p+1}^{(p+1)}$) la combinaison linéaire des p lignes la précédant donnée par les sclaires $(\beta_k)_{0\leq k\leq p}$, i.e. on ajoute $\displaystyle\sum_{k=0} \beta_k L_k^{(p+1)}$ à $L_p^{(p+1)}$ et $\displaystyle\sum_{k=0} \beta_k L_{k+1}^{(p+1)}$ à $L_{p+1}^{(p+1)}$.

La question précédente permet de conclure que la matrice ainsi obtenue, noté D'_{p+1}, est triangulaire supérieure par blocs avec un bloc inférieur droit égal à $\begin{pmatrix} 0 & C_{2p+1} \\ C_{2p+1} & C_{2p+2} \end{pmatrix}$.

Par opération élémentaire sur les lignes, on a $\Delta_{p+1} = \det(D'_{p+1}) = \Delta_{p-1} \begin{vmatrix} 0 & C_{2p+1} \\ C_{2p+1} & C_{2p+2} \end{vmatrix}$ puisque le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants de ses blocs. Il vient donc $\boxed{\Delta_{p+1} = -\Delta_{p-1} C_{2p+1}^2.}$

(c) Pour m entier naturel, on note $(\mathbf{H}_m)$ le prédicat : $\forall j \leq m,\ C_{j+p} = 0$.

D'après II.4.(a) et (b), le prédicat est vrai pour m compris entre 0 et $p+1$.

Soit m un entier vérifiant $m \geq p+2$ et tel que $(\mathbf{H}_{m-1})$ soit vrai. On reprend la notation D_m précédente. On ajoute à chacune des $m-p+1$ dernières lignes la combinaison linéaire des p lignes la précédant donnée par les sclaires $(\beta_k)_{0\leq k\leq p}$, de la même manière que précédemment. On obtient alors

$$D_m = \left(\begin{array}{c|ccc} D_{p-1} & & (*) & \\ \hline & 0 & \cdots & C_{p+m} \\ (0) & \vdots & \iddots & * \\ & C_{p+m} & * & * \end{array}\right)$$

et donc $\Delta_m = \Delta_{p-1} \det \begin{pmatrix} 0 & \cdots & C_{p+m} \\ \vdots & \iddots & * \\ C_{p+m} & * & * \end{pmatrix}$. Puisque cette dernière matrice a tous ses termes au-dessus de l'antidiagonale nuls, son déterminant est celui associé à l'unique terme obtenu en ne prenant aucun élément de la matrice au-dessus de cette anti-diagonale. Il correspond à la permutation renversant totalement l'ordre des entiers de 1 à $m+p-1$. Cette permutation ayant donc $1+2+\cdots+(m+p-2)$ renversements d'ordres parmi les couples d'entiers, sa signature est $(-1)^{(m+p-2)(m+p-1)/2}$ et il vient

$$\Delta_m = (-1)^{(m-p-2)(m-p-1)/2} \Delta_{p-1} (C_{m+p})^{m-p+1}\ .$$

Or on a $\Delta_{p-1} \neq 0$ et $\Delta_m = 0$, il vient donc $C_{m+p} = 0$ et $\mathbf{H}_m$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on conclut : $\boxed{\forall j \in \mathbf{N},\ C_{j+p} = 0.}$

Remarque : le signe dans l'indication est faux, mais c'est sans incidence sur le problème.

(d) Il en résulte, grâce à II.2 et en posant $\beta_p = 1$, que $\boxed{f \text{ est une fraction rationnelle.}}$

5. (a) Puisque P est une série entière obtenue par produit de Cauchy de la série $\sum c_n z^n$ et de Q, les coefficients de P sont des combinaisons linéaires à coefficients dans $\mathbf{Z}$ des coefficients de $\mathbf{Z}$, par hypothèse sur $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Donc l'idéal de $\mathbf{Z}$ engendré par les coefficients de P et ceux de Q, à savoir $\mathbf{Z}$ par hypothèse, est aussi l'idéal engendré par les seuls coefficients de Q. Il en résulte que $\boxed{\text{les coefficients de } Q \text{ sont donc premiers dans leur ensemble.}}$

   (b) Puisque P et Q sont premiers entre eux, on dispose, d'après le théorème de Bézout dans $\mathbf{Q}[X]$, de U_1 et V_1 dans $\mathbf{Q}[X]$ tels que $U_1P + V_1Q = 1$. Soit alors r dans $\mathbf{Z}$, non nul, tel que U et V définis par $U = rU_1$ et $V = rV_1$ soient à coefficients entiers (par exemple, r peut être pris égal au ppcm des dénominateurs des coefficients de U_1 et de V_1). On a $r = UP + VQ$. Or, pour z dans $D(0, R)$, ceci entraîne $r = U(z)Q(z)f(z) + V(z)Q(z)$. Puisque R est non nul, par unicité du développement en série entière, on en déduit l'égalité de séries entières $\boxed{r = Q(Uf + V).}$

   (c) Par hypothèse sur f et puisque U et V sont à coefficients entiers, $Uf + V$ est une série entière à coefficients entiers, d'après la formule du produit de Cauchy et puisque $\mathbf{Z}$ est un anneau. On note alors $Uf + V = \sum r_k z^k$, avec $(r_k)_{k\in\mathbf{N}} \in \mathbf{Z}^{\mathbf{N}}$.
   Soit $X = \{x \in \mathbf{N} \mid \forall k \in \mathbf{N}, x \mid r_k\}$. Alors X contient 1 et n'est donc pas vide et est majoré par $|r|$ puisque $q_0 r_0 = r$ et donc $r_0|r$. Il en résulte que X admet un plus grand élément, noté x, et on définit, pour tout entier naturel k, l'entier relatif r'_k donné par $r'_k = r_k/x$ et on pose $r' = r/x$. Alors r' est un entier puisque $x|r_0$ et $r_0|r$.
   En posant $g = \sum r'_k z^k$, on a donc $xg = Uf + V$ et $xr' = xQg$. Puisque x est non nul, cette égalité de séries entières, entraîne $r' = Qg$.
   Soit p un nombre premier. D'après (a) on dispose de a minimal dans $\mathbf{N}$ tel que p ne divise pas q_a. Par définition de x, on dispose également de b minimal tel que p ne divise pas r'_b. On étudie alors le coefficient de degré $a + b$ de Qg et, plus spécifiquement, sa classe de congruence modulo p. D'après la formule de Cauchy, et par hypothèse sur a et b, cette classe est aussi celle de $q_a r_b$ puisque $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est un anneau et donc p ne divise pas tous les coefficients de Qg. Comme $Qg = r'$, ceci signifie que p ne divise pas r'.
   On en conclut $|r'| = 1$, puis $x = |r|$, i.e. $\boxed{r \text{ divise tous les coefficients de } Uf + V.}$

   (d) En reprenant les notations précédentes, on a $r|r_0$ et $r_0q_0 = r$, donc $\boxed{q_0 = \pm 1.}$

PARTIE III

1. (a) Par construction on a, pour n dans $\mathbf{N}$, $\sin^2(\lambda\pi\theta^n) = \sin^2(\pi\varepsilon_n)$. Comme la série à termes positifs $\sum \sin^2(\lambda\pi\theta^n)$ est convergente, d'une part son terme général tend vers 0, ce qui implique par continuité de $\sqrt{\ }$ et arcsin que $|\pi\varepsilon_n|$ tend aussi vers 0 et donc qu'on a $\sin^2(\lambda\pi\theta^n) \sim \pi^2\varepsilon_n^2$. D'autre part, puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs et qu'on a $\varepsilon_n^2 = O\left(\sin^2(\lambda\pi\theta^n)\right)$, que la série $\boxed{\sum \varepsilon_n^2 \text{ converge.}}$
   Pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a

$$\eta_n^2 = (\lambda\theta^n - \varepsilon_n - \theta(\lambda\theta^{n-1} - \varepsilon_{n-1}))^2 = (\varepsilon_n - \theta\varepsilon_{n-1})^2$$

   et donc, par inégalité de convexité entre moyenne arithmétique et moyenne quadratique, $\eta_n^2 \leq 2(\varepsilon_n^2 + \theta^2\varepsilon_{n-1}^2)$. Il résulte du résultat que l'on vient de démontrer, par stabilité par combinaison linéaire, que $\boxed{\sum \eta_n^2 \text{ converge.}}$

(b) On retranche à chaque colonne, exceptée la première, de la matrice $(a_{i+j})_{0\leq i,j\leq n}$ la colonne précédente multipliée par θ, de sorte que les colonnes sont respectivement données par $(a_0,\cdots,a_n)$, $(\eta_1,\cdots,\eta_{n+1})$, …, $(\eta_n,\cdots,\eta_{2n})$. Le lemme de Hadamard assure donc

$$\boxed{\Delta_n^2 \leq \left(\sum_{m=0}^{n} a_m^2\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\sum_{m=k}^{k+n}\eta_m^2\right).}$$

(c) D'après (a) $\varepsilon_n = o(1)$ puisque le terme général d'une série convergente tend vers 0 et puisque la fonction $\sqrt{\ }$ est continue. Par définition, on a donc $a_n = \lambda\theta^n + o(1)$ et aussi $a_n \sim \lambda\theta^n$ puisque $\theta > 1$, et donc $1 = o(\theta^n)$, et $\lambda \neq 0$. Enfin, par produit, on a également $a_n^2 \sim \lambda^2\theta^{2n}$. Comme la série géométrique $\sum \lambda^2\theta^{2n}$ diverge, par sommation des équivalents pour les séries divergentes à termes positifs, on en déduit $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} a_m^2 \sim \frac{\theta^{2n}-1}{\theta^2-1}$ et donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} a_m^2 = O(\theta^{2n})$, puis

$$\Delta_n^2 = O\left(\prod_{k=1}^{n}\left(\theta^2\sum_{m=k}^{k+n}\eta_m^2\right)\right) .$$

Pour n dans $\mathbf{N}$, on note R_n le reste d'ordre n de la série convergente $\sum \eta_m^2$, i.e. $R_n = \displaystyle\sum_{m=n}^{+\infty} a_m^2$. L'inégalité précédente entraîne donc, puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs,

$$\Delta_n^2 = O\left(\prod_{k=1}^{n}(\theta^2 R_k)\right) .$$

Si l'un des restes R_m est nul, on en déduit directement $\Delta_n = 0$ pour $n \geq m$. Sinon on considère la série $\sum \ln(\theta^2 R_n)$. D'après (a) (R_n) tend vers 0 et donc cette série diverge grossièrement vers $-\infty$. Puisque $\lim_{-\infty}\exp = 0$, il vient $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(\theta^2 R_k) = o(1)$ et donc $\Delta_n = o(1)$. Autrement dit $\boxed{\Delta_n \text{ tend vers } 0.}$

2. On a obtenu à la question précédente $a_n \sim \lambda\theta^n$. En particulier, par comparaison avec une série géométrique, $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|\theta z| < 1$ et diverge grossièrement si $|\theta z| > 1$. Puisque $\theta \neq 0$, on en conclut que le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est θ^{-1}.

   Le déterminant noté Δ_n dans cette partie coïncide alors avec celui noté pareillement et associé à f en partie II.

   Comme Δ_n est entier, puisque les coefficients a_n le sont, on a affaire à une suite d'entiers convergeant vers 0, d'après la question précédente. Elle est donc stationnaire, i.e. à partir d'un certain rang $\Delta_n = 0$.

   D'après II.4, on en conclut que $\sum a_n z^n$ est une fraction rationnelle. Enfin II.5 permet d'écrire $\sum a_n z^n = P_1(z)/Q_1(z)$, pour $|z| < \theta^{-1}$, avec P_1 et Q_1 à coefficients entiers, premiers entre eux, et tels que $|Q_1(0)| = 1$. On pose alors $P = Q(0)P_1$ et $Q = Q(0)Q_1$. Puisque $|Q_1(0)| = 1$, P et Q sont à coefficients entiers et sont encore premiers entre eux. De plus on a $Q(0) = |Q_1(0)|^2 = 1$, i.e.

$\boxed{P \text{ et } Q \text{ sont dans } \mathbf{Z}[X], \text{ sont premiers entre eux et on a } Q(0) = 1 \text{ et, pour } |z| < \theta^{-1}, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{P(z)}{Q(z)}.}$

3. Puisque $\varepsilon_n = o(1)$, on a $\varepsilon_n = O(1)$ et donc $\boxed{\sum \varepsilon_n z^n \text{ a un rayon de convergence supérieur à 1.}}$ Comme $\sum \lambda\theta^n$ a un rayon de convergence égal à θ^{-1} et qu'on a $\sum \lambda\theta^n = \sum a_n z^n + \sum \varepsilon_n z^n$, cette égalité entre série entière est une égalité entre fonctions dans leur domaine de convergence commun. En particulier, pour $|z| < \theta^{-1}$, puisque $\theta > 1$,

$$f(z) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \theta^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \frac{\lambda}{1-\theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)},$$

i.e. $\boxed{f(z) = \frac{\lambda}{1-\theta z} - \frac{P(z)}{Q(z)}.}$

4. Soit g défini par $g(z) = f(z)(1-\theta z)Q(z)$. Alors, en tant que produit de fonctions développables en série entière sur $D(0,1)$ (voire $\mathbf{C}$ pour les deux dernières), g l'est également. D'après ce qui précède, pour $|z| < \theta^{-1}$, $g(z) = \lambda Q(z) + (1-\theta z)P(z)$. Or le membre de droite est une fonction polynomiale, donc développable en série entière sur $D(0,1)$. Par unicité du développement en série entière au voisinage de 0, l'égalité $g(z) = \lambda Q(z) + (1-\theta z)P(z)$ est donc vraie sur $D(0,1)$. En particulier $0 = g(\theta^{-1}) = \lambda Q(\theta^{-1})$ et donc, puisque $\lambda \neq 0$, θ^{-1} est racine de Q. De plus si α est une racine de Q dans $D(0,1)$, alors $Q(\alpha) = g(\alpha) = 0$ et donc $(1-\theta\alpha)P(\alpha) = 0$. Or P et Q sont premiers entre eux et donc, puisque α est racine de Q, α n'est pas racine de P. Il en résulte $1 - \theta\alpha = 0$ et donc $\boxed{\theta^{-1} \text{ est l'unique racine de } Q \text{ dans } D(0,1).}$

5. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout entier naturel n et tout complexe z de module strictement inférieur à 1,

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m z^m\right| \leq \left(\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{n} |z|^m\right)^{1/2}$$

et donc, puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs

$$\left|\sum_{m=0}^{n} \varepsilon_m z^m\right| \leq \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} |z|^{2m}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{1-|z|^2}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m^2\right)^{1/2}.$$

On en déduit $|f(z)| \leq \sqrt{\frac{1}{1-|z|^2}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m^2\right)^{1/2}$ puis

$$0 \leq (1-|z|)|f(z)| \leq \sqrt{\frac{1-|z|}{1+|z|}} \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \varepsilon_m^2\right)^{1/2}$$

et donc, par le théorème d'encadrement des limites,

$\boxed{(1-|z|)f(z) \text{ tend vers 0 quand } |z| \text{ tend vers 1.}}$

Soit u dans $\mathbf{C}$ avec $|u| = 1$. On a donc, pour r dans $]\theta^{-1}, 1[$ et en reprenant les notations de la question III.4,

$$\frac{u(1-r)}{u-ru} g(ru) = (1-\theta ru)u(1-r)f(ru)\frac{Q(ru)}{u-ru} = \lambda Q(ru) - (1-\theta ru)P(ru) \ .$$

Pour r tendant vers 1, on a donc, en utilisant ce qui précède et la continuité des fonctions polynomiales, $P(u) = \lambda \dfrac{Q(u)}{1-\theta u} + o\left(\dfrac{Q(ru)}{ru-u}\right)$. Par conséquent, si Q s'annule en u, on a $\dfrac{Q(ru)}{ru-u} = \dfrac{Q(ru)-Q(u)}{ru-u} = Q'(u) + o(1)$, en notant Q' la fonction polynomiale associé au polynôme dérivé Q', et donc $P(u) = 0 + o(Q'(u)) = o(1)$, i.e. $P(u) = 0$. Comme P et Q sont premiers entre eux, ils ne peuvent avoir de racine commune et donc

$\boxed{\theta^{-1} \text{ est l'unique racine de } Q \text{ dans le disque unité fermé.}}$

6. On écrit $Q = 1 + q_1 X + \cdots + q_n X^n$ avec $q_n \neq 0$ et on pose $\Pi = X^n + q_1 X^{n-1} + \cdots + q_n$. Alors Π est un polynôme unitaire de $\mathbf{Z}[X]$ et, pour tout z dans $\mathbf{C}^*$, $\Pi(z) = z^n Q(z^{-1})$. D'après la question précédente θ est donc la seule racine de Π n'appartenant pas à $D(0,1)$.
   D'après I.1, on a $\Pi_\theta | \Pi$ et donc Π_θ n'a pas de racine en dehors de $D(0,1)$ à part θ, i.e. par définition $\boxed{\theta \text{ est un nombre de Pisot.}}$

PARTIE IV

1. Soit u dans $\mathbf{R}_+^*$. Comme $\theta > 1$, on a $u\theta^{-k} = o(1)$ et donc $\cos(u\theta^{-k}) = 1 + O(\theta^{-2k}) = 1 + o(1)$. À partir d'un certain rang n cette quantité est donc positive et alors $\ln\Big(\cos(u\theta^{-k})\Big) = O(\theta^{-2k})$. Par comparaison à une série géométrique, on en déduit que la série, définie à partir d'un certain rang n, $\sum \ln\Big(\cos(u\theta^{-k})\Big)$ est convergente. Par continuité de l'exponentielle, le produit $\prod_{k=n}^{N} \cos(u\theta^{-k})$ admet une limite quand N tend vers l'infini. Par linéarité, on en déduit qu'il en va de même pour $\prod_{k=0}^{N} \cos(u\theta^{-k})$, i.e. $\boxed{\Gamma \text{ est bien défini sur } \mathbf{R}_+^*.}$
2. Soit u dans $\mathbf{R}_+^*$. Une récurrence immédiate donne, pour tout entier naturel n,

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(u\theta^{-k}) = \frac{\sin(2u)}{2^{n+1}\sin(2^{-n}u)}$$

   et donc, puisque $\sin(x) \sim x$ en 0 et qu'on a $2^{-n}u = o(1)$, $\boxed{\Gamma(u) = \dfrac{\sin(2u)}{2u}.}$
3. (a) Pour m entier naturel, on note I_m l'intervalle $[\pi\theta^m, \pi\theta^{m+1}[$. Par hypothèse sur Γ, on dispose de δ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $|\Gamma|$ prenne des valeurs supérieures à δ dans un ensemble non majoré de $\mathbf{R}$ et donc dans une infinité d'intervalles I_m.
   On dipose donc d'une suite strictement croissante d'entiers $(m_s)_{s\in\mathbf{N}}$ telle que $|\Gamma|$ prenne des valeurs supérieures à δ dans l'intervalle I_s. Autrement dit on dispose également d'une suite $(\lambda_s)_{s\in\mathbf{N}}$ de réels dans $[1, \theta[$ telle que $|\Gamma(\pi\lambda_s\theta^{m_s})| \geq \delta$.

Comme $[1, \theta]$ est compact, qui à extraire des sous-suites, on peut supposer la suite $(\lambda_s)_{s \in \mathbf{N}}$ convergente, et alors on aura $\delta > 0$, $(\lambda_s)_{s \in \mathbf{N}}$ suite réelle convergente, $(m_s)_{s \in \mathbf{N}}$ suite strictement croissante d'entiers tels que $\boxed{\forall s \in \mathbf{N},\ 1 \leq \lambda_s < \theta \text{ et } |\Gamma(\pi\lambda\theta^{m_s})| \geq \delta.}$

(b) Puisque cos est borné en valeur absolue par 1, on a, pour tout entier n vérifiant $n \geq m_s$,

$$\left|\prod_{k=0}^{n} \cos(u\theta^{-k})\right| \leq \prod_{k=0}^{m_s} \left|\cos(u\theta^{-k})\right| = |\cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\ldots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})|$$

et donc, en passant à la limite en n, $\boxed{|\Gamma(u_s)| \leq |\cos(\pi\lambda_s)\cos(\pi\lambda_s\theta)\ldots\cos(\pi\lambda_s\theta^{m_s})|.}$

Par concavité du logarithme, on a $\ln(1+x) \leq x$ pour x dans $]-1, +\infty[$ et donc aussi $\ln(1-x^2) \leq -x^2$ pour $|x| < 1$. De plus par croissance du logarithme il vient

$$\ln(\delta^2) \leq \ln(|\Gamma(u_s)|^2) \leq \ln\left(\prod_{k=0}^{m_s} \left|\cos(u\theta^{-k})\right|^2\right)$$

et en particulier tous les logarithmes sont bien définis et, par concavité,

$$\ln(\delta^2) \leq \sum_{k=0}^{m_s} \ln\left(1 - \sin^2(u\theta^{-k})\right) \leq -\sum_{k=0}^{m_s} \sin^2(u\theta^{-k}),$$

soit $\boxed{\sum_{k=0}^{m_s} \sin^2(u\theta^{-k}) \leq \ln(1/\delta^2).}$

(c) Puisqu'on a affaire à des séries à termes positifs, pour tout entier naturel m, on dispose d'un entier naturel s tel que $m \leq m_s$ et donc

$$\sum_{k=0}^{m} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^k) \leq \sum_{k=0}^{m_s} \sin^2(\pi\lambda_s\theta^k \leq \ln(1/\delta^2)$$

et aussi, par continuité de sin et convergence de (λ_s),

$$\sum_{k=0}^{m} \sin^2(\pi\lambda\theta^k) \leq \ln(1/\delta^2),$$

i.e. la série à termes positifs $\sum \sin^2(\pi\lambda\theta^k)$ est majorée. Elle est donc convergente et on déduit, puisque $\lambda \geq 1 > 0$, d'après la partie III que $\boxed{\theta \text{ est un nombre de Pisot.}}$

4. (a) Soit k et m dans $\mathbf{N}$ avec $m \neq 0$. Les polynômes $2X^m - (2k+1)$ et $(2k+1)X^m - 2$ sont à coefficients entiers est ont des racines de même module. Si un nombre de Pisot θ en est racine c'est donc que Π_θ est de degré 1, i.e. que θ est un rationnel. On écrit alors $\theta = p/q$ avec p et q entiers premiers entre eux, q dans $\mathbf{N}^*$. Il vient donc $2p^m = (2k+1)q^m$ ou $2q^m = (2k+1)p^m$. En considérant la valuation 2-adique, il vient alors $m = 1$ et donc Π_θ est un diviseur de $2X - (2k+1)$ ou de $(2k+1)X - 2$, i.e. $\Pi_\theta = X - \dfrac{2k+1}{2}$ ou $\Pi_\theta = X - \dfrac{2}{2k+1}$. Puisque Π_θ est dans $\mathbf{Z}[X]$, il vient $\Pi_\theta = X - 2$ et $\theta = 2$. Cette contradiction assure $\boxed{\forall m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\},\ \forall k \in \mathbf{N}\ \theta^m \neq \dfrac{2k+1}{2}.}$

(b) D'après (a), $\cos^2(\pi\theta^{-m})$ ne s'annule jamais et, puisque $\theta^{-m} = o(1)$, il vient

$$\ln\left(\cos^2(\pi\theta^{-m})\right) \sim -\sin^2(\pi\theta^{-m}) \sim -\pi^2\theta^{-2m} \ .$$

Par comparaison à une série géométrique convergente, la série $\sum \ln\left(\cos^2(\pi\theta^{-m})\right)$ converge et donc, par composition avec l'exponentielle, qui est continue,

$$\boxed{\prod_{m=1}^{n} \cos^2(\pi\theta^{-m}) \text{ converge vers un réel strictement positif.}}$$

(c) Puisque θ est un nombre de Pisot, d'après (a), $\cos^2(\pi\theta^{-m})$ ne s'annule jamais et de plus $\sin^2(\pi\theta^m)$ tend vers 0 et donc $\cos^2(\pi\theta^m)$ tend vers 1. Il vient donc

$$\ln\left(\cos^2(\pi\theta^m)\right) \sim -\sin^2(\pi\theta^m)$$

et donc par comparaison entre série à termes de signe constant et puisque θ est un nombre de Pisot, $\sum \ln\left(\cos^2(\pi\theta^m)\right)$ converge et donc, par composition avec l'exponentielle, qui est continue, $\boxed{\displaystyle\prod_{m=1}^{n} \cos^2(\pi\theta^m) \text{ converge vers un réel strictement positif.}}$

(d) Par définition, pour tout entier m dans $\mathbf{N}$, on a $|\Gamma(\pi\theta^m)|^2 = A\prod_{k=1}^{m}\cos^2(\pi\theta^k)$ et donc, d'après ce qui précède, $|\Gamma(\pi\theta^m)|$ tend vers AB lorsque m tend vers l'infini. Or, sous ces conditions, $\pi\theta^m$ tend aussi vers $+\infty$ et donc, puisque $AB > 0$, ceci entraîne que $\boxed{\Gamma \text{ ne tend pas vers 0 en } +\infty.}$