ENS 2004 – MP – Lyon–Cachan

On note $\mathbf{S}^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$, le cercle unité de $\mathbf{C}$.
Soit d un entier supérieur à 1. On identifie $\mathbf{C}^d$ à $\mathscr{M}_{d,1}(\mathbf{C})$ et on le munit de la norme euclidienne canonique en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel, i.e. si $x = (x_1, \ldots, x_d)$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{d} |x_k|^2$. Matriciellement si X est un vecteur colonne, on pose $X^* = {}^{t}\overline{X}$ et on a $\|X\|^2 = X^*X$. D'une façon générale si X et Y sont dans $\mathbf{C}^d$ on pose $\langle X \mid Y \rangle = X^*Y$ de sorte qu'on a $\|X\|^2 = \langle X \mid X \rangle$.
On note $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$ l'espace des matrices $d \times d$ à coefficients dans $\mathbf{C}$. On le de la norme euclidienne canonique en tant que $\mathbf{R}$-espace vectoriel, i.e. en notant comme précédemment $A^* = {}^{t}\overline{A}$ mais pour A dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$, alors $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(A^*A)$. Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq d}$, on a donc $\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{d} |a_{ij}|^2$.
Une matrice de $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$ est dite **unitaire** si $U^*U = UU^* = I$, où I est la matrice identité de $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$. Autrement dit si U est inversible d'inverse U^*.
Une **conjugaison unitaire** est un automorphisme intérieur associé à une matrice unitaire, i.e. une application φ de $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$ dans lui-même de la forme $A \mapsto U^*AU$ avec U unitaire. Une telle matrice U est dite associée à φ.
On appelle **groupe d'Arveson** une famille $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ de telles conjugaisons unitaires qui est un groupe continu à un paramètre, i.e.

- $\varphi_0 = \mathrm{Id}$
- pour t et s réels, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$
- pour tout A dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$, $t \mapsto \varphi_t(A)$ est une application continue de $\mathbf{R}$ dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$

Si T est un sous-groupe de $\mathbf{R}$, on appelle **groupe unitaire** (indexé par T), toute famille $(V_t)_{t \in T}$ de matrices unitaires telle que

- $V_0 = I$
- pour t et s dans T, $V_tV_s = V_{t+s}$.

On dit que $(V_t)_{t \in T}$ est **continu** (sur T) si de plus l'application de T dans l'ensemble des matrices unitaires (vu comme partie de $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$) donnée par $t \mapsto V_t$ est continue, i.e.

$$\forall t \in T\,,\ \forall \varepsilon > 0\,,\ \exists \delta > 0\,,\ \forall s \in T \qquad |s - t| < \delta \Longrightarrow \|V_s - V_t\| < \varepsilon\ .$$

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant.
Théorème d'Arveson en dimension finie – Pour tout groupe d'Arveson $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$, il existe un groupe unitaire continu $(V_t)_{t \in \mathbf{R}}$ tel que, pour tout t réel, V_t soit associé à φ_t.

PARTIE I - Cocycles

I.1. a) Montrer que deux matrices unitaires sont associées à une même conjugaison φ si et seulement si $U = \lambda V$ pour un λ dans $\mathbf{S}^1$.

b) Soit $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ un groupe d'Arveson. Montrer qu'il existe $(U_t)_{t \in \mathbf{R}}$ des matrices unitaires et α une application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{S}^1$ tels que, pour tous s et t réels, U_t soit associée à φ_t et on ait $U_{t+s} = \alpha(t,s)U_tU_s$ ainsi que les relations

$$\alpha(0,t) = \alpha(t,0) = 1$$

$$\alpha(t,s)\alpha(t+s,u) = \alpha(t,s+u)\alpha(s,u)\ .$$

Une fonction α comme ci-dessus est appelée cocycle.

I.2. On considère un cocycle quelconque α et on note $\tilde{\alpha}$ sa restriction à $\mathbf{N}^2$. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ détermine $\tilde{\alpha}$ si

$$\forall (m,n) \in \mathbf{N}^2 \qquad \tilde{\alpha}(m,n) = \frac{u_m u_n}{u_{m+n}} \,.$$

a) Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ déterminent toutes les deux $\tilde{\alpha}$ alors il existe a dans $\mathbf{S}^1$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a^n v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

b) Montrer que $\tilde{\alpha}$ est entièrement déterminé par sa restriction à $\{1\} \times \mathbf{N}$.

c) En déduire qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ déterminant $\tilde{\alpha}$.

I.3. a) Montrer qu'il existe des suites $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}}$ pour n dans $\mathbf{N}$ telles que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $u_2^{(n+1)} = u_1^{(n)}$ et $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}}$ détermine $\tilde{\alpha}_n$ donné par $\tilde{\alpha}_n(k,\ell) = \alpha(k2^{-n}, \ell 2^{-n})$.

b) En déduire, pour k et n dans $\mathbf{N}$, $u_{2k}^{(n+1)} = u_k^{(n)}$.

c) Soit D_+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs, i.e. $D_+ = \{k2^{-n} \mid (k,n) \in \mathbf{N}^2\}$. On peut remarquer sans démonstration que D_+ est stable par addition. Soit α un cocycle. Montrer qu'il existe une application $t \mapsto u_t$ de D_+ dans $\mathbf{S}^1$ vérifiant, pour s et t dans D_+, $\alpha(t,s) = \dfrac{u_t u_s}{u_{t+s}}$.

I.4. Montrer que la famille $(V_t)_{t\in D_+}$ définie par $V_t = u_t U_t$ est un **semi-groupe**, i.e. pour s et t dans D_+, on a $V_s V_t = V_{s+t}$.

I.5. Soit D le sous-groupe de $\mathbf{R}$ formé des nombres dyadiques, i.e. $D = \{k2^{-n} \mid k \in \mathbf{Z}\,,\ n \in \mathbf{N}\}$. Il n'est pas demandé de vérifier que c'est un groupe. Montrer qu'il existe un groupe unitaire $(V_t)_{t\in D}$ tel que, pour t dans D et A dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$, on ait $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$.

I.6. Montrer que si le groupe $(V_t)_{t\in D}$ obtenu ci-dessus est continu alors le théorème d'Arveson est démontré.

Indication : on pourra démontrer que $t \mapsto V_t$ est uniformément continue et à valeurs dans un compact.

On va s'attacher dans la suite à obtenir cette continuité.

PARTIE II - Continuité

On se donne maintenant un semi-groupe quelconque de matrices unitaires $(V_t)_{t\in D_+}$ tel que, pour t dans D_+ et A dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$, on ait $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$. (Voir I.4 pour la définition de semi-groupe.) Dans ce qui suit les limites portant sur t s'entendent pour t dans D_+.

II.1. Déduire de la propriété de continuité de $(\varphi_s)_{s\in\mathbf{R}}$ que, pour tout Ψ dans $\mathbf{C}^d$ de norme 1, on a $\lim\limits_{t\to 0} |\langle \Psi \mid V_t \Psi\rangle|^2 = 1$.

II.2. En déduire que, pour Ψ dans $\mathbf{C}^d$ de norme 1, on a $V_t\Psi = e^{i\theta_t}\Psi + o(1)$ pour t au voisinage de 0 dans D_+.

II.3. Soit Ψ et Ψ' deux vecteurs de $\mathbf{C}^d$ de norme 1. On pose, pour t dans D_+, $a_t = \langle \Psi \mid V_t \Psi\rangle$ et $b_t = \langle \Psi' \mid V_t \Psi'\rangle$. Montrer $a_t \sim b_t$ au voisinage de 0 dans D_+.

II.4. En déduire que s'il existe un vecteur non nul Ψ dans $\mathbf{C}^d$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} V_t\Psi = \Psi$, alors cette propriété est vraie pour tout Ψ dans $\mathbf{C}^d$.

Le but est de démontrer qu'on peut modifier $(V_t)_{t\in D_+}$ afin qu'un tel Ψ existe.

PARTIE III - Familles presque multiplicatives

Une famille $(a_t)_{t\in D_+}$ de nombres complexes est dite multiplicative si elle est à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ et si, pour tous s et t dans D_+, $a_t a_s = a_{t+s}$. Elle est dite presque multiplicative si $a_0 = 1$, $\lim\limits_{t\to 0} |a_t| = 1$ et

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{a_{t+s}}{a_t a_s} = 1\ .$$

III.1. Montrer que, pour Ψ dans $\mathbf{C}^d$ de norme 1, la famille $(a_t)_{t\in D_+}$ définie par $a_t = \langle \Psi \mid V_t \Psi\rangle$, est presque multiplicative.

III.2. a) Soit $(a_t)_{t\in D_+}$ une famille presque multiplicative. Montrer que la famille $\left(\dfrac{a_t}{|a_t|}\right)_{t\in D_+}$ est encore presque multiplicative.

On suppose dans la suite que $(a_t)_{t\in D_+}$ est à valeurs dans $\mathbf{S}^1$.

b) On construit une suite $(\beta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par récurrence en posant $\beta_0 = a_1$ et en prenant, pour n dans $\mathbf{N}$, β_{n+1} la racine carrée complexe de β_n la plus proche (au sens de la distance euclidienne dans le plan) de $a_{2^{-(n+1)}}$ ou, en cas d'égalité de distance, n'importe laquelle des deux racines carrées. Montrer qu'on définit une famille en posant $b_t = \beta_n^k$ lorsque $t \in D_+$ et $t = k2^{-n}$ pour k et n dans $\mathbf{N}$. Puis montrer que la famille $(b_t)_{t\in D_+}$ est multiplicative.

c) Montrer $\lim \dfrac{a_{2^{-n}}}{b_{2^{-n}}} = 1$.

Indication : noter c_n le rapport précédent et montrer $\mathrm{Re}(c_n) \geq 0$ et $c_n \sim c_{n+1}^2$.

III.3. Soit $(a_t)_{t\in D_+}$ une famille presque multiplicative avec $\lim a_{2^{-n}} = 1$. On veut montrer l'inégalité suivante pour n assez grand :

$$\sup_{t\in[0;2^{-n}]\cap D_+} d(a_t,1) \leq \frac{1}{2} d(a_{2^{1-n}},1) + 2 \sup_{(s,t)\in([0;2^{1-n}]\cap D_+)^2} d(a_{t+s}, a_t a_s) \tag{1}$$

où d est la distance définie sur $\mathbf{S}^1$ par $d(z,z') = |\mathrm{Arg}(z'/z)|$, l'argument étant l'argument principal, i.e. choisi dans $]-\pi;\pi]$ (on ne demande pas de vérifier que c'est une distance). Dans la suite on choisit un entier N tel que le membre de droite de l'équation (1) soit majoré par $\pi/10$ pour $n \geq N$. On suppose, pour simplifier, qu'on a $N = 1$.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas $a_1 = 1$ et à montrer seulement

$$\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(a_t,1) \leq 2 \sup_{(s,t)\in([0;1]\cap D_+)^2} d(a_{t+s}, a_t a_s)\ .$$

b) Soit $\varepsilon = \sup_{(s,t)\in([0;1]\cap D_+)^2} d(a_{t+s}, a_t a_s)$ et supposons $\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(a_t,1) > 2\varepsilon$. Montrer que l'ensemble $\left\{n\in\mathbf{N} \mid \exists k \in [\![0;2^{n-1}]\!]\ \ d(a_{k2^{-n}},1) > 2\varepsilon\right\}$ admet un minimum.

On note n_0 ce minimum et $k_0 = \min\left\{k \in [\![0;2^{n_0-1}]\!] \mid d(a_{k2^{-n_0}},1) > 2\varepsilon\right\}$. Pour t dans D_+, on note $\theta_t = \mathrm{Arg}(a_t)$. On rappelle qu'on a $\theta_t \in\ ]-\pi;\pi]$. Supposons pour fixer les idées $\theta_{k_0 2^{-n_0}} > 0$.

c) Montrer $\theta_{k_0 2^{-n_0}} > 2\varepsilon$ et, pour $0 \leq j < k_0$, $\left|\theta_{j2^{-n_0}}\right| \leq 2\varepsilon$.

d) Montrer $\theta_{k_0 2^{1-n_0}} > 3\varepsilon$.

e) Montrer $k_0 2^{-n_0} \in \left]\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$.

f) En distinguant selon les deux cas $k_0 2^{1-n_0} \leq 1 < 3k_0 2^{-n_0}$ et $3k_0 2^{-n_0} \leq 1 < k_0 2^{2-n_0}$, montrer qu'on a soit $\theta_1 > 0$, soit $\theta_{3k_0 2^{-n_0}} > 4\varepsilon$. En déduire une contradiction puis la validité de (1).

g) En déduire que, pour toute famille presque multiplicative $(a_t)_{t\in D_+}$, il existe une famille multiplicative $(b_t)_{t\in D_+}$ vérifiant $a_t \sim b_t$ au voisinage de 0.

III.4. Terminer la démonstration du théorème d'Arveson.

ENS 2004 – MP – Lyon–Cachan

PARTIE I - Cocycles

I.1. a) Soit G le groupe $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$. L'application de G dans le groupe des automorphismes de $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$ qui à g associe l'automorphisme intérieur $M \mapsto g^{-1}Mg$ est un morphisme de groupes de noyau le centre de G. Il en résulte que si U et V sont unitaires et de même conjugaison unitaire associée, alors UV^{-1} est dans le centre de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$, à savoir l'ensemble des matrices scalaires inversibles. On dispose alors de λ dans $\mathbf{C}^*$ tel que $U = \lambda V$. Comme U et V sont unitaires, il vient $I = U^*U = |\lambda|^2 V^*V = |\lambda|^2 I$ et donc λ est de module 1. Réciproquement si λ est de module 1 et V unitaire, le même calcul fournit que U est unitaire, donc $\boxed{U = \lambda V \text{ pour un } \lambda \text{ dans } \mathbf{S}^1.}$

b) Par définition d'un groupe d'Arveson on dispose de $(U_t)_{t\in\mathbf{R}^*}$ des matrices unitaires telles que φ_t soit associé à U_t pour tout t réel non nul. Comme $\varphi_0 = \mathrm{Id}$, φ_0 est associé à I et on peut pose $U_0 = I$. Soit s et t des réels. Puisque l'application $g \mapsto (M \mapsto g^{-1}Mg)$ est un morphisme de $\mathrm{GL}_d(\mathbf{C})$ dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{M}_d(\mathbf{C}))$, U_tU_s est associé à $\varphi_t\varphi_s$ et donc aussi à φ_{t+s} par définition des groupes d'Arveson. Les matrices U_tU_s et U_{t+s} sont donc associées à la même conjugaison unitaire et en utilisant la question précédente on dispose d'un scalaire de module 1, $\alpha(t,s)$ tel que $U_{t+s} = \alpha(t,s)U_tU_s$. Puisqu'on a $U_0 = I$, il vient $U_t = \alpha(t,0)U_t$ et $U_t = \alpha(0,t)U_t$ et donc, puisque U_t est inversible donc non nulle, $\alpha(t,0) = \alpha(0,t) = 1$. Enfin, pour u réel, on a

$$U_{t+s+u} = \alpha(t+s,u)U_{t+s}U_u = \alpha(t,s)\alpha(t+s,u)U_tU_sU_u$$

et

$$U_{t+s+u} = \alpha(t,s+u)U_tU_{s+u} = \alpha(t,s+u)\alpha(s,u)U_tU_sU_u$$

et donc, puisqu'on a affaire à des matrices inversibles $\alpha(t,s)\alpha(t+s,u) = \alpha(t,s+u)\alpha(s,u)$. Par conséquent $\boxed{U_t \text{ est associé à } \varphi_t \text{ et } \alpha \text{ est un cocycle.}}$

I.2. a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites déterminant toutes les deux $\tilde{\alpha}$. Ces suites ne s'annulant jamais, puisqu'à valeurs dans $\mathbf{S}^1$, on peut considérer le quotient $w = u/v$. Puisque ces suites déterminent $\tilde{\alpha}$, w est un homomorphisme du groupe additif $\mathbf{Z}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{S}^1$. Comme $\mathbf{Z}$ est monogène $\mathrm{Hom}(\mathbf{Z},\mathbf{S}^1) \simeq \mathbf{S}^1$, l'isomorphisme étant donné par l'image de 1 et un tel morphisme étant de la forme $n \mapsto a^n$ avec a dans $\mathbf{S}^1$. Autrement dit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} = (a^n v_n)_{n\in\mathbf{N}}.}$

b) Soit α et β deux cocycles dont les restrictions à $\{1\} \times \mathbf{N}$ coïncident. Supposons par l'absurde que leurs restrictions à $\mathbf{N}^2$ soient différentes. L'ensemble des entiers n tels que $\{m \in \mathbf{N} \,|\, \alpha(n,m) \neq \beta(n,m)\}$ soit non vide est alors une partie non vide de $\mathbf{N}$. On en prend le minimum, noté a. Puisque les restrictions à $\{0\} \times \mathbf{N}$ de α et β sont constantes égales à 1 et qu'elles coïncident sur $\{1\} \times \mathbf{N}$, on a $a \geq 2$. En spécialisant la relation de cocycle à $t = a-1$, $s = 1$ et $u = m$ avec m dans $\mathbf{N}$, il vient $\alpha(a,m)\alpha(a-1,1) = \alpha(a-1,m+1)\alpha(1,m)$ et donc, puisque α ne s'annule pas,

$$\alpha(a,m) = \frac{\alpha(a-1,m+1)\alpha(1,m)}{\alpha(a-1,1)} = \frac{\beta(a-1,m+1)\beta(1,m)}{\beta(a-1,1)} = \beta(a,m)$$

puisque α et β coïncident sur $\{1\} \times \mathbf{N}$ et $\{a-1\} \times \mathbf{N}$. Cette contradiction assure que $\boxed{\tilde{\alpha} \text{ est entièrement déterminé par sa restriction à } \{1\} \times \mathbf{N}.}$

c) On définit par récurrence une suite en posant $u_0 = u_1 = 1$ et, pour $n \geq 2$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\alpha(1,n)}$. On pose également $u_n = 1$ pour n entier négatif et, pour t réel, $u_t = u_{[t]}$. Alors $(u_t)_{t\in\mathbf{R}}$ est à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ puisque ce dernier est un groupe multiplicatif. Enfin on pose, pour t et s réels, $\beta(t,s) = \dfrac{u_t u_s}{u_{t+s}}$. Alors β est également à valeurs dans $\mathbf{S}^1$ et pour t, s et v réels $\beta(t,0) = \beta(0,t) = 1$ puisqu'on a $u_0 = 1$, et

$$\beta(t,s)\beta(t+s,v) = \frac{u_t u_s u_v}{u_{t+s+v}} = \beta(t,s+v)\beta(s,v)$$

et donc β est un cocycle. Sa restriction à $\{1\} \times \mathbf{N}$ vérifie, pour n dans $\mathbf{N}$, $\beta(1,n) = \dfrac{u_n u_1}{u_{n+1}} = \alpha(1,n)$ par définition de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et puisqu'on a $u_1 = 1$. D'après la question précédente β et α coïncident sur $\mathbf{N}^2$, i.e. pour n et m dans $\mathbf{N}^2$, $\alpha(n,m) = \beta(n,m) = \dfrac{u_m u_n}{u_{n+m}}$ et donc $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ détermine } \tilde{\alpha}.}$

I.3. a) Pour n dans $\mathbf{N}$, et t et s réels, on pose $\alpha_n(t,s) = \alpha(2^{-n}t, 2^{-n}s)$. Par linéarité de la multiplication par 2^{-n}, α_n est un cocycle puisque α en est un et, en utilisant la question précédente on dispose de suites $(v_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}}$ déterminant $\tilde{\alpha_n}$. La construction donnée dans cette question fournit également $v_2^{(n)} = \dfrac{1}{\alpha_n(1,1)} = \dfrac{1}{\alpha(2^{-n},2^{-n})}$.

On vérifie également la réciproque de la question I.2.a), à savoir que si a est un élément de $\mathbf{S}^1$ et si (u_n) détermine $\tilde{\alpha}$, alors il en va de même pour $(a^n u_n)$ puisque $n \mapsto a^n$ est un morphisme de $\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{S}^1$. Il en résulte que si on dispose d'une suite déterminant $\tilde{\alpha_n}$, on peut en trouver une autre ayant une valeur fixée de u_2 (et même deux) puisque l'équation $a^2 u_2 = z$, pour z et u_2 fixés dans $\mathbf{S}^1$ admet deux solutions en a avec a dans $\mathbf{S}^1$.

Concrètement on pose $(u_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}} = (a_n^k v_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}}$ avec (a_n) une suite d'éléments de $\mathbf{S}^1$ vérifiant $a_0 = 1$ et $a_{n+1}^2 = a_n \alpha(2^{-n-1}, 2^{-n-1})$. Cette construction est possible puisque α est à valeurs dans $\mathbf{S}^1$, que ce dernier est un groupe et que tout élément de $\mathbf{S}^1$ admet au moins une (en fait deux) racines carrées dans $\mathbf{S}^1$. De plus, par construction, $\boxed{u_2^{(n+1)} = u_1^{(n)} \text{ et } (u_k^{(n)})_{k\in\mathbf{N}} \text{ détermine } \tilde{\alpha}_n.}$

b) Soit n, k et ℓ dans $\mathbf{N}$. On a $\alpha_n(k,\ell) = \alpha_{(n+1)}(2k, 2\ell)$ par définition et donc la suite $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ définie par $v_k = \dfrac{u_{2k}^{n+1}}{u_k^{(n)}}$ vérifie $v_{k+\ell} = v_k v_\ell$. C'est donc une suite géométrique en tant que morphisme de magmas entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{S}^1$. Puisque $v_0 = v_1 = 1$, c'est une suite constante égale à 1, i.e. $\boxed{u_{2k}^{(n+1)} = u_k^{(n)}.}$

c) La question précédente fournit par récurrence immédiate, pour n, k et ℓ dans $\mathbf{N}$, $u_{2^\ell k}^{(n+\ell)} = u_k^{(n)}$. Soit alors t dans D_+. On dispose de k et n dans $\mathbf{N}$ tels que $t = k2^{-n}$, avec n minimal pour cette propriété. On pose alors $u_t = u_k^{(n)}$ où les suites $(u_k^{(n)})$ sont celles associées à α par la question précédente. La propriété dégagée précédemment montre que si $t = \ell 2^{-m}$ pour ℓ et m entiers, alors $m \geq n$, $\ell = k2^{m-n}$ et $u_k^{(n)} = u_\ell^{(m)}$ Autrement dit $u_t = u_\ell^{(m)}$ pour tout couple d'entiers (ℓ, m) vérifiant $t = \ell 2^{-m}$.

Soit maintenant t et s dans D_+. On dispose pour t et s d'une puissance de 2 telle qu'en la multipliant par t ou s, on obtienne un nombre entier. Quitte à prendre la plus grande de ces deux puissances, on peut la choisir identique pour t et s, i.e. on dispose de k, ℓ et n entiers tels que $t = k2^{-n}$ et $s = \ell 2^{-n}$. On a alors $t+s = (k+\ell)2^{-n}$ et il vient

$$\frac{u_t u_s}{u_{t+s}} = \frac{u_k^{(n)} u_\ell^{(n)}}{u_{k+\ell}^{(n)}} = \alpha_n(k,\ell) = \alpha(t,s)$$

et donc, par construction, $t \mapsto u_t$ est une application de D_+ dans $\mathbf{S}^1$ vérifiant $\boxed{\alpha(t,s) = \dfrac{u_t u_s}{u_{t+s}}}$.

I.4. Soit t et s dans D_+. On a, d'après ce qui précède et en utilisant la propriété de α,

$$V_t V_s = u_t U_t u_s U_s = u_{t+s}\alpha(t,s) U_t U_s = u_{t+s} U_{s+t}$$

et donc $\boxed{(V_t)_{t\in D_+} \text{ est un semi-groupe.}}$

I.5. Pour t dans D négatif, on pose $V_t = V_{-t}^{-1}$, ce qui licite puisqu'une matrice unitaire est inversible. De plus l'inverse d'une matrice unitaire l'est aussi puisque la transposition et la conjugaison sont des involutions. Alors la famille $(V_t)_{t\in D}$ est un groupe unitaire puisque d'une part $V_0 = I$ car $U_0 = I$ et $u_0 = 1$ et d'autre part pour t et s dans D l'identité $V_t V_s = V_{t+s}$ peut s'écrire avec trois quantités positives en indice. Plus précisément si t et s sont tous deux positifs, $V_t V_s = V_{t+s}$ résulte de la propriété de semi-groupe. Si t et s sont tous deux négatifs, alors $t+s$ aussi et on a, par inversibilité des matrices unitaires, $V_t V_s = V_{t+s} \iff V_{-s} V_{-t} = V_{-t-s}$, et cette dernière propriété résulte de la propriété de semi-groupe. Si t et s sont de signe opposé, alors l'un des deux est du signe de $t+s$ et quitte à multiplier par l'inverse de la matrice dont le signe n'apparait qu'une seule fois, on se ramène au cas où les trois termes sont de même signe soit via $V_s = V_{-t} V_{t+s}$, soit via $V_t = V_{t+s} V_{-s}$.

Par construction V_t est associé à φ_t pour t dans D_+. Par propriété des groupes d'Arveson, pour t dans D négatif on a $\varphi_t = \varphi_{-t}^{-1}$ puisque $\varphi_t \varphi_{-t} = \varphi_0 = \mathrm{Id}$. Et par propriété de morphisme des automorphismes intérieurs l'inverse de l'automorphisme associé à V_t est celui associé à V_t^{-1}. Il en résulte que, pour tout t dans D, $\boxed{\varphi_t \text{ est associé à } V_t.}$

I.6. Puisque les matrices unitaires vérifient $U^* U = I$, en particulier elles sont de norme $\sqrt{d}$. Comme $M \mapsto M^*$ est une application 1-lipschitzienne, elle est continue, tout comme $(M,N) \mapsto MN$ et donc l'ensemble des matrices unitaires est l'image réciproque du fermé $\{I\}$ par une application continue et est donc fermé. Comme $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(V_t)_{t\in D}$ est donc à valeurs dans un compact.

L'application bilinéaire $(M,N) \mapsto MN$ étant continue, on dispose d'une constante réelle positive m telle que, pour M et N dans $\mathscr{M}_d(\mathbf{C})$, on ait $\|MN\| \le m \|M\| \|N\|$. On en déduit, pour t et s dans D et puisque les matrices unitaires sont de norme $\sqrt{d}$,

$$\|V_t - V_s\| = \|(V_{t-s} - I)V_s\| \le m\sqrt{d}\, \|V_{t-s} - I\|$$

et donc si $t \mapsto V_t$ est continu sur D, il l'est en particulier en 0 et l'inégalité précédente montre la continuité uniforme sur D.

On démontre maintenant qu'une fonction f d'une partie A de $\mathbf{R}$ à valeurs dans une partie compacte d'un espace vectoriel normé et uniformément continue admet un unique prolongement par continuité à $\overline{A}$ (et ce prolongement est en fait uniformément continu).

Soit donc a dans $\overline{a}$ et $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $A^{\mathbf{N}}$ tels que $\lim a_n = a$. Pour ε dans $\mathbf{R}_+^*$, par uniforme continuité de f, on dispose de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour x et y dans A vérifiant $|x-y|<\eta$, on ait $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$. Or, par définition de la limite, on dispose de N dans $\mathbf{N}$ tel que, pour $n\geq N$, $|a_n-a|<\frac{1}{2}\eta$. Et donc pour p et q supérieurs à N, par inégalité triangulaire, il vient $|a_p-a_q|<\eta$ puis $\|f(a_p)-f(a_q)\|<\varepsilon$. Il en résulte que la suite $(f(a_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet au plus une valeur d'adhérence. Étant à valeurs dans un compact, d'une part on en déduit qu'elle admet exactement une valeur d'adhérence, puis en utilisant la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass, qu'elle converge.

Soit maintenant $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $A^{\mathbf{N}}$ tel que $\lim b_n = a$. La suite définie par $c_{2n}=a_n$ et $c_{2n+1}=b_n$ est une suite convergente vers a, par recollement de deux suites convergentes vers a. Le résultat précédent montre alors que $(f(c_n))_{n\in\mathbf{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence. Or la suite des termes pairs converge vers $\lim f(a_n)$ et la suite des termes impairs converge vers $\lim f(b_n)$. Il en résulte $\lim f(a_n)=\lim f(b_n)$. On peut donc poser $f(a)=\lim f(a_n)$ puisque cette limite ne dépend pas de la suite convergeant vers a choisie.

Soit enfin ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour x et y dans A vérifiant $|x-y|<\eta$, on ait $\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$. Soit alors x et y dans $\overline{A}$ vérifiant $|x-y|<\eta$. On dispose de $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $A^{\mathbf{N}}$ tels que $\lim a_n = x$ et $\lim b_n = y$. Comme alors $\lim(a_n-b_n)=x-y$ et $|x-y|<\eta$, on dispose de N dans $\mathbf{N}$ tel que, pour $n\geq N$, $|a_n-b_n|<\eta$. On en déduit que, pour de tels n, $\|f(a_n)-f(b_n)\|<\varepsilon$ et donc, par passage à la limite, $\|f(x)-f(y)\|\leq\varepsilon$. Il en résulte que f est uniformément continue sur $\overline{A}$ et donc en particulier y est continue. Appliqué à la fonction $t\mapsto V_t$, on en déduit, par densité de D dans $\mathbf{R}$ (les sous-groupes de $\mathbf{R}$ sont soit discrets, soit denses et, puisque 0 n'est pas isolé dans D, D n'est pas discret), que

$\boxed{\text{si le groupe } (V_t)_{t\in D} \text{ est continu alors le théorème d'Arveson est démontré.}}$

PARTIE II - Continuité

II.1. a) Soit Ψ dans $\mathbf{C}^d$ de norme 1. On remarque d'abord que pour deux matrices (pas nécessairement carrées) A et B, par propriété d'anti-involution de la transposée, on a $(AB)^* = {}^{\mathrm{t}}\overline{AB} = B^*A^*$. En particulier, pour t dans D_+, puisque $\langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle$ est scalaire, son conjugué est donné par

$$\overline{\langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle} = (\Psi^*V_t\Psi)^* = \Psi^*V_t^*\Psi$$

et donc

$$|\langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle|^2 = \Psi^*V_t^*\Psi\Psi^*V_t\Psi = \Psi^*\varphi_t(\Psi\Psi^*)\Psi\ .$$

Par continuité du groupe d'Arveson et par continuité de la multiplication matricielle, il vient $\lim\limits_{t\to 0}|\langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle|^2 = \Psi^*\Psi\Psi^*\Psi = (\Psi^*\Psi)^2$ et donc, puisque Ψ est de norme 1,

$$\boxed{\lim_{t\to 0}|\langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle|^2 = 1.}$$

b) Pour t dans D_+ et Ψ dans $\mathbf{C}^d$ unitaire, on pose $a_t = \langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle$. Le résultat précédent montre $\lim\limits_{t\to 0}|a_t| = 1$ et on dispose alors d'un voisinage de 0 tel que a_t n'y soit pas nul. Dans un tel voisinage on peut écrire $a_t = |a_t|\, e^{i\theta_t}$ avec, par exemple, θ_t dans $]-\pi;\pi]$. Il vient

$$\begin{aligned}\left\|V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi\right\|^2 &= \left(V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi\right)^* V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi \\ &= \left(\Psi^*V_t^* - e^{-i\theta_t}\Psi^*\right) V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi \\ &= \Psi^*V_t^*V_t\Psi - e^{-i\theta_t}\Psi^*V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi^*V_t^*\Psi + \Psi^*\Psi\end{aligned}$$

et donc, puisque Ψ est de norme 1 et V_t est unitaire,

$$\left\|V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi\right\|^2 = 2 - e^{-i\theta_t}a_t - e^{i\theta_t}\overline{a_t} = 2(1-|a_t|)$$

et donc, d'après la question précédente, $\lim\limits_{t\to 0}\left(V_t\Psi - e^{i\theta_t}\Psi\right) = 0$, i.e. $\boxed{V_t\Psi = e^{i\theta_t}\Psi + o\,(1).}$

c) Soit t dans D_+, on a, en exploitant le calcul de la première question,

$$\overline{b_t}a_t = \Psi'^*V_t^*\Psi'\Psi^*V_t\Psi = \Psi'^*\varphi_t(\Psi'\Psi^*)\Psi$$

et donc, par continuité du groupe d'Arveson,

$$\lim_{t\to 0}\overline{b_t}a_t = \Psi'^*\varphi_0(\Psi'\Psi^*)\Psi = \Psi'^*\Psi'\Psi^*\Psi$$

ou encore puisqu'on a affaire à des vecteurs unitaires : $\lim_{t\to 0}\overline{b_t}a_t = 1$. Or $|b_t|$ tend vers 1 quand t tend vers 0 et en particulier n'est pas nul dans un voisinage de 0. Dans un tel voisinage on peut écrire $\dfrac{a_t}{b_t} = \dfrac{\overline{b_t}a_t}{|b_t|^2}$ et en exploitant la première question il vient $\lim_{t\to 0}\dfrac{a_t}{b_t} = 1$, i.e. $\boxed{a_t \sim b_t.}$

d) Soit Ψ non nul dans $\mathbf{C}^d$ tel que $\lim\limits_{t\to 0} V_t\Psi = \Psi$, alors cette propriété est vraie, par linéarité, pour le vecteur de norme 1 $\dfrac{1}{\|\Psi\|}\Psi$ et donc pour tout vecteur de norme 1 puisqu'on a, avec les notations précédentes, $V_t\Psi = e^{i\theta_t}\Psi + o\,(1)$ puis $a_t = e^{i\theta_t} + o\,(1)$ soit $V_t\Psi = a_t\Psi + o\,(1)$, ce qui entraîne d'une part $a_t \sim 1$ et $b_t \sim a_t \sim 1$, puis $V_t\Psi' = b_t\Psi' + o\,(1) = \Psi' + o\,(1)$, d'autre part. Enfin par linéarité, cette propriété à tout vecteur de $\mathbf{C}^d$ puisqu'ils sont tous multiples d'un vecteur de norme 1. En résumé, pour tout Ψ dans $\mathbf{C}^d$, $\boxed{\lim\limits_{t\to 0} V_t\Psi = \Psi.}$

PARTIE III - Familles presque multiplicatives

III.1. Soit Ψ dans $\mathbf{C}^d$ de norme 1 et $(a_t)_{t\in D_+}$ la famille définie par $a_t = \langle\Psi\,|\,V_t\Psi\rangle$. Puisque $V_0 = I$ et Ψ est de norme 1, on a $a_0 = 1$. La partie précédente donne $\lim_{t\to 0}|a_t| = 1$. Pour s et t dans D_+, il vient

$$\begin{aligned}\overline{a_s a_t}a_{t+s} &= \Psi^*V_s^*\Psi\Psi^*V_t^*\Psi\Psi^*V_{t+s}\Psi \\ &= \Psi^*V_s^*\Psi\Psi^*V_sV_s^*V_t^*\Psi\Psi^*V_{t+s}\Psi \\ &= \Psi^*\varphi_s(\Psi\Psi^*)(V_tV_s)^*\Psi\Psi^*V_{t+s}\Psi \\ &= \Psi^*\varphi_s(\Psi\Psi^*)V_{t+s}^*\Psi\Psi^*V_{t+s}\Psi \\ &= \Psi^*\varphi_s(\Psi\Psi^*)\varphi_{t+s}(\Psi\Psi^*)\Psi\end{aligned}$$

et donc, par propriété des groupes d'Arveson et continuité de la multiplication matricielle, la limite de $\overline{a_s a_t} a_{t+s}$ quand (s,t) tend vers $(0,0)$ existe et on a

$$\lim_{(s,t)\to(0,0)} \overline{a_s a_t} a_{t+s} = \Psi^*\varphi_0(\Psi\Psi^*)\varphi_0(\Psi\Psi^*)\Psi = (\Psi^*\Psi)^3$$

et donc, puisque Ψ est de norme 1, cette limite vaut 1. Comme $|a_t|$ et $|a_s|$ tendent alors vers 1, ils sont non nuls dans un voisinage de $(0,0)$ et, dans ce voisinage, on peut écrire $\overline{a_s a_t} a_{t+s} = \dfrac{a_{t+s}}{a_t a_s} |a_t|^2 |a_s|^2$ et donc, en utilisant la propriété déjà démontrée de $|a_t|$, on en déduit $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{a_{t+s}}{a_t a_s} = 1$ et donc $\boxed{(a_t)_{t\in D_+} \text{ est presque multiplicative.}}$

III.2. a) Soit $(b_t)_{t\in D_+} = \left(\dfrac{a_t}{|a_t|}\right)_{t\in D_+}$. On a donc $b_0 = 1$ et pour t et s dans D_+, $|b_t| = 1$ et $\dfrac{b_{t+s}}{b_t b_s} = \dfrac{a_{t+s}}{a_t a_s} \dfrac{|a_t|\,|a_s|}{|a_{t+s}|}$ et donc, la première fraction et tous les termes de la seconde fraction du second membre ayant tous une limite quand (s,t) tend vers $(0,0)$, le premier membre aussi et cette limite vaut 1, autrement dit $\boxed{\text{la famille } \left(\dfrac{a_t}{|a_t|}\right)_{t\in D_+} \text{ est presque multiplicative.}}$

b) Une récurrence immédiate fournit pour n et k dans $\mathbf{N}$, $\beta_{n+k}^{2^k} = \beta_n$ et donc, si t est dans D_+ et n, m, k et ℓ sont dans $\mathbf{N}$ avec $t = k2^{-n} = \ell 2^{-m}$ et $m \geq n$, on a $\ell = k2^{m-n}$ et donc $\beta_n = \beta_m^{2^{m-n}}$ puis $\beta_n^k = \beta_m^{k2^{m-n}} = \beta_m^\ell$, autrement dit β_n^k ne dépend que de t, i.e. $\boxed{(\beta_t)_{t\in D_+} \text{ est bien définie.}}$
Soit maintenant t et s dans D_+, quitte à multiplier la représentation de l'un des deux comme multiple entier d'une puissance négative de 2, on dispose de n, k et ℓ dans $\mathbf{N}$ tels que $t = k2^{-n}$ et $s = \ell 2^{-n}$. Il vient alors $t + s = (k+\ell)2^{-n}$ puis $\beta_{t+s} = \beta_n^{k+\ell} = \beta_n^k \beta_n^\ell = b_t b_s$. Comme par ailleurs les racines carrées d'éléments de $\mathbf{S}^1$ et leurs puissances entières sont dans $\mathbf{S}^1$ par multiplicativité de la fonction module, β_t est de module 1 et donc $\boxed{\text{la famille } (b_t)_{t\in D_+} \text{ est multiplicative.}}$

c) Soit z' un nombre complexe non nul et z dans $\mathbf{S}^1$. La médiatrice de z et $-z$ est la droite perpendiculaire à $(0z)$ passant par 0, i.e. la droite dirigée par iz, et le demi-plan défini par cette droite et contenant z est celui défini par l'ensemble des complexes u tels que le produit scalaire avec z est positif. Par conséquent z est plus proche de z' que ne l'est $-z$ (ou l'une des deux en cas d'équidistance) si et seulement si le produit scalaire entre z' et z est positif, i.e. $\mathrm{Re}(z'\overline{z}) \geq 0$. Comme z est de module 1, la condition précédente s'écrit $\mathrm{Re}\, z'/z \geq 0$. Pour n dans $\mathbf{N}$, on en déduit (avec les notations de l'énoncé) $\mathrm{Re}(c_n) \geq 0$.
Par ailleurs, pour n dans $\mathbf{N}$, on a déjà remarqué $b_{2^{-n}} = b_{2^{-n-1}}^2$ et donc on a $\dfrac{c_n}{c_{n+1}^2} = \dfrac{a_{2^{-n}}}{a_{2^{-n-1}}^2}$.
Puisque $(a_t)_{t\in D_+}$ est presque multiplicative, il en résulte $\lim \dfrac{c_n}{c_{n+1}^2} = 1$ ou encore $c_n \sim c_{n+1}^2$.
De plus puisque c'est un quotient de deux éléments de familles à valeurs dans $\mathbf{S}^1$, la suite (c_n) est à valeurs dans $\mathbf{S}^1$. On note K l'intersection de $\mathbf{S}^1$ avec le demi-plan des nombres complexes de partie réelle positif. En tant qu'intersection du compact $\mathbf{S}^1$ et d'un demi-plan fermé (en tant qu'image réciproque du fermé $\mathbf{R}_+$ par une application linéaire), K

est compact. La suite (c_n) admet donc au moins une valeur d'adhérence dans K et on va montrer que seul 1 est une valeur d'adhérence possible, ce qui, en utilisant la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass, entraîne qu'elle converge vers 1. Soit donc a une valeur d'adhérence de (c_n) dans K, la relation $c_n \sim c_{n+1}^2$ entraîne que a^2 est également une valeur d'adhérence de (c_n) dans K et donc, par récurrence immédiate, il en va de même pour a^{2^k} pour tout k dans $\mathbf{N}$. Soit alors θ un argument de a dans $[-\pi/2;\pi/2]$. Si a n'est pas égal à 1, θ n'est pas nul et on peut poser $k = \left[\log_2\left(\dfrac{\pi}{2\,|\theta|}\right)\right] + 1$ de sorte qu'on a $\dfrac{\pi/2}{<} 2^k\,|\theta| \leq \pi$ et donc $\mathrm{Re}(a^{2^k}) < 0$, ce qui est une contradiction. Il en résulte $\boxed{\lim \dfrac{a_{2^{-n}}}{b_{2^{-n}}} = 1.}$

III.3. Remarque : l'hypothèse $N = 1$ entraîne en particulier, pour $n \geq 1$, $\frac{1}{2}d(a_{2^{1-n}}, 1) \leq \pi/10$ et, pour s et t dans $D \cap [0;1[$, $d(a_{t+s}, a_t a_s) \leq \pi/20$. La première inégalité peut se récrire, pour n dans $\mathbf{N}$, $d(a_{2^{-n}}, 1) \leq \pi/5$. De plus la supposition est licite, quitte à considérer la famille presque multiplicative $(a_{2^{-N}t})_{t\in D_+}$.

a) Si $(a_t)_{t\in D_+}$ est une famille presque multiplicative et n est dans $\mathbf{N}$, la famille $(a_{2^{-n+1}t})_{t\in D_+}$ est également presque multiplicative, ce qui permet de ramener l'inégalité (1) pour $(a_t)_{t\in D_+}$ et au rang n, à celle pour $(a_{2^{-n+1}t})_{t\in D_+}$ avec $n = 1$. Par conséquent si (1) est vrai pour toute suite presque multiplicative avec $n = 1$, elle est vraie également avec n quelconque.

Soit maintenant $(a_t)_{t\in D_+}$ une famille presque multiplicative et $(b_t)_{t\in D_+}$ la famille multiplicative associée construite à la question précédente. Comme cette dernière est à valeurs dans $\mathbf{S}^1$, on peut considérer $(c_t)_{t\in D_+}$ défini par $c_t = \dfrac{a_t}{b_t}$ et c'est un élément de $\mathbf{S}^1$. Par hypothèse et construction, on a $a_0 = b_0 = 1$ et donc $c_0 = 1$. Pour t et s dans D_+, on a, par multiplicativité de $(b_t)_{t\in D_+}$, $\dfrac{c_{t+s}}{c_t c_s} = \dfrac{a_{t+s}}{a_t a_s}$ et donc $d(c_{t+s}, c_t c_s) = d(a_{t+s}, a_t a_s)$ et $\displaystyle\lim_{(s,t)\to(0,0)} \frac{c_{t+s}}{c_t c_s} = 1$. On en déduit que $(c_t)_{t\in D_+}$ est presque multiplicative et vérifie $c_1 = 1$. Si l'inégalité (1) est vraie pour celle-ci avec $n = 1$, on en déduit

$$\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(c_t, 1) \leq 2 \sup_{(s,t)\in([0;1]\cap D_+)^2} d(c_{t+s}, c_t c_s)\ .$$

En utilisant l'inégalité triangulaire, pour t dans D_+, on a $d(a_t, 1) \leq d(a_t, c_t) + d(c_t, 1) = d(b_t, 1) + d(c_t, 1)$. Par conséquent en utilisant la remarque précédente sur $d(c_{t+s}, c_t c_s) = d(a_{t+s}, a_t a_s)$, il vient

$$\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(a_t, 1) \leq \sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(b_t, 1) + 2 \sup_{(s,t)\in([0;1]\cap D_+)^2} d(a_{t+s}, a_t a_s)\ .$$

Comme $b_{1/2}^2 = b_1 = a_1$, on a $2\,\mathrm{Arg}(b_{1/2}) \equiv \mathrm{Arg}(a_1) \pmod{2\pi}$. Grâce à l'hypothèse $N = 1$, on a $d(a_1, 1) \leq \pi/5$ et donc, puisque $d(b_{1/2}, a_1) \leq \pi/2$ par construction de $(b_t)_{t\in D_+}$, on en déduit $2\,\mathrm{Arg}(b_{1/2}) = \mathrm{Arg}(a_1)$ et donc $d(b_{1/2}, 1) = \frac{1}{2}d(a_1, 1)$.

De plus, par construction de $(b_t)_{t\in D_+}$ et grâce à l'hypothèse $N = 1$, on a pour n dans $\mathbf{N}^*$, $b_{2^{-n}}^2 = b_{2^{1-n}}$, $d(a_{2^{1-n}}, b_{2^{-n}}) \leq \pi/2$ et $|\mathrm{Arg}(a_{2^{1-n}})| \leq \pi/5$. On en déduit, par récurrence, qu'on a pour n dans $\mathbf{N}$, $|\mathrm{Arg}(b_{2^{-n}})| \leq \pi/5$ et $\mathrm{Arg}(b_{2^{-n}}) = 2^{-n}\,\mathrm{Arg}(b_1)$. En effet la propriété est vraie au rang 1 d'après ce qui précède et elle est héréditaire car la distance maximale entre deux points du cercle dans le secteur angulaire défini par $d(z,1) \leq \pi/5$ est égale à $2\sin(\pi/5)$, alors que la distance entre un tel point et l'opposé d'un tel point est au minimum égale à $2\sin(3\pi/10)$. Par croissance de sin sur $[0;\pi/2]$, l'hérédité s'en déduit. Il en résulte, pour t dans D_+ inférieur à 1, $d(b_t,1) = td(b_1,1)$ et ainsi le supremum $\sup\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(b_t,1)$ est atteint en $t = 1/2$. Ce qui permet de conclure, i.e.

on peut se ramener au cas $a_1 = 1$ et à montrer seulement

$$\boxed{\sup_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(a_t,1) \leq 2 \sup_{(s,t)\in([0;1]\cap D_+)^2} d(a_{t+s}, a_t a_s)\ .}$$

b) Puisqu'on a affaire à une partie de $\mathbf{N}$, l'ensemble $\left\{n \in \mathbf{N} \mid \exists k \in \left[\!\left[0; 2^{n-1}\right]\!\right]\ d(a_{k2^{-n}},1) > 2\varepsilon\right\}$ admet un minimum si et seulement s'il est non vide. S'il l'était on aurait pour tous n et k dans $\mathbf{N}$ avec $0 \leq k2^{-n} \leq \dfrac{1}{2}$, $d(a_{k2^{-n}},1) \leq 2\varepsilon$. Autrement dit on aurait, pour tout t dans D_+ avec $0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}$, $d(a_t,1) \leq 2\varepsilon$ et donc $\sup\limits_{t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\cap D_+} d(a_t,1) \leq 2\varepsilon$, ce qui est contredit l'hypothèse faite. D'où $\boxed{\text{l'existence d'un minimum.}}$

Remarque : dans ces conditions $\left\{k \in \left[\!\left[0; 2^{n_0-1}\right]\!\right] \mid d(a_{k2^{-n_0}},1) > 2\varepsilon\right\}$ est une partie non vide de $\mathbf{N}$ et admet donc un minimum. De plus, comme $a_0 = 1$, $d(a_0,1) = 0$ et donc $k_0 > 0$. De plus en tant que supremum d'un ensemble majoré par $\pi/20$, on a $\varepsilon \leq \pi/20$.

c) Par définition de la fonction distance, de n_0 et k_0 et par hypothèse de positivité sur $\theta_{k_0 2^{-n_0}} > 2\varepsilon$, on a $\boxed{\theta_{k_0 2^{-n_0}} > 2\varepsilon \text{ et, pour } 0 \leq j < k_0,\ \left|\theta_{j2^{-n_0}}\right| \leq 2\varepsilon.}$

d) Pour z dans $\mathbf{S}^1$, on a $\mathrm{Arg}(z^2) \equiv 2\,\mathrm{Arg}(z) \pmod{2\pi}$. Si, de plus, $d(z,1) < \pi/2$, alors $\mathrm{Arg}(z^2) = 2\,\mathrm{Arg}(z,1)$. Or, par hypothèse et puisque k_0 est strictement positif,

$$d(a_{k_0 2^{-n_0}}, a_{(k_0-1)2^{-n_0}} a_{2^{-n_0}}) \leq \frac{\pi}{20}$$

et, par propriété de l'argument,

$$d(a_{(k_0-1)2^{-n_0}} a_{2^{-n_0}}, 1) \leq d(a_{(k_0-1)2^{-n_0}}, 1) + d(a_{2^{-n_0}}, 1) \leq 2\varepsilon + \frac{\pi}{5} \leq \frac{3\pi}{10}\ .$$

Par inégalité triangulaire on en déduit $d(a_{k_0 2^{-n_0}}, 1) \leq 7\pi/20 < \pi/2$ et donc

$$\left|\theta_{k_0 2^{1-n_0}} - 2\theta_{k_0 2^{-n_0}}\right| = d(a_{k_0 2^{1-n_0}}, a^2_{k_0 2^{-n_0}}) \leq \varepsilon\ ,$$

et en particulier $\boxed{\theta_{k_0 2^{1-n_0}} > 3\varepsilon.}$

e) Par minimalité de n_0 et puisqu'on a $d(a_{k_0 2^{1-n_0}}, 1) > 2\varepsilon$, on doit avoir $k_0 \notin \left[\!\left[0; 2^{n_0-2}\right]\!\right]$, i.e. $k_0 \in \left[\!\left[2^{n_0-2}+1; 2^{n_0-1}\right]\!\right]$ ou encore $\boxed{k_0 2^{-n_0} \in \left]\dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{2}\right].}$

f) On a $\left]\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right] = \left]\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right]$ et on peut donc raisonner par disjonction de cas.

Si $k_0 2^{-n_0} > 1/3$, alors les calculs précédents montrent $3\varepsilon < \theta_{k_0 2^{1-n_0}} < 5\varepsilon \leq \pi/4 < \pi/2$ et, par hypothèse sur k_0, $\left|\theta_{1-k_0 2^{1-n_0}}\right| = \left|\theta_{(2^{n_0}-2k_0)2^{-n_0}}\right| \leq 2\varepsilon$ puisqu'on a $0 \leq 2^{n_0} - 2k_0 < k_0$. Il en résulte, par inégalité triangulaire

$$d(a_{k_0 2^{1-n_0}}, 1) \leq d(a_{k_0 2^{1-n_0}} a_{1-k_0 2^{1-n_0}}, 1) + d(a_{1-k_0 2^{1-n_0}}, 1) \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \theta_1$$

et donc, puisque le membre de gauche est strictement supérieur à 3ε, $\theta_1 > 0$. Ceci contredit a_1 et donc ce cas est impossible.

On a donc nécessairement $1/4 < k_0 2^{-n_0} \leq 1/3$. Il vient alors comme ci-dessus, $\theta_{3k_0 2^{-n_0}} \geq \theta_{k_0 2^{1-n_0}} + \theta_{k_0 2^{-n_0}} - \varepsilon > 4\varepsilon$. Comme on a aussi

$$\theta_{3k_0 2^{-n_0}} \leq d(a_{3k_0 2^{-n_0}} a_{1-3k_0 2^{-n_0}}, 1) + d(a_{1-3k_0 2^{-n_0}}, 1) \leq 2\varepsilon + \varepsilon + \theta_1 = 3\varepsilon\,,$$

on obtient à nouveau une contradiction.

Ces contradictions entraînent la validité de (1) avec les hypothèses sur N et le signe de $\theta_{k_0 2^{-n_0}}$ qui ont été faite. On a déjà vu que l'hypothèse sur N n'est pas restrictive. Quant à celle sur le signe, elle ne l'est pas non plus puisque la conjuguée d'une famille presque multiplicative l'est aussi. On en conclut à $\boxed{\text{la validité de (1).}}$

g) Soit $(a_t)_{t\in D_+}$ une famille presque multiplicative. On lui associe une famille $(a_t/|a_t|)_{t\in D_+}$ à qui on associe ensuite une famille multiplicative $(b'_t)_{t\in D_+}$ comme en III.2 et enfin, en considérant le quotient de ces deux familles, une famille presque multiplicative $(c_t)_{t\in D_+}$ avec $c_t = a_t/|a_t|\,b'_t$, telle que $c_{2^{-n}}$ tende vers 1. On peut alors lui appliquer l'inégalité (1) et en déduire $\lim_{t\to 0} c_t = 1$, puisque dans le second membre de l'inégalité, le premier terme tend vers 0 avec n par construction et le second par presque multiplicativité. La famille $(b_t)_{t\in D_+}$ définie par $b_t = |a_t|\,b'_t$ est donc $\boxed{\text{multiplicative et vérifie } a_t \sim b_t \text{ au voisinage de } 0.}$

III.4. En appliquant ce qui précède à la famille presque multiplicative donnée en III.1, on en déduit, pour Ψ de norme 1 fixée, l'existence d'une famille multiplicative $(b_t)_{t\in D_+}$ telle que, en posant $U_t = \dfrac{1}{b_t}V_t$, on ait $\lim\limits_{t\to 0}\langle \Psi \,|\, U_t\Psi\rangle = 1$. De plus $(U_t)_{t\in D_+}$ définit un semi-groupe. En posant $U_t = U^*_{-t}$ pour t dans D strictement négatif, on obtient alors un groupe unitaire et U_t est associé à φ_t pour tout t dans D.

On déduit de la partie II, que pour tout Ψ dans $\mathbf{C}^d$, $\lim_{t\to 0} U_t\Psi = \Psi$. Comme c'est vrai pour les vecteurs de la base canonique, on en déduit la convergence coordonnée par coordonnée de U_t vers la matrice identité, i.e. $t \mapsto U_t$ est continue en 0 (sur D). Le calcul effectué en fin de partie I montre alors que cette fonction est uniformément continue sur D et donc a fortiori continue. Le résultat de la fin de la partie I permet alors de conclure, i.e.

$\boxed{\text{le théorème d'Arveson est démontré.}}$