Première composition de mathématiques
CentraleSupélec MP 1991

Préambule

Pour tout entier naturel k on définit le polynôme Γ_k par :

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_1 = X, \quad \Gamma_2 = \frac{X(X-1)}{2}, \quad \dots \quad \Gamma_k = \frac{X(X-1)\dots(X-k+1)}{k!}.$$

Le but du problème est d'étudier quelques propriétés de ces polynômes et des séries du type $\sum a_n\Gamma_n(x)$ où x est une variable réelle et $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite réelle.

PARTIE I

On étudie dans cette partie quelques propriétés des polynômes Γ_k.

I.1) Montrer que pour tout entier relatif x, $\Gamma_k(x)$ est aussi un entier relatif. Calculer $\Gamma_k(k)$ et $\Gamma_k(-1)$.

I.2) Établir pour tout entier $n \geq 1$ les formules : $n\Gamma_n(X) = (X-n+1)\Gamma_{n-1}(X)$ et $\Gamma_n(X+1) - \Gamma_n(X) = \Gamma_{n-1}(X)$.

I.3) Soit un polynôme Q de degré n. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes.

— Pour tout entier relatif x, $Q(x)$ est un entier relatif.

— Il existe $n+1$ entiers relatifs consécutifs $x_0, \dots, x_n$ tels que les $Q(x_i)$ soient des entiers relatifs.

— Il existe des entiers relatifs $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $Q(X) = a_0 + a_1\Gamma_1(X) + \dots + a_n\Gamma_n(X)$.

On pourra observer que tout polynôme est une combinaison linéaire des polynômes Γ_k, et raisonner par récurrence sur le degré de Q.

I.4) Soit une fraction rationnelle $F = P/Q$, où P et Q sont deux polynômes réels. On suppose qu'il existe un entier N tel que, pour tout n entier au moins égal à N, $F(n)$ soit entier relatif. Montrer que F est un polynôme satisfaisant aux conditions de 3. On pourra utiliser une récurrence sur d, d désignant le degré de F, c'est-à-dire la différence entre le degré de P et le degré de Q.

PARTIE II

II.1) Soit f une application de $[\alpha; +\infty[$ dans $\mathbf{R}$, où $\alpha \leq 0$.

a) Montrer qu'il existe une suite de réels $(a_n)_{n\geq 0}$ et une seule possédant la propriété suivante : pour tout n, la fonction $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(x)$ est nulle pour x égal aux $n+1$ entiers consécutifs $0, 1, 2, \dots, n$.

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ sera dite suite associée à la fonction f.

b) Montrer que la suite associée à la fonction $x \mapsto b^x$, $(b > 0)$, est $a_n = (b-1)^n$.

II.2) a) On suppose de plus ici que f est de classe C^∞. On donne un réel $x \geq \alpha$. Montrer qu'il existe, pour tout entier naturel N, un réel θ tel que : $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x) f^{(N+1)}(\theta)$.

On pourra utiliser la fonction auxiliaire qui à t associe $f(t) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(t) - A\Gamma_{N+1}(t)$ où A est une constante convenablement choisie et appliquer le théorème de Rolle.

b) En déduire que, pour tout n entier naturel, il existe un réel positif λ_n tel que $a_n = f^{(n)}(\lambda_n)$.

II.3) Caractériser les nombres réels r possédant la propriété suivante : pour tout entier strictement positif n, n^r est un entier. On pourra, p étant un entier naturel, utiliser la suite associée à la fonction $x \mapsto (p+x)^r$, et faire tendre p vers $+\infty$.

PARTIE III

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite donnée de nombres réels. On lui associe la série $\sum a_n\Gamma_n(x)$. Dans cette partie, on étudie les propriétés de cette série.

III.1) Soit x un réel fixé, non égal à un entier naturel. On considère la suite $(\mu_n)_{n\geq 1}$ définie par $\mu_n = n^\rho\,|\Gamma_n(x)|$.

a) Étudier, selon le réel ρ, la nature de la série de terme général $u_n = \ln(\mu_{n+1}) - \ln(\mu_n)$.

b) Que peut-on en conclure pour la suite μ_n ? Montrer qu'il existe un réel strictement positif $K(x)$, tel que l'on ait, quand n tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{x+1}\,|\Gamma_n(x)| = K(x)$. On ne cherchera pas à calculer $K(x)$.

III.2) Soit f une application de classe infinie de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant la propriété suivante : il existe un entier naturel n_0, tel que pour tout y positif et tout entier n supérieur ou égal à n_0, $\left|f^{(n)}(y)\right| \leq Mn$, M étant une constante strictement positive.

a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite associée à f, selon la définition donnée en II.1a. Montrer que l'on a pour tout réel positif x : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Gamma_n(x)$.

b) Que peut-on dire de f si cette fonction est nulle pour tout entier naturel ?

III.3) Soit x et y deux réels, tous deux distincts d'un entier naturel. On suppose $y > x$. Que dire de la série $\sum a_n\Gamma_n(y)$ si la série $\sum a_n\Gamma_n(x)$ converge absolument ?

III.4) Soit x_0 un réel non entier naturel, b un entier strictement supérieur à $|x_0|$. Soit x un réel appartenant à $]x_0; b\,]$. On pose $w_n(x) = \Gamma_n(x)/\Gamma_n(x_0)$.

a) Établir que la suite $(w_n(x))_{n\geq b}$ est monotone et tend vers zéro.

b) En déduire l'existence d'une constante K telle que, pour tout x appartenant à $[\,x_0; b\,]$, et pour tout $n \geq b$, $|\Gamma_n(x)| \leq K\,|\Gamma_n(x_0)|$.

c) Montrer que, si la série $\sum a_n\Gamma_n(x_0)$ converge absolument, alors la série $\sum a_n\Gamma_n(x)$ converge normalement sur tout compact de $[\,x_0; +\infty\,[$.

<u>On admet le théorème (T) suivant :</u>
Soit une série numérique convergente $\sum \lambda_n$ et une suite $(V_n)_{n\geq 0}$ d'applications d'un intervalle I dans $\mathbf{R}$, telle que :

— pour tout x de I, la suite $n \mapsto V_n(x)$ est décroissante

— il existe M réel tel que, pour tout x de I et tout n entier naturel : $|V_n(x)| \leq M$

alors la série de fonctions $\sum \lambda_n V_n(x)$ converge uniformément dans I.

III.5) a) Déduire de ce théorème que, si la série $\sum a_n\Gamma_n(x)$ converge en un point x_0 (x_0 non entier naturel), alors elle converge uniformément sur tout compact de $[\,x_0; +\infty\,[$.

b) Montrer de plus qu'il y a convergence absolue sur $]\,x_0 + 1; +\infty\,[$.

III.6) On considère, dans cette question, la série $\sum h^n\Gamma_n(x)$.

a) On suppose $|h| < 1$. Pour quels x la série est-elle convergente ? Quelle est alors sa somme ?

b) Que se passe-t-il lorsque $|h| > 1$?

c) On prend $h = 1$. Pour quels x la série converge-t-elle ? Montrer que la somme est égale à 2^x. On pourra appliquer II.2a et s'en servir pour déterminer le signe de $2^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \Gamma_k(x)$.

d) On prend $h = -1$. Pour quels x la série $\sum(-1)^n\Gamma_n(x)$ est-elle absolument convergente ? Pour quels x est-elle convergente ? Soit $\sigma(x)$ sa somme ; donner $\sigma(x)$ lorsque x est entier naturel.

e) On fixe x strictement positif, et l'on pose, t décrivant $[0;1]$: $\varphi_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \Gamma_n(x)$. Reconnaître, pour $t \neq 1$, cette fonction. Établir que la série ci-dessus converge normalement en t sur $[0;1]$. En déduire $\sigma(x)$.

PARTIE IV

On considère dans cette partie des fonctions de la forme $f(x) = \int_{-1}^{0}(1+t)^x h(t)\,\mathrm{d}t$ où h est une application continue de $[-1;0]$ dans $\mathbf{R}$.

IV.1) Montrer que, pour $x > 0$, on a la relation : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t\right)\Gamma_n(x)$. (1)

IV.2) h désigne une fonction définie et continue sur $[-1;0]$. On suppose $x > 0$. Établir à l'aide de la formule de Taylor avec reste sous forme d'intégrale la relation, pour tout entier N

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{N} t^n \Gamma_n(x) + R_N(t,x) \qquad \text{où} \quad R_N(t,x) = (N+1)\Gamma_{N+1}(x)\int_0^t \left(\frac{t-u}{1+u}\right)^N (1+u)^{x-1}\,\mathrm{d}u\ .$$

IV.3) Conservant les hypothèses du 2 on étudie ici $\lim_{N\to\infty}\int_{-1}^{0} h(t)R_N(t,x)\,\mathrm{d}t$.

a) À l'aide du changement de variable $s = \dfrac{t-u}{1+u}$ établir pour $|t| < 1$

$$R_N(t,x) = (N+1)\Gamma_{N+1}(x)(1+t)^x \int_0^t (s+1)^{-x-1}s^N\,\mathrm{d}s\ .$$

b) En posant $r_N(t) = \int_0^t (s+1)^{-x-1}s^N\,\mathrm{d}s$ et $H(t) = \int_{-1}^{t}(1+s)^x h(s)\,\mathrm{d}s$, établir, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\int_{-1}^{0} R_N(t,x)h(t)\,\mathrm{d}t = -(N+1)\Gamma_{N+1}(x)\int_{-1}^{0} H(t)(1+t)^{-x-1}t^N\,\mathrm{d}t\ .$$

c) Montrer que l'application $t \mapsto H(t)(1+t)^{-x-1}$ est bornée.

d) Étendre les résultats au cas $x > -1$ et en déduire que la relation (1) est vérifiée pour $x > -1$.

IV.4) On prend ici $h(t) = (1+t)^\lambda$, où $\lambda \geq 0$.

a) Pour quelles valeurs de x l'intégrale définissant f a-t-elle un sens ?

b) Calculer $a_n = \int_{-1}^{0} t^n h(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout n entier naturel.

c) Établir, pour $x > -1$ la relation : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Gamma_n(x)$. (2)

d) En utilisant les pôles et les zéros de la différence $f(x) - \sum_{n=0}^{N} a_n\Gamma_n(x)$, déterminer les valeurs réelles de x pour lesquelles la relation (2) est valable.

Première composition de mathématiques – CentraleSupélec MP 1991

PARTIE I

I.1) Pour x et k dans $\mathbf{N}$, on a $\Gamma_k(-x) = \Gamma_k(x) = 1$ si $k = 0$, $\Gamma_k(-x) = (-1)^k\binom{x+k-1}{k}$ si $k > 0$, $\Gamma_k(x) = 0$ si $x < k$ et $\Gamma_k(x) = \binom{x}{k}$ sinon. Il en résulte que, pour x dans $\mathbf{Z}$, $\boxed{\Gamma_k(x) \text{ est entier}}$ et $\boxed{\Gamma_k(k) = 1 \text{ et } \Gamma_k(-1) = (-1)^k.}$

I.2) Pour n entier supérieur à 1, on a $n\Gamma_n = \dfrac{1}{(n-1)!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$ et en particulier, par définition de Γ_0 et de Γ_{n-1} si $n > 1$, $\boxed{n\Gamma_n = (X-n+1)\Gamma_{n-1}.}$ On a également $n\Gamma_n = X\Gamma_{n-1}(X-1)$ et donc, en composant cette égalité avec $X+1$ et en retranchant la précédente, il vient $n(\Gamma_n(X+1)-\Gamma_n) = n\Gamma_{n-1}$ et donc, puisque n est non nul, $\boxed{\Gamma_n(X+1) - \Gamma_n = \Gamma_{n-1}.}$

I.3) Pour m entier et P dans $\mathbf{R}[X]$, on note

— $\mathbf{P}_1(P) : x \in \mathbf{Z} \Longrightarrow P(x) \in \mathbf{Z}$,

— $\mathbf{P}_2(P,m) : \exists x \in \mathbf{Z}\ \forall k \in [\![0;m]\!]\ P(x+k) \in \mathbf{Z}$

— $\mathbf{P}_3(P,m) : \exists (a_k)_{0\le k\le m} \in \mathbf{Z}^{m+1}\ P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m} a_k\Gamma_k$.

Tautologiquement, pour tous m entier et P dans $\mathbf{R}[X]$, $\mathbf{P}_1(P) \Longrightarrow \mathbf{P}_2(P,m)$. La question 1 donne également $\mathbf{P}_3(P,m) \Longrightarrow \mathbf{P}_1(P)$. On va donc démontrer par récurrence sur m le prédicat donné par $\forall P \in \mathbf{R}_m[X]\ \mathbf{P}_2(P,m) \Longrightarrow \mathbf{P}_3(P,m)$, afin de conclure. Pour $m = 0$, l'assertion est directe car un polynôme constant prend une valeur entière si et seulement s'il est constant égal à un entier a, et il est alors égal à $a\Gamma_0$.

Soit alors m dans $\mathbf{N}$ et P dans $\mathbf{R}_{m+1}[X]$ tels que $\mathbf{P}_2(P,m+1)$ soit vrai. On dispose de x dans $\mathbf{Z}$ tel que $\forall k \in [\![0;m+1]\!]\ P(x+k) \in \mathbf{Z}$. Alors $P(X+1)-P$ est de degré au plus m car son coefficient de degré $m+1$ est nul, prend des valeurs entières en $x+k$ pour k dans $[\![0;m]\!]$, i.e. $\mathbf{P}_2(P(X+1)-P,m)$ est vrai. Si le prédicat est vrai au rang m, on dispose de $(a_k)_{1\le k\le m+1}$ dans $\mathbf{Z}^{m+1}$ tel que $P(X+1)-P = \displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k\Gamma_{k-1}$ et donc, d'après la question précédente, en posant $R = P - \displaystyle\sum_{k=1}^{m+1} a_k\Gamma_k$, on a $R(X+1) - R = 0$. Il en résulte que $R - R(0)$ est nul sur les entiers et, admettant une infinité de racines, est donc nul. Autrement dit R est constant. Si on note a_0 cette constante, on a alors $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+1} a_k\Gamma_k$. En évaluant en x, il en résulte que a_0 est entier et ainsi $\mathbf{P}_3(P,m+1)$ est vrai. Ceci achève la récurrence et donc $\boxed{\text{les trois conditions sont équivalentes.}}$

I.4) On note Δ l'application linéaire qui à une fraction rationnelle R associe $R(X+1) - R$. Pour U et V dans $\mathbf{R}[X]$, avec V non nul, et $R = \frac{U}{V}$, on a $\Delta(R) = \frac{\Delta(U)}{V(X+1)} - R\frac{\Delta(V)}{V(X+1)}$ et $\deg(\Delta(U))$ est égal à $-\infty$ ou $\deg(U) - 1$ selon que U est constant ou pas. En particulier $\deg(\Delta(R))$ est strictement inférieur à $\deg(R)$ sauf si $R = 0$. On en déduit qu'on dispose de d entier tel que $\deg(\Delta^d(F))$ soit de degré strictement négatif, en prenant $d = 0$ si $\deg(F) < 0$ et $d = \deg(F) + 1$ sinon. Soit alors N comme dans l'énoncé, il vient que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $\Delta^d(F)(n)$ est entier. Par définition du degré on a $\lim_{+\infty} \Delta^d(F) = 0$ et donc on dispose de M entier tel que, pour n supérieur ou égal à M, $\Delta^d(F)(n) = 0$. Ayant une infinité de racines $\Delta^d(F)$ est la fraction rationnelle nulle. Comme $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbf{R}_0[X]$, on en déduit que la dimension de $\mathrm{Ker}(\Delta^d)$ est inférieure à d, et donc $\mathrm{Ker}(\Delta^d) = \mathbf{R}_{d-1}[X]$ par inclusion et par dimension. Il résulte de la question précédente que $\boxed{F \text{ est un polynôme vérifiant les conditions de la question 3.}}$

PARTIE II

II.1) a) Pour n et m entiers avec $0 \leq m \leq n$ et $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ une suite de réels, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(m) = \sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(m)$, par définition des (Γ_k), avec $\Gamma_m(m) = 1$ d'après la question I.1. La propriété voulue est donc équivalente à : $\forall m \in \mathbf{N}\ a_m = f(m) - \displaystyle\sum_{0\leq k<m} a_k\Gamma_k(m)$, avec la convention qu'une somme vide est nulle i.e. $a_0 = f(0)$. Par unicité de la construction par récurrence, $\boxed{\text{une telle suite existe et est unique.}}$

b) Par définition des (Γ_k) la propriété précédente est équivalente à $\forall m \in \mathbf{N}\ f(m) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} a_k$.

Comme pour m entier on a $b^m = ((b-1)+1)^m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k}(b-1)^k$, d'après la formule du binôme de NEWTON, il résulte de l'unicité précédente que $\boxed{\text{la suite associée à } x \mapsto b^x \text{ est } ((b-1)^n)_{n\in\mathbf{N}}.}$

II.2) a) Si x est un entier entre 0 et N, alors tout réel θ dans le domaine de définition de f convient. Sinon $\Gamma_{N+1}(x)$ est non nul et on dispose d'un unique réel A tel que la fonction auxiliaire suggérée par l'énoncé s'annule en x. On note g cette fonction. Par définition de Γ_{N+1} et en vertu de la question précédente, g s'annule aussi sur les entiers entre 0 et N. Comme par ailleurs f est de classe C^∞ sur $[a;+\infty[$ tout comme toute fonction polynomiale, g est de classe C^∞, et donc en particulier de classe C^{N+1}, de sorte qu'on peut appliquer le théorème de ROLLE pour obtenir N points distincts d'annulation de g', $N-1$ points distincts d'annulation de g'' etc. jusqu'à obtenir un point d'annulation de $g^{(N+1)}$. Or $g^{(N+1)} = f^{(N+1)} - A$ puisque les polynômes intervenant dans la définition de f sont tous de degré strictement inférieur à $N+1$ à l'exception de Γ_{N+1}, qui est de degré $N+1$ et de coefficient dominant $\frac{1}{(N+1)!}$. On en conclut qu'on dispose de θ réel, compris entre $\min(0,x)$ et $\max(N,x)$, tel que $A = f^{(N+1)}(\theta)$, i.e. $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(x) + \Gamma_{N+1}(x)f^{(N+1)}(\theta).}$

b) Pour $x = N+1$, la question précédente fournit θ entre 0 et $N+1$ tel que $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\Gamma_k(x) - f^{(N+1)}(\theta)\Gamma_{N+1}(x)$ s'annule pour $x = N+1$ et donc pour tou x dans $[\![0;N+1]\!]$, par définition de Γ_{N+1} et d'après la question précédente. Par unicité de la suite associée, on en déduit $a_{N+1} = f^{(N+1)}(\theta)$. Par ailleurs on a $a_0 = f(0)$ et donc, pour tout entier naturel n, on dispose de λ_n réel tel que $\boxed{\lambda_n \geq 0 \text{ et } a_n = f^{(n)}(\lambda_n).}$

II.3) Pour p entier naturel non nul, on note $(a_n^{(p)})$ la suite associée à la fonction $f_{p,r}$ définie sur $[-p;+\infty[$ par $f_p(x) = (p+x)^r$. Si r est un réel tel que n^r est entier pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, alors la définition par récurrence obtenue en question 1a entraîne $a_n^{(p)} = (p+n)^r - \displaystyle\sum_{0\leq k<n} a_k\Gamma_k(m) \in \mathbf{Z}$. Comme $f_{p,r}$ est de classe C^∞, avec $f'_{p,r} = rf_{p,r-1}$. Plus généralement pour n dans $\mathbf{N}$, on a $f_{p,r}^{(n)} = 0$ si $r \in \mathbf{N}$ et $n > r$, et $f_{p,r}^{(n)} = n!\,\Gamma_n(r)f_{p,r-n}$ en tout généralité, puisque $\Gamma_n(r)$ est nul si $r \in \mathbf{N}$ et $n > r$. La question précédente montre que pour n et p entiers, avec $0 < p$ et $r < n$, on dispose d'un réel positif $\lambda_n^{(p)}$ tel que $a_n^{(p)} = n!\,\Gamma_n(r)(p+\lambda_n^{(p)})^{r-n}$. Par décroissance des fonctions puissances d'exposant négatif, il en résulte $\left|a_n^{(p)}\right| \leq n!\,|\Gamma_n(r)|\,p^{r-n}$ et donc $\lim_p a_n^{(p)} = 0$. Comme on a affaire à des entiers, on a donc $a_n^{(p)} = 0$ à partir d'un certain rang. Ceci impose $\Gamma_n(r) = 0$ et donc r est entier. La réciproque étant directe $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}^*\ n^r \in \mathbf{N} \iff r \in \mathbf{N}.}$

PARTIE III

III.1) a) D'après la question I.2, il vient pour n entier naturel $\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\rho \dfrac{|x-n|}{n+1}$ et donc $\dfrac{\mu_{n+1}}{\mu_n} = 1+(\rho-x-1)\dfrac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, puis $u_n = (\rho-x-1)\dfrac{1}{n}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On en déduit, par comparaison à une série de Riemann entre séries de termes de signe constant que

$\boxed{\sum u_n \text{ converge si et seulement si } \rho = x+1, \text{ et sinon } \sum u_n \text{ diverge vers } \operatorname{sgn}(\rho-x-1)\infty.}$

b) Puisqu'on a affaire à une série télescopique, on en déduit que $(\ln(\mu_n))$ diverge vers $-\infty$, converge ou diverge vers $+\infty$ selon que ρ est strictement inférieur, égal ou strictement supérieur à $x+1$. Par continuité ou limite de l'exponentielle, on en déduit

$\boxed{\lim \mu_n = 0 \text{ si } \rho < x+1,\ \lim \mu_n \in \mathbf{R}_+^* \text{ si } \rho = x+1 \text{ et } \lim \mu_n = +\infty \text{ sinon.}}$

En particulier, il existe $K(x)$ réel tel que $\boxed{K(x) > 0 \text{ et } \lim n^{x+1}\,|\Gamma_n(x)| = K(x).}$

III.2) a) D'après la question II.2a, les hypothèses faites sur f et la question précédente, on a pour x réel positif non entier $f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(x) = \mathrm{O}\left((n+1)n^{-x-1}\right) = \mathrm{O}\left(n^{-x}\right) = \mathrm{o}\,(1)$. Pour x dans $\mathbf{N}$, pour $n \geq x$, on a $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k\Gamma_k(x)$ et donc, pour tout réel positif, $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\Gamma_k(x).}$

b) Au vu de la définition par récurrence de sa suite associée, si f est nulle sur $\mathbf{N}$, sa suite associée l'est aussi et donc, sous les hypothèses de cette question, $\boxed{f \text{ est alors nulle.}}$

III.3) D'après la question III.1b on a $\Gamma_n(y) = \mathrm{O}\left(n^{-y-1}\right) = \mathrm{o}\left(|\Gamma_n(x)|\right)$ et donc, par comparaison entre séries de termes positifs, si $\sum a_n\Gamma_n(x)$ converge absolument, $\boxed{\sum a_n\Gamma_n(y) \text{ converge absolument.}}$

III.4) a) Pour n entier, si $n \geq b$ alors $n > x_0$ et $n \geq x$, puis $n > x$ car x n'est pas entier. On en déduit que $(w_n(x))_{n\geq b}$ est bien définie et non nulle, et pour n entier supérieur à b, on a $\dfrac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} = \dfrac{x-n}{x_0-n}$ d'après la question I.2, et donc $0 < \dfrac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} < 1$. La suite $(w_n(x))_{n\geq b}$ garde donc un signe constant et décroît strictement en valeur absolue. En particulier $\boxed{(w_n(x))_{n\geq b} \text{ est monotone}}$ et, d'après III.1b, est équivalent en valeur absolue à $\frac{K(x)}{K(x_0)}n^{x_0-x}$. En particulier $\boxed{\lim w_n(x) = 0.}$

b) Par monotonie, pour n entier supérieur à b et x dans $]x_0;b\,]$, on a $|w_n(x)| \leq |w_b(x)|$. Puisqu'on a affaire à une fonction polynomiale donc continue, en vertu du théorème de Weierstrass, la fonction $\dfrac{\Gamma_b}{\Gamma_b(x_0)}$ est bornée sur $[\,x_0;b\,]$. On note K une borne en valeur absolue et il vient $|w_n(x)| \leq K$, i.e. $|\Gamma_n(x)| \leq K\,|\Gamma_n(x_0)|$. Comme la fonction polynomiale précédente vaut 1 en x_0, on a $1 \leq K$ et donc la majoration s'étend de $]x_0;x\,]$ à $[\,x_0;x\,]$: $\boxed{\forall x \in [\,x_0;b\,]\ \forall n \geq b\ |\Gamma_n(x)| \leq K\,|\Gamma_n(x_0)|.}$

c) Soit I un compact de $[\,x_0;+\infty[$. On dispose de b tel que I est inclus dans $[\,x_0;b\,]$. La question précédente montre $\|a_n\Gamma_n\|_{I,\infty} = \mathrm{O}\left(|a_n\Gamma_n(x_0)|\right)$ et donc, par comparaison entre séries à termes positifs, $\boxed{\text{si } \sum a_n\Gamma_n(x_0) \text{ converge absolument, } \sum a_n\Gamma_n \text{ converge normalement sur } I.}$

III.5) a) Soit I un compact de $[\,x_0;+\infty[$. On dispose de b tel que I est inclus dans $[\,x_0;b\,]$. On reprend les notations de la question précédente. En particulier la suite $(w_n(x))_{n\geq b}$ est de signe constant indépendant de x dans I. On le note ε. On applique alors le théorème à $\lambda_n = \varepsilon a_n\Gamma_n(x_0)$ et $V_n = |w_n|$.

La décroissance de $(V_n(x_0))_{n\geq b}$ provient du fait que c'est une suite constante, les autres hypothèses de (T) résultent des questions III.4a et III.4b. Donc

$\boxed{\text{si } \sum a_n\Gamma_n(x_0) \text{ converge absolument, } \sum a_n\Gamma_n \text{ converge uniformément sur } I.}$

b) Toujours avec les mêmes notations, pour $x > x_0 + 1$, on a

$$\frac{w_{n+1}(x)}{w_n(x)} = \frac{n-x}{n-x_0} = 1 + (x_0 - x)\frac{1}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc $\ln(|w_{n+1}(x)|) - \ln(|w_n(x)|) + (x - x_0)\frac{1}{n}$ est le terme général d'une série convergente. Par comparaison entre série et intégrale, i.e. théorème de MACLAURIN, la série de terme général $-\frac{1}{n} + \ln(n+1) - \ln(n)$ converge et on conclut que la série de terme général $\ln((n+1)^{x-x_0}|w_{n+1}(x)|) - \ln(n^{x-x_0}|w_n(x)|)$ converge. Par sommation télescopique on en déduit que la suite $(\ln(n^{x-x_0}|w_n(x)|))$ converge. Par continuité de l'exponentielle la suite $(n^{x-x_0}|w_n(x)|)$ converge dans $\mathbf{R}_+^*$. Par comparaison entre séries à termes positifs à une série de RIEMANN convergente, $\sum w_n(x)$ converge absolument. Enfin comme $\sum a_n\Gamma_n(x_0)$ converge simplement, on a $a_n\Gamma_n(x_0) = \mathrm{o}(1)$ et on en déduit $a_n\Gamma_n(x) = \mathrm{o}(|w_n(x)|)$. Par comparaison entre séries à termes positifs, on conclut que $\boxed{\sum a_n\Gamma_n(x) \text{ converge absolument si } x > x_0 + 1.}$

III.6) a) On reconnaît le développement en série entière en 0 de la fonction $h \mapsto (1+h)^x$, pour x réel, dont le rayon de convergence est 1, sauf si x est entier naturel auquel cas c'est $+\infty$:

$$\forall x \in \mathbf{R}\ \forall h \in \left]-1;1\right[\quad (1+h)^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \Gamma_n(x)h^n\,,$$

et donc $\boxed{\text{la somme converge pour tout réel } x \text{ et vaut } (1+h)^x.}$

b) En vertu de III.1b, par croissance comparée, il y a divergence grossière lorsque x n'est pas entier naturel. Sinon la somme est finie et donc $\boxed{\text{la somme converge uniquement lorsque } x \text{ est entier naturel.}}$

c) En vertu de III.1b la série diverge grossièrement pour $x \leq -1$. Pour $x > -1$ la série est alternée et décroît en valeur absolue, le tout à partir d'un certain rang. Elle vérifie donc le critère de LEIBNIZ toujours grâce à la question III.1b. Donc $\boxed{\text{la série converge si et seulement si } x > -1.}$ D'après la formule donnée en II.2a et en vertu de II.1a, pour $x > -1$, $2^x - \sum_{k=0}^{n}\Gamma_n(x)$ est du signe de $\Gamma_{n+1}(x)$ et est donc alterné. On en déduit par passage à la limite sur les sommes de rangs pair et impair $\sum_{k=0}^{+\infty}\Gamma_n(x) \leq 2^x \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\Gamma_n(x)$ et donc $\boxed{\text{la somme est } 2^x.}$

d) En vertu de III.1b la série converge absolument si et seulement si $x \geq 0$, et diverge grossièrement pour $x \leq -1$. Pour x dans $\left]-1;0\right[$, la série est à termes de signe constant et donc diverge. Autrement dit $\boxed{\text{la convergence simple ou absolue a lieu pour } x \geq 0.}$ Pour x entier naturel les calculs de II.1b sont valides y compris pour $b = 0$. On en déduit $\boxed{\sigma(x) = \delta_{x,0} \text{ pour } x \text{ dans } \mathbf{N}.}$

e) En vertu de la question III.6a, pour $t \neq 1$, on a $\boxed{\varphi_x(t) = (1-t)^x}$ et puisque la norme de la convergence uniforme sur $[0;1]$ des termes de la série est donnée par $|\Gamma_n(x)|$, il résulte de la question précédente qu'il y a $\boxed{\text{convergence normale sur } [0;1].}$ On peut donc intervertir la sommation avec le passage à la limite en $t = 1$. Comme $x > 0$, on a $\boxed{\sigma(x) = 0.}$