Lycée Clemenceau MP*

MATHÉMATIQUES

DEVOIR EN TEMPS LIBRE 3

18 octobre 2019 – À rendre pour le 15 novembre 2017

Centrale 2012 MP – deuxième composition
Questions obligatoires : partie II

Merci d'indiquer sur chacune des copies (de préférence doubles) : le nom de la personne ayant rédigé, celui de son binôme éventuel et enfin celui de la personne ayant corrigé.

Chaque membre d'un binôme doit rendre une copie séparée, afin de faciliter la correction.

Deuxième composition
Centrale 2012 – MP

Ce sujet est divisé en trois parties. La partie III est indépendante des deux premières (même si les parties II et III ont en commun de s'intéresser à des matrices dites de Hankel).

Notations

Dans tout le problème, $\mathbf{K}$ désigne indifféremment $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.
On note $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'espace vectoriel des suites à valeurs dans $\mathbf{K}$.
Pour tout espace vectoriel E sur $\mathbf{K}$, on note $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. On note σ l'élément de $\mathscr{L}(\mathbf{K}^{\mathbf{N}})$ qui à tout $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ associe $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ de terme général $y_n = x_{n+1}$.
On note $\mathbf{K}[X]$ l'algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, et $\mathbf{K}_m[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal à m. On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire si le coefficient de son monôme de plus haut degré vaut 1.
On note $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbf{K}$. Si M est une matrice carrée, on note $\mathrm{Tr}(M)$ sa trace. On note $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients réels. On rappelle qu'une telle matrice est diagonalisable dans une base orthonormée (théorème spectral).

PARTIE I - Suites récurrentes linéaires

Soit p un entier naturel. On dit qu'un élément x de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est une *suite récurrente linéaire* d'ordre $p \geq 0$ s'il existe un polynôme $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ dans $\mathbf{K}[X]$ de degré p, tel que $A(\sigma)(x)$ soit la suite nulle, c'est-à-dire si, avec $x = (x_n)_{n\geq 0}$:

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \sum_{k=0}^{p} a_k x_{n+k} = a_p x_{n+p} + a_{p-1}x_{n+p-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0 \tag{I.1}$$

On dit que la relation (I.1) (dans laquelle, rappelons-le, a_p est non nul) est une relation de récurrence linéaire d'ordre p, dont A est un polynôme caractéristique.
L'ensemble des suites x de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ qui obéissent à (I.1) est noté $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$.

I.A - Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire. On note J_x l'ensemble des polynômes A dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $A(\sigma)(x) = 0$.

I.A.1) Montrer qu'il existe dans J_x un unique polynôme unitaire B de degré minimal.

I.A.2) Montrer que les éléments de J_x sont les multiples de B : $J_x = B.\mathbf{K}[X]$.

Par définition, on dit que B est le polynôme minimal de la suite x, que le degré de B est l'ordre minimal de x, et que la relation $B(\sigma)(x) = 0$ est la relation de récurrence minimale de x.

I.B - Quelques exemples

I.B.1) Dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, quelles sont les suites récurrentes linéaires d'ordre 0 ? d'ordre 1 ? Quelles sont les suites de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ dont le polynôme minimal est $(X-1)^2$?

I.B.2) On considère la suite x définie par $x_0 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ et par la relation de récurrence linéaire d'ordre 3 : $\forall n \in \mathbf{N}$, $x_{n+3} = -3x_{n+2} - 3x_{n+1} - x_n$.
Déterminer le polynôme minimal (et donc l'ordre minimal) de la suite x.

I.C - L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ et deux cas particuliers

Soit $A = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un élément de $\mathbf{K}[X]$, de degré $p \geq 0$, que sans perdre de généralité on suppose unitaire.

I.C.1) Montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de dimension p de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et qu'il est stable par σ (on ne demande pas ici de déterminer une base de $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$, car c'est l'objet des questions suivantes).

I.C.2) Déterminer $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ quand $A = X^p$ (avec $p \geq 1$) et en donner une base.

I.C.3) Dans cette question, on suppose $p \geq 1$ et $A = (X - \lambda)^p$, avec λ dans $\mathbf{K}^*$.
On note $E_A(\mathbf{K})$ l'ensemble des x de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ de terme général $x_n = Q(n)\lambda^n$, où Q est dans $\mathbf{K}_{p-1}[X]$.

a) Montrer que $E_A(\mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ dont on précisera la dimension.

b) Montrer l'égalité $\mathcal{R}_A(\mathbf{K}) = E_A(\mathbf{K})$.

I.D - Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ quand A est scindé sur K

Dans cette question, on suppose que le polynôme A est scindé sur $\mathbf{K}$. Plus précisément, on note $A = X^{m_0} \prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)^{m_k}$, où :

- les scalaires λ_1, λ_2, …, λ_d sont les racines non nulles distinctes éventuelles de A dans$\mathbf{K}$, et m_1, m_2, …, m_d sont leurs multiplicités respectives (supérieures ou égales à 1). Si A n'a pas de racine non nulle, on convient $d = 0$ et $\prod_{k=1}^{d} (X - \lambda_k)^{m_k} = 1$;
- l'entier m_0 est la multiplicité de 0 comme racine éventuelle de A. Si 0 n'est pas racine de A, on adopte la convention $m_0 = 0$.

Avec ces notations, on a $\sum_{k=0}^{p} m_k = \deg(A) = p$.

En utilisant le théorème de décomposition des noyaux, montrer que $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ est l'ensemble des suites x de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, avec $x = (x_n)_{n \geq 0}$, telles que :

$$\forall n \geq m_0\,, \quad x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$$

où, pour tout k de $\{1, \ldots, d\}$, Q_k est dans $\mathbf{K}[X]$ avec $\deg(Q_k) < m_k$.

Remarque : si $d = 0$, la somme $\sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n$ est par convention égale à 0.

PARTIE II - Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

Soit x dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$, on note $H_n(x)$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ définie par

$$\forall (i,j) \in \{1, \ldots, n\}^2\,, \quad [H_n(x)]_{i,j} = x_{i+j-2}$$

On a par exemple $H_2(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix}$, $H_3(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ et $H_4(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$.

On identifie toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ avec l'endomorphisme de $\mathbf{K}$ qui lui est associé dans la base canonique. On identifie de même tout élément de $\mathbf{K}^n$ avec la matrice colonne qui lui correspond.

II.A - Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

Dans cette section, x est une suite récurrente linéaire d'ordre minimal $p \geq 1$ et de polynôme minimal B.

II.A.1) Montrer que la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq p-1}$ est une base de $\mathcal{R}_B(\mathbf{K})$. En déduire, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$.

II.A.2) Montrer que si $n \geq p$, l'application φ_n de $\mathcal{R}_B(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}^n$, $v \mapsto (v_0, \ldots, v_{n-1})$ est injective. En déduire que si $n \geq p$, alors $\mathrm{rg}(H_n(x)) = p$. Remarque : il est clair que ce résultat reste vrai si $p = 0$ (car la suite x et les matrices $H_n(x)$ sont nulles).

II.B - Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

Soit x une suite récurrente linéaire non nulle, d'ordre $m \geq 1$. Soit $p = \mathrm{rg}(H_m(x))$.

II.B.1) Montrer que x est d'ordre minimal p et que le noyau de $H_{p+1}(x)$ est une droite vectorielle dont un vecteur directeur peut s'écrire $(b_0, \dots, b_{p-1}, 1)$, où b_0, …, b_{p-1} sont dans $\mathbf{K}$.

II.B.2) Avec ces notations, montrer que le polynôme minimal de x est $B = X^p + b_{p-1}X^{p-1} + \cdots + b_1 X + b_0$.

II.C - Étude d'un exemple

Dans cette question, on considère la suite $x = (x_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$x_0 = 1\,, \quad x_1 = 1\,, \quad x_2 = 1\,, \quad x_3 = 0\,, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}\,,\ x_{n+4} = x_{n+3} - 2x_{n+1}$$

II.C.1) Écrire en Python une fonction de paramètre un entier naturel n et renvoyant la liste des x_k pour $0 \leq k \leq n$.

II.C.2) Préciser le rang de $H_n(x)$ pour tout entier n de $\mathbf{N}^*$ et indiquer l'ordre minimal de la suite x.

II.C.3) Déterminer la relation de récurrence minimale de la suite x.

II.C.4) Donner une formule permettant pour tout $n \geq 1$ de calculer directement x_n.

II.C.5) On décide de modifier uniquement la valeur de x_0, en posant cette fois $x_0 = \dfrac{1}{2}$. Avec cette modification, reprendre rapidement l'étude des questions II.C.2 et II.C.3.

PARTIE III - Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

Dans toute cette partie, n désigne un entier supérieur ou égal à 3. On note $p = [(n+1)/2]$ la partie entière de $(n+1)/2$. On a donc $n = 2p$ si n est pair et $n = 2p-1$ si n est impair.

$\mathbf{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique dont le produit scalaire est noté $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ et la norme associée est notée $\|\cdot\|$.

Un élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbf{R}^n$ est dit ordonné s'il vérifie $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$.

On dit qu'une matrice $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est une matrice de Hankel s'il existe $a = (a_0, \dots, a_{2n-2})$ dans $\mathbf{R}^{2n-1}$ tel que pour tous i et j dans $[\![1;n]\!]$, $m_{i,j} = a_{i+j-2}$. Une telle matrice est notée $M = H(a)$.

III.A - Préliminaires

III.A.1) Montrer que si M est une matrice de Hankel de taille n alors elle admet n valeurs propres réelles $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (chacune étant répétée autant de fois que sa multiplicité) que l'on peut classer dans l'ordre décroissant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. On note alors $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le spectre ordonné de la matrice M, c'est-à-dire le n-uplet ordonné des valeurs propres de M.

On s'intéresse au problème suivant : à quelles conditions un n-uplet ordonné de réels peut-il être le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n ?

III.A.2) Montrer que si λ est un réel non nul alors le n-uplet $(\lambda, \dots, \lambda)$ n'est pas le n-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille n.

III.B - Une première condition nécessaire

Soit $a = (a_0, \dots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbf{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On définit deux vecteurs $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $w = (w_1, \dots, w_n)$ de $\mathbf{R}^n$ par

$$\begin{cases} v_i = \sqrt{2i-1}\,a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2i-1}} & \text{si } i \in [\![1;p]\!] \\ v_i = \sqrt{2n-2i+1}\,a_{2(i-1)} \text{ et } w_i = \dfrac{1}{\sqrt{2n-2i+1}} & \text{si } i \in [\![p+1;n]\!] \end{cases}$$

On pose enfin $K_n = n - \|w\|^2$.

III.B.1) Montrer

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) a_k^2\,.$$

III.B.2) Montrer $\langle v \mid w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ et $\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$.

III.B.3) Montrer $\sum_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \langle v \mid w\rangle^2$ et en déduire l'inégalité :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq K_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \ . \tag{III.1}$$

III.B.4) Vérifier que si $n = 3$, la condition (III.1) équivaut à $2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) \geq 3(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)$.

III.C - D'autres conditions nécessaires

Dans cette partie, on admet le résultat suivant : si A et B sont deux matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ dont les valeurs propres respectives (avec répétitions éventuelles) sont $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n$ et $\beta_1 \geq \cdots \geq \beta_n$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_{n+1-i} \leq \mathrm{Tr}(AB) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \tag{III.2}$$

Soit $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ définie par $b_{p,p} = -2$, $b_{2p-1,1} = b_{1,2p-1} = 1$, tous les autres coefficients de B étant nuls (on rappelle que p désigne la partie entière de $(n+1)/2$).

III.C.1) Déterminer le spectre ordonné de la matrice B.

III.C.2) Soit $a = (a_0, \ldots, a_{2n-2})$ un élément de $\mathbf{R}^{2n-1}$ et $M = H(a)$. On note $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Établir

$$\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geq 0 \quad \text{et} \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geq 0\ . \tag{III.3}$$

III.D - Cas $n = 3$

Soit λ_1, λ_2, λ_3 trois réels vérifiant

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \quad \lambda_1 - \lambda_2 - 2\lambda_3 \geq 0 \quad 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 \geq 0\ .$$

On définit la matrice de Hankel $M = H(a,b,c,b,a) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$, où a, b, c sont réels.

III.D.1) Calculer les valeurs propres de M (sans chercher à les ordonner).

III.D.2) Expliciter a, b, c (avec $b \geq 0$) en fonction de λ_1, λ_2, λ_3, de telle sorte que $\mathrm{Spo}(M) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

III.D.3) Que peut-on déduire du résultat précédent, quant à la condition (III.3) dans le cas $n = 3$? En utilisant un triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$, montrer que pour $n = 3$, la condition (III.1) n'est pas suffisante.

Deuxième composition – Centrale 2012 – MP

PARTIE I - Suites récurrentes linéaires

I.A - Ordre (et polynôme) minimal d'une suite récurrente linéaire

I.A.1) L'application $A \mapsto A(\sigma)$ est un morphisme d'algèbres entre $\mathbf{K}[X]$ et $\mathscr{L}(\mathbf{K}^{\mathbf{N}})$ et l'évaluation en x est une application linéaire de $\mathscr{L}(\mathbf{K}^{\mathbf{N}})$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, leur composée est donc linéaire. Puisque x est une suite récurrente linéaire ce noyau n'est pas réduit à $\{0\}$ et on peut considérer

$$d_0 = \min\{\deg(P) \,|\, P \in J_x \setminus \{0\}\}\ ,$$

en tant que minimum d'une partie non vide de $\mathbf{N}$. On dispose alors de P dans J_x de degré d_0 et de B unitaire proportionnel à P, donc élément de J_x puisque ce dernier est un espace vectoriel. Si C est un autre polynôme dans J_x unitaire et de même degré que B, alors $B - C$ est de degré inférieur à ceux de B et C, et appartient à J_x puisqu'on a affaire à un espace vectoriel et que B et C sont unitaires de même degré. Donc $B - C$ est nul car il ne saurait appartenir à $J_x \setminus \{0\}$ par minimalité du degré, i.e. $\boxed{\text{il existe dans } J_x \text{ un unique polynôme unitaire } B \text{ de degré minimal.}}$

I.A.2) Soit P dans $B\mathbf{K}[X]$. On dispose de Q dans $\mathbf{K}[X]$ tel que $P = QB$ et alors

$$(QB)(\sigma)(x) = Q(\sigma)(B(\sigma)(x)) = Q(\sigma)(0) = 0\,,$$

i.e. $P \in J_x$. Si P est dans J_x et $UP+VB = D$ est une relation de Bézout entre P et B, alors l'argument précédent montre que UP et VB sont dans J_x et donc D aussi puisqu'on a affaire à un espace vectoriel. Si D est de degré strictement inférieur à celui de B, il est alors nul, ce qui est impossible. Donc $D = B$, car ils sont tous deux unitaires, et $B \mid P$, i.e. $\boxed{J_x = B.\mathbf{K}[X].}$

I.B - Quelques exemples

I.B.1) Une suite récurrente linéaire est d'ordre 0 si et seulement si son polynôme minimal est 1, i.e. $x = 0$. Donc $\boxed{\text{l'unique suite récurrente linéaire d'ordre 0 est la suite nulle.}}$

Une telle suite est d'ordre 1 si et seulement si son polynôme minimal est 1 ou bien de la forme $X - a$ avec a dans $\mathbf{K}$, i.e. si et seulement si elle admet un polynôme caractéristique de la forme $X - a$ ou encore si $\boxed{\text{c'est une suite géométrique.}}$

Une telle suite x admet $(X - 1)^2$ comme polynôme minimal si et seulement si $\sigma(x) - x$ n'est pas nul et $\sigma(\sigma(x) - x) = \sigma(x) - x$, i.e. x n'est pas constante, mais ses accroissements le sont, ou encore $\boxed{x \text{ est une suite arithmétique non constante.}}$

I.B.2) Par construction le polynôme P donné par $P = X^3 + 3X^2 + 3X + 1$, i.e. $P = (X + 1)^3$, appartient à J_x et donc le polynôme minimal de x en est un diviseur unitaire, donc vaut 1, $X + 1$, $(X + 1)^2$ ou $(X + 1)^3$. En posant $y = \sigma(x) + x$, on a $y_0 = -1$, $y_1 = 1$ et $(\sigma + \mathrm{Id})^2(y) = 0$. En particulier y n'est pas nul. En posant $z = \sigma(y) + y$, on a $z_0 = 0$ et $(\sigma + \mathrm{Id})(z) = 0$, donc z est une suite géométrique de base nulle, donc est nulle. Il en résulte $X + 1 \notin J_x$ et $(X + 1)^2 \in J_x$, donc $\boxed{\text{le polynôme minimal de la suite } x \text{ est } X^2 + 2X + 1 \text{ et son ordre minimal est 2.}}$

I.C - L'espace vectoriel $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ et deux cas particuliers

I.C.1) L'application $x \mapsto A(\sigma)(x)$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ dont le noyau est $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Par définition, pour x dans $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ et par commutativité de $\mathbf{K}[X]$, on a $A(\sigma)(\sigma(x)) = \sigma(A(\sigma)(x)) = \sigma(0) = 0$ et enfin, d'après l'axiome de construction des suites par récurrence l'application de $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}^p$ donnée par $x \mapsto (x_k)_{0 \le k < p}$ est bijective, et donc

$\boxed{\mathcal{R}_A(\mathbf{K}) \text{ est un sous-espace vectoriel de dimension } p \text{ de } \mathbf{K}[X] \text{, stable par } \sigma.}$

Remarque : l'application $x \mapsto (x_k)_{0 \le k < p}$ est clairement linéaire. Elle est injective par exemple parce qu'on peut démontrer par récurrence que la donnée de $(x_k)_{0 \le k < p}$ fixe la valeur de $(x_k)_{0 \le k < n}$. Seule la surjectivité est problématique et résulte d'un théorème de point fixe. C'est ce point qui est admis par le programme.

I.C.2) La relation de récurrence linéaire donne $\forall n \geq p\ x_n = 0$ et donc

$\boxed{\mathcal{R}_A(\mathbf{K}) \text{ est l'espace des suites nulles à partir du rang } p.}$

Via l'isomorphisme précédent, une base en est $\boxed{((\delta_{nk})_{n\in\mathbf{N}})_{0\leq k<p}.}$

I.C.3) a) L'application $Q \mapsto (Q(n))_{n\in\mathbf{N}}$ est un morphisme d'algèbre de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ puisque c'est le cas de l'évaluation et par produit cartésien. La multiplication par un élément de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est un endomorphisme de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ puisqu'on a affaire à une algèbre et donc la composée des deux est une application linéaire. De plus puisqu'un polynôme est déterminé par ses valeurs sur un nombre fini d'éléments de $\mathbf{K}$ (dépendant de son degré), la première application est injective. La seconde est inversible si et seulement si le multiplicande est une suite jamais nulle, d'inverse la multiplication par la suite des inverses. Comme λ est non nul, il en résulte $Q \mapsto (Q(n)\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est injective sur $\mathbf{K}[X]$ et donc que l'image de $\mathbf{K}_{p-1}[X]$ par cette application, i.e. $E_A(\mathbf{K})$, est un $\boxed{\text{sous-espace vectoriel de } \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \text{ de même dimension } p.}$

b) Pour Q dans $\mathbf{K}[X]$, on note x_Q la suite de terme général $Q(n)\lambda^n$. Puisque la multiplication par λ coïncide avec σ sur $(\lambda^n)_{n\in\mathbf{N}}$, on a $(\sigma-\lambda\mathrm{Id})(x_Q) = \lambda x_{Q(X+1)-Q} = x_{\lambda\Delta(Q)}$ avec $\Delta(Q) = Q(X+1)-Q$. En particulier, pour k dans $\mathbf{N}$, si Q est de degré au plus k, alors $(\sigma-\lambda\mathrm{Id})(x_Q)$ s'écrit x_R pour R de degré au plus $k-1$ (ou est nul si $k=0$). Il en résulte que si Q est de degré au plus $p-1$ alors $(\sigma-\lambda\mathrm{Id})^p(x_Q) = x_0 = 0$ et donc $E_A(\mathbf{K}) \subset \mathcal{R}_A(\mathbf{K})$. Puisqu'on a affaire à des espaces de même dimension p, il vient $\boxed{\mathcal{R}_A(\mathbf{K}) = E_A(\mathbf{K}).}$

I.D - Étude de $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ quand A est scindé sur $\mathbf{K}$

Puisque deux polynômes unitaires de degré 1 sont soit égaux soit premiers entre eux, les polynômes X^{m_0}, $(X-\lambda_k)^{m_k}$ pour k entre 1 et d, sont premiers entre eux d'après le lemme de Gauss et le théorème de décomposition des noyaux donne

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{K}) = \mathrm{Ker}(A(\sigma)) = \mathrm{Ker}(\sigma^{m_0}) \oplus \left(\oplus_{k=1}^d \mathrm{Ker}((\sigma-\lambda_k\mathrm{Id})^{m_k})\right) .$$

Il résulte de l'étude des cas particuliers précédents (questions I.C.2 et I.C.3) qu'on a

$$\mathcal{R}_A(\mathbf{K}) = \left(\bigoplus_{0\leq k<m_0} \mathbf{K}(\delta_{kn})_{n\in\mathbf{N}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{k=1}^{d} E_{(X-\lambda_k)^{m_k}}(\mathbf{K})\right)$$

i.e. les m_0 premières valeurs d'une suite dans $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ sont arbitraires et les suivantes sont données comme somme d'éléments de la forme trouvée en I.C.3. Autrement dit $\mathcal{R}_A(\mathbf{K})$ est l'ensemble des suites $x = (x_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ telles qu'il existe $(Q_k)_{1\leq k\leq d} \in \prod_{k=1}^d \mathbf{K}_{m_k-1}[X]$ de sorte qu'on ait, pour tout n supérieur à m_0,

$$\boxed{x_n = \sum_{k=1}^{d} Q_k(n)\lambda_k^n.}$$

PARTIE II - Matrices de Hankel associées à une suite récurrente linéaire

II.A - Calcul du rang de $H_n(x)$ quand x est une suite récurrente linéaire

II.A.1) Par hypothèse on a $x \in \mathcal{R}_B(\mathbf{K})$ et comme, d'après I.C.1, cet espace est σ-stable, il en va de même pour $\sigma^k(x)$ pour tout k dans $\mathbf{N}$. De plus par définition du polynôme minimal de x, la famille $(\sigma^k(x))_{0\leq k\leq p-1}$ est libre. Or, d'après I.C.1, $\mathcal{R}_B(\mathbf{K})$ est de dimension p. On en déduit donc que

$\boxed{(\sigma^k(x))_{0\leq k\leq p-1} \text{ est une base de } \mathcal{R}_B(\mathbf{K}).}$

Pour $n \geq p$, la famille $(\sigma^k(x))_{0\leq k\leq n-1}$ contient une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathcal{R}_B(\mathbf{K})$ dont elle est une partie. Son rang est donc p. Pour $n < p$, cette famille est une sous-famille d'une famille libre et elle est donc libre également, donc de rang n. On en déduit que, pour tout entier n dans $\mathbf{N}^*$, le rang de la famille $(\sigma^k(x))_{0\leq k\leq n-1}$ est $\boxed{\min(n,p).}$

II.A.2) On a déjà remarqué en I.C.1 que φ_p est injective. Or, pour $n \geq p$, φ_p s'écrit $\pi_p \circ \varphi_n$ où π_p est la projection canonique de $\mathbf{K}^n$ sur $\mathbf{K}^p$ donnée par les p premières coordonnées. Par conséquent φ_p injective $\Longrightarrow \varphi_n$ injective et donc $\boxed{\varphi_n \text{ est injective.}}$

Pour $n \geq p$, les colonnes de $H_n(x)$ forment l'image de la famille $(\sigma^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$, qui est de rang p d'après la question précédente, par l'application injective φ_n. Elles forment donc une famille de même rang, qui est aussi celui de la matrice dont elles sont les colonnes, i.e. $\boxed{\operatorname{rg}(H_n(x)) = p.}$

II.B - Détermination de la récurrence minimale d'une suite récurrente linéaire

II.B.1) Soit q l'ordre minimal de x. Par définition on a $q \leq m$ et donc, d'après la question précédente $\operatorname{rg}(H_m(x)) = q$, i.e. $\boxed{x \text{ est d'ordre minimal } p.}$

Toujours d'après la question précédente, $\operatorname{rg}(H_{p+1}(x)) = p$ et donc, d'après le théorème du rang, le noyau est $H_{p+1}(x)$ est de dimension 1, i.e. est une droite. Si a est un vecteur de ce noyau, avec $a = (a_k)_{0 \leq k \leq p}$, on a par définition $\varphi_{p+1}(\sum_{k=0}^{p} a_k \sigma^k(x)) = 0$. Or d'après la question précédente φ_{p+1} est injective. Il en résulte $\left(\sum_{k=0}^{p} a_k X^k\right)(\sigma)(x) = 0$ et donc, puisque x est d'ordre minimal p, a_p est non nul et $\dfrac{1}{a_p}a$ est un vecteur du noyau dont la $p+1$-ème coordonnée est 1, i.e. en notant $b_k = a_k/a_p$ pour $0 \leq k < p$, $\boxed{\text{le noyau de } H_{p+1}(x) \text{ est une droite dont } (b_0, \ldots, b_{p-1}, 1) \text{ est un vecteur directeur.}}$

II.B.2) Les considérations précédentes montrent que $B(\sigma)(x)$ est nul. Comme B est unitaire de degré p, par unicité du générateur unitaire de J_x, on en déduit que $\boxed{B \text{ est le polynôme minimal de } x.}$

II.C - Étude d'un exemple

II.C.1) On initialise une liste égale à $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ et on renvoie $[x_0, \ldots, x_n]$ si $n < 4$. Puis une effectue une boucle pour k allant de 3 à $n-1$ afin de rajouter x_{k+1} calculé de la façon suivante : $x_k - 2x_{k-2}$. On renvoie la liste à la fin, à savoir $[x_0, \ldots, x_{k+1}]$ pour $k = n-1$, i.e. $[x_0, \ldots, x_n]$.

```
#! /usr/bin/python3
def x(n):
    l=[1,1,1,0]
    if n<4: return l[:n+1]
    for k in range(3,n):
        l.append(l[-1]-2*l[-3])
    return l
```

II.C.2) Les matrice $H_1(x)$ et $H_2(x)$ ont toutes leurs colonnes égales et non nulles, et sont donc de rang 1. On a de plus

$$H_3(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad H_4(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & -2 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

La différence des deux premières colonnes de $H_3(x)$ montre que le vecteur e_3 de la base canonique de $\mathbf{K}^3$ est dans l'image de $H_3(x)$, donc e_1 aussi en ajoutant deux fois e_3 à la dernière colonne, et donc aussi aussi e_2 en retranchant e_1 à la seconde colonne. Il en résulte que $H_3(x)$ est de rang 3 et que $H_4(x)$ est au moins de rang 3 car ses trois premières colonnes forment une famille libre. Comme par ailleurs sa dernière colonne est égale au double de la différence entre sa troisième et sa deuxième colonne, $H_4(x)$

n'est pas inversible et le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à son noyau. Puisque, par définition, x est d'ordre 4, il résulte de la partie précédent que

$\boxed{\text{l'ordre minimal de } x \text{ est 3 et } \operatorname{rg}(H_n(x)) = \min(n, 3) \text{ pour } n \text{ dans } \mathbf{N}^* \text{ distinct de 2 et } \operatorname{rg}(H_2(x)) = 1.}$

II.C.3) Il résulte de l'étude précédente et de la partie précédente que le polynôme minimal de x est $X^3 - 2X^2 + 2X$ et donc que la relation de récurrence minimale de x est $\boxed{\forall n \in \mathbf{N}\ x_{n+3} = 2x_{n+2} - 2x_{n+1}.}$

II.C.4) Le polynôme minimal de x s'écrit $X(X-1-i)(X-1+i)$ et il résulte de la partie I que, pour $n \geq 1$, $x_n = a(1+i)^n + b(1-i)^n$ où a et b sont deux complexes. Grâce à x_1 et x_2 on détermine $a + b = i(a-b) = \dfrac{i}{2}$ et donc $b = \dfrac{1+i}{4}$ et $a = \dfrac{1-i}{4}$, d'où

$$x_n = -\frac{i}{2}(1+i)^{n-1} + \frac{i}{2}(1-i)^{n-1} = \frac{1}{2i}\left((1+i)^{n-1} + (1-i)^{n-1}\right) = \operatorname{Re}\left((1+i)^{n-1}\right)$$

ou encore, en utilisant la représentation trigonométrique, $\boxed{x_n = 2^{(n-1)/2}\cos\left(\dfrac{(n-1)\pi}{4}\right).}$

II.C.5) On constate qu'en posant $x_0 = \dfrac{1}{2}$ la formule précédente est valide également pour $n = 0$ et donc cette fois-ci $X^2 - 2X + 2$ est un polynôme annulateur de x. Comme x n'est pas géométrique, car sinon on aurait $x_0 x_2 = x_1^2$, ce qui n'est pas le cas, on en déduit que l'ordre minimal de x est 2 et donc $H_3(x)$ et $H_4(x)$ sont de rang 2. Comme $H_1(x)$ n'est pas nulle et comme le déterminant de $H_2(x)$ vaut $-\dfrac{1}{2}$, on en déduit que

$\boxed{\text{l'ordre minimal de } x \text{ est 2, } \operatorname{rg}(H_n(x)) = \min(n, 2) \text{ pour } n \text{ dans } \mathbf{N}^* \text{ et la relation de récurrence minimale de } x \text{ est } \forall n \in \mathbf{N}\ x_{n+2} = 2x_{n+1} - 2x_n.}$

PARTIE III - Valeurs propres des matrices de Hankel réelles

III.A - Préliminaires

III.A.1) Par construction M est une matrice symétrique réelle. Il résulte donc du théorème spectral qu'elle est orthodiagonalisable. En particulier $\boxed{\text{elle admet } n \text{ valeurs propres réelles.}}$

III.A.2) Soit λ un réel non nul, a dans $\mathbf{R}^{2n-2}$ et M une matrice de Hankel avec $M = H(a)$ et telle que $\operatorname{Spo}(M) = (\lambda, \dots, \lambda)$. Comme M est diagonalisable, il en résulte $M = \lambda I_n$. Comme $n \geq 3$, on en déduit $\lambda = m_{2,2} = a_2 = m_{1,3} = 0$. Donc

$\boxed{\text{le } n\text{-uplet } (\lambda, \dots, \lambda) \text{ n'est pas le } n\text{-uplet ordonné des valeurs propres d'une matrice de Hankel de taille } n.}$

III.B - Une première condition nécessaire

III.B.1) La somme des valeurs propres d'une matrice étant sa trace, on a directement $\boxed{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k}.}$

Comme M est diagonalisable, le spectre de M^2 est formé des éléments du spectre de M élevés au carré, avec multiplicité, et donc la somme des carrés des valeurs propres de M est la trace de M^2. Par construction on obtient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{k+j}^2 \right)$$

et tout revient donc à compter le nombre de façon d'obtenir un entier m sous la forme $j+k$ avec $0 \leq j,k \leq n-1$. Si m est dans $[\![0; n-1]\!]$, il y a $m+1$ façons, à savoir $m = j+(m-j)$ pour $0 \leq j \leq m$. Pour m dans $[\![n; 2n-2]\!]$, il y en a $2n-1-m$, à savoir $m = j+(m-j)$ pour $m-(n-1) \leq j \leq n-1$.

Il en résulte $\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2.}$

III.B.2) Le vecteur w est bien défini car les inverses qui interviennent le sont. On a alors par construction

$\langle v \,|\, w \rangle = \mathrm{Tr}(M)$ et donc $\boxed{\langle v \,|\, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.}$

De plus, par construction, on a

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n-1} (k+1)a_k^2 + \sum_{\substack{k=n \\ k \text{ pair}}}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2 \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_k^2 + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1)a_k^2 \end{aligned}$$

par positivité des termes rajoutés, et donc, d'après ce qui précède, $\boxed{\|v\|^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$

III.B.3) On étudie le coefficient de λ_i^2 et de $\lambda_i\lambda_j$ dans chacune des expressions, pour $1 \leq i,j \leq n$ avec $i \neq j$. Celui de λ_i^2 est $n-1$ de chaque côté car il y a $n-1$ paires $\{i,j\}$ avec $i \neq j$, d'une part, et puisque $\langle v \,|\, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ d'autre part. Celui de $\lambda_i\lambda_j$ est -2 de chaque côté car ce terme n'apparaît qu'une fois dans les développements de $(\lambda_i - \lambda_j)^2$ d'une part et de $\langle v \,|\, w \rangle^2$ d'autre part. On en déduit

$$\boxed{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 = n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 - \langle v \,|\, w \rangle^2.}$$

D'après ce qui précède et par définition de K_n, il s'agit de démontrer qu'on a $\langle v \,|\, w \rangle^2 \leq \|w\|^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$. Celà résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz d'une part et de la question précédente d'autre part :

$$\langle v \,|\, w \rangle^2 \leq \|w\|^2 \|v\|^2 \leq \|w\|^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

par positivité de $\|w\|^2$, i.e. $\boxed{\sum_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_i - \lambda_j)^2 \geq K_n \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.}$

III.B.4) Dans ce cas on a $p = 2$, puis $K_3 = 3 - 1 - \dfrac{1}{3} - 1 = \dfrac{2}{3}$ et la condition se récrit

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 + (\lambda_1 - \lambda_3)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)^2 \geq \frac{2}{3}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2)$$

soit

$$6(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2-\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3) \geq 2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2)$$

ce qui se siplifie en $\boxed{2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2) \geq 3(\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3).}$

III.C - D'autres conditions nécessaires

III.C.1) L'espace $\mathbf{R}^{2n-1}$ est somme directe des sous-espaces engendrés respectivement par e_p, (e_1, e_{2p-1}) et $(e_k)_{k\notin\{1,p,2p-1\}}$ et ceux-ci sont stables par B. Sur le premier et le dernier B est scalaire, sur le second c'est la symétrie qui échange e_1 et e_{2p-1}. On en déduit que

$\boxed{\text{le spectre ordonné de } B \text{ est } (1,0,\dots,0,-1,-2).}$

III.C.2) Au vu de la définition de B, on a

$$\mathrm{Tr}(AB) = a_{2p-2} - 2a_{2p-2} + a_{2p-2} = 0$$

et donc la formule admise donne directement

$$\lambda_n - \lambda_2 - 2\lambda_1 \leq 0 \leq \lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n$$

soit $\boxed{\lambda_1 - \lambda_{n-1} - 2\lambda_n \geq 0 \text{ et } 2\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_n \geq 0.}$

III.D - Cas $n = 3$

III.D.1) On remarque que $e_1 - e_3$ est vecteur propre pour la valeur propre $a - c$. Comme M est symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable et donc le plan d'équation $x_1 = x_3$ est stable. Une base en donnée par $(e_2, e_1 + e_3)$ et on a $Me_2 = ce_2 + b(e_1 + e_3)$ et $M(e_1 + e_3) = 2be_2 + (a + c)(e_1 + e_3)$, de sorte que la matrice M admet comme polynôme caractéristique $(X - a + c)(X^2 - (a + 2c)X + c(a + c) - 2b^2)$, puisque ce dernier est invariant par changement de base. On en déduit que les valeurs propres de M sont, avec multiplicités éventuelles, $\boxed{a-c,\ \dfrac{a+2c\pm\sqrt{a^2+8b^2}}{2}.}$

III.D.2) On cherche a, b et c de sorte qu'on ait $\lambda_1 = \dfrac{a+2c+\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$, $\lambda_2 = a-c$ et $\lambda_3 = \dfrac{a+2c-\sqrt{a^2+8b^2}}{2}$. Les deux équations en λ_1 et λ_3 sont équivalentes à $\lambda_1+\lambda_3 = a+2c$ et $\lambda_1-\lambda_3 = \sqrt{a^2+8b^2}$ puisque λ_1 est supposé supérieur à λ_3. Cette dernière équation est donc équivalente à $(\lambda_1-\lambda_3)^2 = a^2+8b^2$. Le système est donc équivalent à $a = \dfrac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3}$, $c = \dfrac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3}$ et $8b^2 = (\lambda_1-\lambda_3)^2 - a^2$. Or

$$(\lambda_1-\lambda_3)^2 - a^2 = (\lambda-1-\lambda_3-a)(\lambda_1-\lambda_3+a) = 4\frac{(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)}{9}$$

et comme chacun des termes du produit est positif, par hypothèse, on obtient

$$\boxed{a = \frac{\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3}{3},\ c = \frac{\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3}{3} \text{ et } b = \sqrt{\frac{(2\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_2-2\lambda_3)}{18}}.}$$

III.D.3) Dans le cas $n = 3$, il résulte de la question précédente que

$\boxed{\text{la condition (III.3) est nécessaire et suffisante.}}$

Pour un triplet ordonné $(\lambda, 1, 1)$, avec $\lambda \geq 1$, la condition (III.1) s'écrit $2\lambda^2 - 6\lambda + 1 \geq 0$ et la condition (III.3) s'écrit $\lambda \geq 3$. Puisque le polynôme $2X^2 - 6X + 1$ est strictement positif en 3, il prend des valeurs positives pour λ proche de 3, et donc en particulier pour certaines valeurs de λ strictement inférieures à 3. Comme la condition (III.3) est nécessaire et suffisante, il existe des valeurs de λ satisfaisant (III.1) pour lesquelles il n'existe aucune matrice de Hankel ayant $(\lambda, 1, 1)$ comme spectre ordonné. En particulier $\boxed{\text{la condition (III.1) n'est pas suffisante.}}$