

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES – PC

La partie II peut être abordée après la question 1 de la partie I.

Dans tout le problème, G_0 désigne le groupe multiplicatif des matrices carrées à coefficients réels, d'ordre deux et inversibles.

A tout élément x de \mathbf{R}^2 , avec $x = (x_1, x_2)$, on associe le carré de sa norme euclidienne, c'est-à-dire le nombre réel $x_1^2 + x_2^2$ et noté $\|x\|^2$.

– PARTIE I –

- .1) Si g est un élément de G_0 , avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et x est un élément de \mathbf{R}^2 , avec $x = (x_1, x_2)$, on note $g(x)$ le couple (y_1, y_2) défini par

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

et on désigne par $m(g)$ la borne inférieure de l'ensemble $\{\|g(x)\|^2 \mid x \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\}$; préciser pourquoi cette borne existe.

- .2) On se propose de montrer la proposition (P) suivante : $m(g)$ est un minimum, c'est-à-dire il existe un élément x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $\|g(x)\|^2 = m(g)$.

- a) On examine d'abord le cas où g est triangulaire supérieure (i.e. $c = 0$).

Montrer que l'ensemble des éléments x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tels que $\|g(x)\|^2$ soit inférieur ou égal à un nombre positif donné est un ensemble fini. En déduire que la proposition (P) est vérifiée dans ce cas.

- b) On examine le cas général. Montrer qu'il existe un nombre réel α tel que la matrice g_1 définie

par $g_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} g$ soit triangulaire supérieure; montrer qu'on a $m(g_1) = m(g)$ et

achever la démonstration de la proposition (P).

En déduire que $m(g)$ est strictement positif.

- .3) Désignant par a un nombre réel non nul, on étudie dans cette question le cas particulier où $g =$

$\begin{pmatrix} a & \frac{1}{2}a \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$. Soit (x_1, x_2) un élément de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; examinant successivement les cas où x_2 est nul,

impair, pair non nul, montrer qu'on a : $m(g) = \inf \left(a^2, \frac{4}{a^2}, \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} \right)$.

Tracer sur un même graphique les courbes représentatives, pour $u > 0$, des fonctions $u \rightarrow u$, $u \rightarrow \frac{4}{u}$ et $u \rightarrow \frac{u}{4} + \frac{1}{u}$ et en déduire $m(g) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ en précisant les valeurs de a pour lesquelles $m(g) = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

– PARTIE II –

Soit G l'ensemble des éléments de G_0 de déterminant égal à 1; G est un sous-groupe de G_0 .

On se propose de montrer que, pour toute matrice g de G , on a :

$$m(g) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

1) Soit \mathcal{H} l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire (notée Im) est strictement positive : $\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$.

a) Soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de G et soit z un nombre complexe tel que $cz + d \neq 0$. Montrer qu'on a

$$\text{Im} \left(\frac{az + b}{cz + d} \right) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

et en déduire que l'on peut définir une application, notée T_g , de \mathcal{H} dans lui-même par :

$$T_g(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

b) Montrer que, si g_1 et g_2 sont des éléments de G , on a :

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}.$$

2) Soit Γ l'ensemble des éléments de G dont les quatre coefficients sont dans \mathbf{Z} . Vérifier que Γ est un sous-groupe de G . On pose :

$$s = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit z un élément donné de \mathcal{H} .

a) Montrer que l'ensemble $\{\text{Im}(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ne comporte qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments strictement supérieurs à $\text{Im}(z)$. En déduire que cet ensemble admet un maximum. On note ce maximum $M(z)$.

b) Soit γ_0 un élément de Γ tel que $\text{Im}(T_{\gamma_0}(z)) = M(z)$.

Montrer, en considérant $T_{s\gamma_0}$, qu'on a $|T_{\gamma_0}(z)| \geq 1$.

Montrer, en considérant $T_{t\gamma_0}$, qu'il existe un élément γ_1 de Γ tel que $T_{\gamma_1}(z)$ ait sa partie imaginaire égale à $M(z)$ et sa partie réelle dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

En déduire qu'on a $M(z) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3) Soit g un élément de G . Montrer, en appliquant le dernier résultat ci-dessus au nombre complexe $T_g(i)$ (où ${}^t g$ désigne la transposée de g), qu'on a : $m(g) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

4) Proposer, en se ramenant au cas précédent, un majorant de $m(g)$ lorsque g appartient à G_0 .

DEUXIÈME COMPOSITION – ENSI PHYSIQUE MÉCA 1982

– PARTIE I –

.1) L'ensemble $\{\|g(x)\|^2 \mid x \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$ est une partie non vide de \mathbf{R} , minorée par 0. Il admet donc une borne inférieure : $m(g)$ existe.

.2) a) Soit x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ avec $x = (x_1, x_2)$, et g est un élément de G_0 , avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\|g(x)\|^2 = (ax_1 + bx_2)^2 + (cx_1 + dx_2)^2$. Soit alors A un réel strictement positif et $\alpha = \sqrt{A}$. On remarque

$$\|g(x)\|^2 \leq A \implies (|dx_2| \leq \alpha \text{ et } |ax_1 + bx_2| \leq \alpha).$$

Or $\det(g) = ad$, donc ni a , ni d ne sont nuls. Il vient donc, si $\|g(x)\|^2 \leq A$, $|x_2| \leq E \left(\frac{\alpha}{|d|} \right)$ où $E(x)$ est la partie entière de x .

Par inégalité triangulaire, on a aussi :

$$|ax_1| \leq |ax_1 + bx_2| + |bx_2| \leq \alpha \left(1 + \frac{|b|}{|d|} \right)$$

et donc, a étant non nul, $|x_1| \leq E \left(\frac{\alpha}{|a|} \left(1 + \frac{|b|}{|d|} \right) \right)$.

En conséquence, $\boxed{\text{le nombre de } x \text{ dans } \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tels que } \|g(x)\|^2 \leq A \text{ est fini.}}$

Or, par définition d'une borne inférieure, il existe un élément x_0 de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tel que $\|g(x_0)\|^2 \leq m(g) + 1$. Comme $m(g)$ est une borne inférieure d'une partie de \mathbf{R}_+ , il est positif et donc $m(g) + 1$ est strictement positif. On peut donc utiliser ce qui précède avec $A = m(g) + 1$: l'ensemble \mathcal{S} défini par $\mathcal{S} = \{x \in \mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \mid \|g(x)\|^2 \leq m(g) + 1\}$ est fini. Comme il est aussi non vide, on a $\inf \mathcal{S} = \min \mathcal{S}$. Soit donc x_1 dans \mathcal{S} qui réalise ce minimum. Pour x élément de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$ n'appartenant pas à \mathcal{S} , on a

$$\|g(x)\|^2 \geq m(g) + 1 \geq \|g(x_1)\|^2$$

et donc $m(g) = \inf \mathcal{S}$, i.e. $m(g) = \|g(x_1)\|^2$ et $\boxed{\text{la proposition (P) est vérifiée dans ce cas.}}$

b) On a

$$g_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -a \sin \alpha + c \cos \alpha & * \end{pmatrix}$$

et donc g_1 est triangulaire supérieure si et seulement si $-a \sin \alpha + c \cos \alpha = 0$.

Si a est nul, on pose $\alpha = \frac{\pi}{2}$ et sinon on pose $\alpha = \arctan \left(\frac{c}{a} \right)$. Et donc

$\boxed{\text{il existe un nombre réel } \alpha \text{ tel que la matrice } g_1 \text{ soit triangulaire supérieure.}}$

Soit r définie par $r = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$; alors r est la matrice d'une rotation et donc, pour tout élément y de \mathbf{R}^2 , on a $\|r(y)\|^2 = \|y\|^2$; en particulier pour tout élément x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$, en posant $y = g(x)$ il vient

$$\|g_1(x)\|^2 = \|r(y)\|^2 = \|y\|^2 = \|g(x)\|^2.$$

Comme $\det(r) = 1$, $\det(g_1) = \det(g) = 1$ et g_1 appartient à G . On peut appliquer ce qui précède à g_1 et on a $\boxed{m(g_1) = m(g)}$.

Or, d'après la question précédente, il existe x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tel que $m(g_1) = \|g_1(x)\|^2$ et donc

$$m(g) = m(g_1) = \|g_1(x)\|^2 = \|g(x)\|^2,$$

et donc $m(g)$ est un minimum, i.e. la proposition (P) est vraie.

Comme g est bijective et x est non nul, $g(x)$ est non nul donc il en va de même de sa norme. D'où

$$\boxed{m(g) > 0.}$$

.3) Soit x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ avec $x = (x_1, x_2)$. On distingue trois cas :

$x_2 = 0$. Alors $x_1 \neq 0$ et on a $g(x) = (ax_1, 0)$, donc $\|g(x)\|^2 = a^2x_1^2 \geq a^2 = \|g((1, 0))\|^2$ car x_1 est non nul.

$x_2 = 2n + 1$ avec n entier. Alors $\|g(x)\|^2 = a^2(x_1 + n + \frac{1}{2})^2 + \underbrace{\frac{(2n+1)^2}{a^2}}_{\geq \frac{1}{a^2}}$.

Comme $x_1 + n \in \mathbf{Z}$, on a $x_1 + n + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ ou $x_1 + n + \frac{1}{2} \leq -\frac{1}{2}$, donc $(x_1 + n + \frac{1}{2})^2 \geq \frac{1}{4}$.

Aussi a-t-on $\|g(x)\|^2 \geq \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2} = \|g((0, 1))\|^2$.

$x_2 = 2n$ avec n entier non nul. Alors $\|g(x)\|^2 = a^2(x_1 + n)^2 + \frac{4n^2}{a^2} \geq \frac{4}{a^2} = \|g((0, 2))\|^2$.

Il en résulte que pour tout élément de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $\|g(x)\|^2 \geq \min\left(a^2, \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2}, \frac{4}{a^2}\right)$. Ce minimum étant atteint en $(1, 0)$ ou $(0, 1)$ ou $(0, 2)$, c'est bien $m(g)$.

$$\boxed{\text{On a } m(g) = \min\left(a^2, \frac{a^2}{4} + \frac{1}{a^2}, \frac{4}{a^2}\right).}$$

On définit trois fonctions sur \mathbf{R}_+^* par $f_1 : u \mapsto u$, $f_2 : u \mapsto \frac{u}{4} + \frac{1}{u}$ et $f_3 : u \mapsto \frac{4}{u}$.

Pour u dans \mathbf{R}_+^* , on a :

$$f_1(u) - f_2(u) = \frac{3u}{4} - \frac{1}{u} = \frac{3}{4u} \left(u^2 - \frac{4}{3}\right)$$

$$f_2(u) - f_3(u) = \frac{u}{4} - \frac{3}{u} = \frac{1}{4u} (u^2 - 12)$$

et

$$f_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = f_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad f_2(2\sqrt{3}) = f_3(2\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Soit f la fonction $\min(f_1, f_2, f_3)$. On a donc

— sur $\left]0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right]$, $f = f_1$. Comme f_1 est strictement croissante, il vient $f \leq f_1\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sur cet intervalle et ce maximum est atteint en une unique valeur, à savoir $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

— sur $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}; 2\sqrt{3}\right]$, $f = f_2$. Comme f_2 est strictement convexe, ses valeurs maximales sont aux bornes.

Il vient $f \leq \max\left(f_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right), f_2(2\sqrt{3})\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et ce maximum est atteint en exactement deux valeurs, à savoir $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $2\sqrt{3}$.

— sur $[2\sqrt{3}; +\infty[$, $f = f_3$. Comme f_3 est strictement décroissante, il vient $f \leq f_3(2\sqrt{3}) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ sur cet intervalle et ce maximum est atteint en une unique valeur, à savoir $2\sqrt{3}$.

On a donc $f \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ et ce maximum est atteint uniquement en $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et $2\sqrt{3}$.

Il en résulte, d'après la question précédente, $m(g) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

De plus, $m(g) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ si et seulement si $a = \pm\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ ou $a = \pm\sqrt{2\sqrt{3}}$.

– PARTIE II –

.1) a) Comme $g \in G$, a, b, c et d sont réels et vérifient $ad - bc = 1$. Il vient

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{(az + b)(c\bar{z} + d)}{|cz + d|^2} = \frac{acz\bar{z} + bd + adz + cb\bar{z}}{|cz + d|^2} = \frac{ac|z|^2 + bd}{|cz + d|^2} + \frac{adz + cb\bar{z}}{|cz + d|^2}.$$

D'où $\text{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{(ad - bc)\text{Im}(z)}{|cz + d|^2} = \frac{\text{Im}(z)}{|cz + d|^2}$.

Soit z élément de \mathcal{H} , alors $cz + d$ est de partie imaginaire $c\text{Im}(z)$ et n'est donc réel que si c est nul. Dans ce cas sa partie réelle est d et, comme $ad - bc = 1$, d n'est pas nul. Par conséquent $cz + d$ est non nul donc $\frac{az + b}{cz + d}$ est bien défini. De plus, d'après ce qui précède, sa partie imaginaire est du même signe que celle de z et est donc strictement positive :

on peut définir une application de \mathcal{H} dans lui-même par : $T_g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$.

b) Soit g_1 et g_2 des éléments de G , avec $g_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ et $g_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$, et z un élément de \mathcal{H} .

Alors on a :

$$T_{g_1}T_{g_2}(z) = \frac{a_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + b_1}{c_1\frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2} + d_1} = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + a_1b_2 + b_1d_2}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + c_1b_2 + d_1d_2}.$$

Comme $g_1g_2 = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$, on a bien $T_{g_1}T_{g_2} = T_{g_1g_2}$.

.2) Puisque l'identité est à coefficients entiers, Γ est non vide. La formule donnée dans la question précédente montre que Γ est un sous-magma de G . Enfin puisque les éléments de G sont de déterminant 1, l'inverse d'un élément de G est la transposée de sa comatrice. Si donc g appartient à Γ , g^{-1} est aussi à coefficients entiers, i.e. Γ est stable par passage à l'inverse : Γ est un sous-groupe de G .

a) Soit $\gamma \in \Gamma$ avec $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a

$$\text{Im}(T_\gamma(z)) > \text{Im}(z) \Leftrightarrow |cz + d|^2 < 1 \Leftrightarrow (cx + d)^2 + (cy)^2 \leq 1.$$

D'où

$$\text{Im}(T_\gamma(z)) > \text{Im}(z) \Rightarrow \left(|c| < \frac{1}{y} \text{ et } |d| \leq |cz + d| + |cz| < 1 + |cz| \right).$$

La première condition n'est vérifiée que par un nombre fini (éventuellement nul) de valeurs entières de c et, pour chaque c , la seconde ne l'est que pour un nombre fini de valeurs de d . Il en résulte que

l'ensemble $\{\text{Im}(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ ne comporte qu'un nombre fini (éventuellement nul) d'éléments strictement supérieurs à $\text{Im}(z)$.

Si le nombre fini précédent est nul, un maximum de $\{\text{Im}(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ est $\text{Im}(z)$, qui est obtenu pour $\gamma = I_2$. Sinon le maximum de cet ensemble est le maximum de l'ensemble fini des valeurs qui sont strictement supérieures à $\text{Im}(z)$, maximum qui existe par finitude.

L'ensemble $\{\text{Im}(T_\gamma(z)) \mid \gamma \in \Gamma\}$ admet un maximum.

b) On a $s\gamma_0 = \begin{pmatrix} -c_0 & -d_0 \\ a_0 & b_0 \end{pmatrix}$ et donc

$$T_{s\gamma_0}(z) = -\frac{c_0z + d_0}{a_0z + b_0} = -\frac{1}{T_{\gamma_0}(z)} = -\frac{\overline{T_{\gamma_0}(z)}}{|T_{\gamma_0}(z)|^2},$$

d'où

$$\text{Im}(T_{s\gamma_0}(z)) = \frac{\text{Im}(T_{\gamma_0}(z))}{|T_{\gamma_0}(z)|^2} = \frac{M(z)}{|T_{\gamma_0}(z)|^2}.$$

Or cette quantité est majorée par $M(z)$ par définition de $M(z)$ puisque $s\gamma_0$ appartient à Γ . Il vient $|T_{\gamma_0}(z)| \geq 1$.

On a $T_t(z) = z + 1$ et donc, pour tout entier relatif n ,

$$T_{t^n\gamma_0}(z) = T_{t^n}T_{\gamma_0}(z) = T_{\gamma_0}(z) + n.$$

Il en résulte qu'on a, pour tout entier relatif n ,

$$\begin{cases} \text{Im}(T_{t^n\gamma_0}(z)) = \text{Im}(T_{\gamma_0}(z)) = M(z) \\ \text{Re}(T_{t^n\gamma_0}(z)) = \text{Re}(T_{\gamma_0}(z)) + n \end{cases}.$$

En posant $n = -E(\text{Re}(T_{\gamma_0}(z)) + 1/2)$ et $\gamma_1 = t^n\gamma_0$, $T_{\gamma_1}(z)$ a alors une partie imaginaire égale à $M(z)$ et une partie réelle dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Autrement dit

il existe un élément γ_1 de Γ tel que $T_{\gamma_1}(z)$ ait sa partie imaginaire égale à $M(z)$ et sa partie réelle dans l'intervalle $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

Il vient $1 \leq |T_{\gamma_1}(z)|^2 = (\text{Re}(T_{\gamma_1}(z)))^2 + M(z)^2 \leq M(z)^2 + \frac{1}{4}$, et donc $M(z)^2 \geq \frac{3}{4}$. Comme $M(z)$

est positif, $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq M(z)$

3) Soit a, b, c et d réels tels que $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Posons $z = T_g(i)$. On a donc $z = \frac{ai + c}{bi + d}$. Soit maintenant

γ_0 dans Γ , avec $\gamma_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}$, tel que $\text{Im}(T_{\gamma_0}(z)) = M(z)$. Alors, d'après la relation obtenue en début de partie :

$$\text{Im}(T_g(i)) = \frac{1}{b^2 + d^2} \text{ et } M(z) = \frac{1}{(b^2 + d^2)|c_0z + d_0|^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2},$$

soit $(b^2 + d^2)|c_0z + d_0|^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$. Or on a $c_0z + d_0 = c_0 \frac{ai + c}{bi + d} + d_0 = \frac{(c_0c + d_0d) + (c_0a + d_0b)i}{bi + d}$, d'où :

$$|g((c_0, d_0))|^2 = (b^2 + d^2)|c_0z + d_0|^2 = (c_0c + d_0d)^2 + (c_0a + d_0b)^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Comme $(c_0, d_0) \neq (0, 0)$, $m(g) \leq |g((c_0, d_0))|^2$ et il vient $m(g) \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

.4) Soit g dans G_0 avec $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Si $\det(g) > 0$, on pose $g_1 = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}g$ et alors, pour tout x de $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $g_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}}g(x)$ et ainsi $\|g(x)\|^2 = \det(g)\|g_1(x)\|^2$. Il en résulte $m(g) = \det(g)m_1(g)$, d'où $m(g) \leq \frac{2\det(g)}{\sqrt{3}}$.

Si $\det(g) < 0$, on pose $g_2 = \begin{pmatrix} -a & -b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\det(g_2) = -\det(g) > 0$ et, pour tout x dans $\mathbf{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, on a $\|g(x)\|^2 = \|g_2(x)\|^2$. Comme g_2 est dans G_0 , l'analyse précédente montre $m(g) = m(g_2) \leq \frac{-2\det(g)}{\sqrt{3}}$.

Pour tout g dans G_0 , on a $m(g) \leq \frac{2|\det(g)|}{\sqrt{3}}$.