

EXERCICE I

On admet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose, pour t dans \mathbf{R}_+^* , $f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$.

Q1. Justifier que la fonction f est intégrable sur \mathbf{R}_+^* puis, à l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

EXERCICE II

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbf{N} de loi de probabilité donnée par $\forall n \in \mathbf{N} p_n = \mathbf{P}(X = n)$, la fonction génératrice de X est donnée par $G_X(t) = \mathbf{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n$.

Q2. Démontrer que l'intervalle $] - 1; 1[$ est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction G_X .

Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans \mathbf{N} . On pose $S = X_1 + X_2$. Démontrer, pour tout t dans $] - 1; 1[$, $G_S(t) = G_{X_1}(t)G_{X_2}(t)$ par deux méthodes : l'une utilisant le produit de CAUCHY de deux séries entières et l'autre utilisant uniquement la définition : $G_X(t) = \mathbf{E}(t^X)$.

On généralise ce résultat, que l'on pourra utiliser dans la question suivante, à n variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans \mathbf{N} (on ne demande pas de preuve de cette récurrence).

Q3. Un sac contient quatre boules : une boule numérotée 0, deux boules numérotées 1 et une boule numérotée 2.

On effectue n tirages d'une boule avec remise et on note S_n la somme des numéros tirés. Déterminer pour tout t dans $] - 1; 1[$, $G_{S_n}(t)$ et en déduire la loi de S_n .

PROBLÈME

Introduction

Dans ce sujet une série de fonctions L_a est une série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ où $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels telle que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ admette un rayon de convergence égal à 1.

Partie I - Propriétés

Soit une série de fonctions $L_a : \sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Q4. Si x appartient à $] - 1; 1[$, donner un équivalent de $1 - x^n$ pour n au voisinage de $+\infty$.

Démontrer que pour tout x dans $] - 1; 1[$, la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge absolument.

Remarque : la série L_a peut parfois converger en dehors de l'intervalle $] - 1; 1[$. Donner un exemple de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ telle que la série L_a converge en au moins un x_0 n'appartenant pas à l'intervalle $] - 1; 1[$.

Q5. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$ converge uniformément sur tout segment $[- b; b]$ inclus dans l'intervalle $] - 1; 1[$.

Q6. On pose, pour tout x dans $] - 1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$.

Justifier que la fonction f est continue sur l'intervalle $] - 1; 1[$ et démontrer ensuite que la fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $] - 1; 1[$. Donner la valeur de $f'(0)$.

Q7. Expression sous forme de série entière.

On note $A = \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$.

Lorsque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est une famille sommable de réels, justifier
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right),$$

où $I_n = \{(k,p) \in A \mid kp = n\}$.

Démontrer que pour tout x dans $] - 1; 1[$, la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable. En déduire, pour

tout x dans $] - 1; 1[$, $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$ avec $b_n = \sum_{d \mid n} a_d$ ($d \mid n$ signifiant d divise n).

Partie II - Exemples

Q8. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = 1$ et on note d_n le nombre de diviseurs de n . Exprimer, pour x

dans $] - 1; 1[$, la fonction f donnée par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ comme la somme d'une série entière.

Q9. Dans cette question, pour $n \geq 1$, $a_n = \varphi(n)$ où $\varphi(n)$ est le nombre d'entiers naturels premiers avec n et inférieurs à n .

Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ admet 1 comme rayon de convergence.

On admet que pour $n \geq 1$, on a $n = \sum_{d \mid n} \varphi(d)$. Vérifier ce résultat pour $n = 12$.

Pour x dans $] - 1; 1[$, exprimer $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n}$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes.

Q10. En utilisant le théorème de la double limite, établir à l'aide du développement en série entière de la

fonction $x \mapsto \ln(1 + x)$ sur l'intervalle $] - 1; 1[$, la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Q11. Dans cette question et la suivante, pour $n \geq 1$, $a_n = (-1)^n$ et pour tout x dans $] - 1; 1[$, $f(x) =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}.$$

En utilisant le théorème de la double limite, calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x}$ et donner un équivalent de f au voisinage de 0 à droite. Retrouver le dernier résultat de la question Q6.

Q12. Démontrer qu'au voisinage de 1, on a $f(x) \sim \frac{\ln(2)}{x - 1}$.

On pourra remarquer, pour x dans $]0; 1[$, $\frac{1 - x}{1 - x^n} = \frac{1}{1 + x + \dots + x^{n-1}}$.

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CCINP 2019 – MP

EXERCICE I

Q 1. En tant que composée algébrique de fonctions de référence, f est continue là où elle est bien définie, i.e. sur \mathbf{R}_+^* , et y est donc localement intégrable. Au voisinage de 0, on a $f(t) \sim \frac{t}{1-1+t+o(t)} \sim 1$ et donc f est prolongeable par continuité en 0 et y est localement intégrable. Enfin au voisinage de $+\infty$, $f(t) = o(e^{-t/2})$ et donc par comparaison à une fonction de référence positive et intégrable en $+\infty$, f l'est aussi. Il en résulte que f est intégrable sur \mathbf{R}_+^* .

Pour t dans \mathbf{R}_+^* , on a $0 < e^{-t} < 1$ et donc On remarque que pour n dans \mathbf{N}^* , on a, par changement de variable et puisque la fonction donnée par $-(t+1)e^{-t}$ est une primitive de l'intégrande, $\frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} =$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} \text{ et donc } f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}.$$

$$\int_0^{+\infty} te^{-nt} dt = \frac{1}{n^2} \int_0^{+\infty} te^{-t} dt = \frac{1}{n^2}.$$

Les fonctions f_n définies sur \mathbf{R}_+^* par $f_n(t) = te^{-nt}$ sont donc positives et la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge,

on peut donc intégrer terme à terme et il vient $\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. En multipliant l'intégrande

au numérateur et au dénominateur par e^t , il vient $\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \frac{\pi^2}{6}$.

EXERCICE II

Q 2. Puisqu'une probabilité appartient à $[0; 1]$, on a $p_n = O(1)$ et donc, par comparaison, le rayon de convergence de $\sum p_n t^n$ est supérieur ou égal à 1. Étant inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, $] - 1; 1 [$ est inclus dans le domaine de définition de G_X .

On note pour n dans \mathbf{N} , $p_n = \mathbf{P}(X_1 = n)$ et $q_n = \mathbf{P}(X_2 = n)$, de sorte que le terme général de la série entière obtenue comme produit de CAUCHY de $\sum p_n t^n$ et de $\sum q_n t^n$ est donné par $\sum_{k=0}^n p_k q_{n-k}$,

i.e. $\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_1 = k) \mathbf{P}(X_2 = n - k)$. Par indépendance de X_1 et X_2 , on a

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_1 = k) \mathbf{P}(X_2 = n - k) = \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(X_1 = k, X_2 = n - k).$$

Par formule des probabilités totales cette dernière somme est égale à $\mathbf{P}(S = n)$, i.e. $\sum p_n t^n \cdot \sum q_n t^n = \sum \mathbf{P}(S = n) t^n$. Comme les deux séries entières dont on effectue le produit de CAUCHY ont un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, on en déduit $\forall t \in] - 1; 1 [, G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t)$.

Par ailleurs, pour t dans $] - 1; 1 [$, on a $t^S = t^{X_1} t^{X_2}$ et donc $G_S(t) = \mathbf{E}(t^{X_1} t^{X_2})$. Par indépendance de X_1 et X_2 , il résulte du lemme des coalitions qu'on a $G_S(t) = \mathbf{E}(t^{X_1}) \mathbf{E}(t^{X_2})$, i.e.

$$\forall t \in] - 1; 1 [, G_S(t) = G_{X_1}(t) G_{X_2}(t).$$

Q 3. On note $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ la suite de variables aléatoires telle que X_i soit le résultat du i^e tirage. On peut supposer que c'est une suite de variables i.i.d. de loi donnée par $\mathbf{P}(X_i = 0) = \mathbf{P}(X_i = 2) = \frac{1}{4}$ et $\mathbf{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$, i.e. $X_i \sim \mathcal{B}(\cdot, \frac{1}{2})$. On a donc, pour tout i dans $[[1; n]]$ et tout t dans $] -1; 1[$, $G_{X_i}(t) = \frac{1}{4}(1 + 2t + t^2) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^2$ et, d'après la question précédente, on a donc $G_{S_n}(t) = \left(\frac{t+1}{2}\right)^{2n}$. Il en résulte, pour k dans $[[0; 2n]]$, $\mathbf{P}(S_n = k) = \binom{2n}{k} 2^{-n}$ et donc S_n suit une loi binomiale de paramètres $2n$ et $\frac{1}{2}$.

PROBLÈME

Partie I - Propriétés

Q 4. Pour x dans $] -1; 1[$, on a $x^n = o(1)$ et donc $1 - x^n \sim 1$. On en déduit $a_n \frac{x^n}{1 - x^n} \sim a_n x^n$ et donc les séries $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ et $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ convergent absolument simultanément. Par définition du rayon de

convergence on en déduit que $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ converge absolument. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} x^n$ converge en 1, car c'est alors une série de RIEMANN convergente mais pas pour $x > 1$, car par croissances comparées elle est alors grossièrement divergente. Pour $x > 1$, on a $\frac{1}{n^2} \frac{x^n}{1 - x^n} \sim -\frac{1}{n^2}$ et donc L_a converge absolument pour $x > 1$ et $a_n = \frac{1}{n^2}$. En particulier L_a converge en un point extérieur à $] -1; 1[$.

Q 5. Soit b dans $]0; 1[$ et x dans $[-b; b]$, on a donc pour tout n dans \mathbf{N}^* , $|x^n| \leq b^n$, $|1 - x^n| \geq 1 - |x|^n \geq 1 - b^n$ et donc $\left| a_n \frac{x^n}{1 - x^n} \right| \leq |a_n| \frac{b^n}{1 - b^n}$. La convergence absolue de la série $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ en b assure donc

la convergence uniforme de $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ sur $[-b; b]$.

Q 6. La question précédente, jointe au fait que les fonctions $x \mapsto a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ sont rationnelles donc continues là où elles sont définies, et donc en particulier sur $] -1; 1[$, assure que f est somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur tout segment de $] -1; 1[$, et donc f est continue sur $] -1; 1[$.

Pour n dans \mathbf{N} on note $f_n(x) = a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$. Comme on a affaire à des fractions rationnelles définies sur $] -1; 1[$, elles y sont de classe C^∞ . En particulier f'_n est donnée par $f'_n(x) = na_n \frac{x^{n-1}}{(1 - x^n)^2}$. Soit b dans $]0; 1[$ et x dans $[-b; b]$, on a donc $|f'_n(x)| \leq n |a_n| \frac{b^{n-1}}{(1 - b^n)^2}$. Comme on a $n |a_n| \frac{b^{n-1}}{(1 - b^n)^2} \sim n |a_n| b^{n-1}$ et comme le rayon de convergence de la série dérivée $\sum_{n \geq 1} na_n x^{n-1}$ est identique à celui de la série d'origine, i.e. égal à 1, on en déduit successivement que la série $\sum_{n \geq 1} na_n b^{n-1}$ converge

absolument, que la série $\sum_{n \geq 1} f'_n(b)$ converge absolument puis que la série $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge uniformément sur $[-b; b]$. Le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions de classe C^1 s'applique donc puisque la série des dérivées converge uniformément sur tout segment de $] -1; 1[$ et la série initiale converge simplement. Il en résulte que f est de classe C^1 sur $] -1; 1[$ et que sa dérivée est

donnée par $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} na_n \frac{x^{n-1}}{(1-x^n)^2}$. En particulier $f'(0) = a_1$.

Q 7. On a $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{n\} \times \mathbf{N}^*$ et $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$, puisque tout couple dans A s'écrit (n, p) avec n dans \mathbf{N}^* et (n, p) dans $\{n\} \times \mathbf{N}^*$, et appartient à I_k avec $k = np$, donc k dans \mathbf{N}^* . De plus ces réunions sont disjointes par construction. Puisque $(u_{n,p})_{(n,p) \in A}$ est sommable et qu'on a affaire à des réunions dénombrables d'ensembles au plus dénombrables, le théorème de FUBINI, dit de sommation par paquets dans le

cas général, permet de conclure $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=1}^{+\infty} u_{n,p} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{(k,p) \in I_n} u_{k,p} \right)$. Pour x dans $] - 1; 1[$ et n

dans \mathbf{N}^* la famille $(a_n x^{np})_{p \in \mathbf{N}^*}$ est sommable car c'est une série géométrique de raison x^n . On a de plus $\sum_{p=1}^{+\infty} |a_n x^{np}| = |a_n| \frac{|x|^n}{1 - |x|^n}$. Comme cette famille est sommable puisque la série associée converge absolument, d'après la question Q4, il résulte du théorème de FUBINI-TONELLI dit de sommation par paquets dans le cas positif, que la famille $(a_n x^{np})_{(n,p) \in A}$ est sommable. Comme on a, pour n dans

\mathbf{N}^* , $\sum_{p=1}^{+\infty} a_n x^{np} = a_n \frac{x^n}{1 - x^n}$ et $\sum_{(k,p) \in I_n} a_k x^{kp} = b_n x^n$, l'égalité justifiée en début de question permet de

conclure $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$.

Partie II - Exemples

Q 8. Il résulte de la question Q7 que pour x dans $] - 1; 1[$, on a $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^n$.

Q 9. Comme on a $1 \leq a_n \leq n$ pour tout n dans \mathbf{N}^* , par comparaison, la série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ a un rayon de convergence inférieur à 1 et supérieur à 1, donc son rayon de convergence est 1. Pour $n = 12$, les diviseurs de n sont 1, 2, 3, 4, 6 et 12. On a $\varphi(1) = 1$, $\varphi(2) = 1$, $\varphi(3) = 2$, $\varphi(4) = 2$, $\varphi(6) = 2$ et $\varphi(12) = 4$. Comme $1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 4 = 12$, on a bien $\sum_{d|12} \varphi(d) = 12$. Il résulte de la question Q7

que pour x dans $] - 1; 1[$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$. On reconnaît x fois la dérivée de la somme

de $\sum x^n$, et il vient $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi(n) \frac{x^n}{1 - x^n} = \frac{x}{(1 - x)^2}$.

Q 10. Pour x dans $] - 1; 1[$ on a $-\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$. On pose, pour n dans \mathbf{N}^* et x dans $[0; 1]$,

$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n} x^n$. Pour x dans $[0; 1]$ la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est alternée et la valeur absolue de son terme général tend en décroissant vers 0. Il résulte du critère de LEIBNIZ, dit critère spécial pour les séries alternées, que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement et que pour tout N dans \mathbf{N}^* et tout x dans $[0; 1]$,

on a $\left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{x^N}{N} \leq \frac{1}{N}$. Il en résulte que $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[0; 1]$. Comme $\lim_{1^-} f_n = \frac{(-1)^n}{n}$, il résulte du théorème de la double limite que $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge et que sa somme

est égale à $\lim_{1^-} (-\ln(1+x))$, i.e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Remarque : c'est une conséquence directe du théorème d'ABEL radial.

Q 11. Pour n dans \mathbf{N}^* et x dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$ on pose $f_n(x) = (-1)^n \frac{x^{n-1}}{1-x^n}$. On a donc $\lim_0 f_n = -\delta_{n,1}$, où $\delta_{n,k}$ est le symbole de KRONECKER. Or, pour x dans $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$, on a $|f_n(x)| \leq \frac{2^{1-n}}{1-2^{-n}} \leq 2^{2-n}$ et donc, par comparaison à une série géométrique convergente, la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément

sur $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Il résulte du théorème de la double limite que $\lim_0 \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) = -1$. Comme la somme

est égale à -1 si $x = 0$ et à $\frac{f(x)}{x}$ si $0 < |x| \leq \frac{1}{2}$, on en déduit $\lim_0 \frac{f(x)}{x} = -1$. Par conséquent, au

voisinage de 0, on a $f(x) \sim x$. Par caractérisation de WEIERSTRASS de la dérivée, i.e. par caractérisation par le développement limité à l'ordre 1, on a donc $f(0) = 0$ et $f'(0) = -1$. Comme $a_1 = -1$, on retrouve $f'(0) = a_1$.

Q 12. La remarque de l'énoncé résulte de l'identité remarquable de BERNOULLI. On remarque également que pour x dans $]0; 1[$, $(1-x)f(x)$ est somme de la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ avec $f_n(x) = (-1)^n x^n \frac{1-x}{1-x^n}$. Il résulte de

la remarque de l'énoncé qu'on a $\lim_{1^-} f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n}$ et que $|f_n(x)|$ tend en décroissant vers 0, puisque son numérateur x^n décroît et tend vers 0 tandis que son dénominateur $1+x+\dots+x^{n-1}$ croît et est minoré par 1. On peut donc appliquer le critère de LEIBNIZ, dit critère spécial pour les séries alternées et obtenir, pour N dans \mathbf{N}^* et x dans $]0; 1[$,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} f_n(x) \right| \leq \frac{x^N}{1+x+\dots+x^{N-1}} \leq \frac{x^N}{Nx^{N-1}} \leq \frac{1}{N}$$

et donc la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur $]0; 1[$. Il résulte du théorème de la double limite

qu'on $\lim_{1^-} (1-x)f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, i.e. $f(x) \underset{1^-}{\sim} \frac{\ln(2)}{x-1}$.