Deuxième composition de mathématiques
Concours Communs Polytechniques – MP

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, .., e_n)$, $\mathscr{L}(E)$ la $\mathbf{R}$-algèbre des endomorphismes de E et $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E.
- S_n le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1; n]\!]$.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme** p sur E, i.e. si $x = (x_1, ..., x_n)$, $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Si N est une norme sur E, on dit qu'un endomorphisme u dans $\mathscr{L}(E)$ est une N-**isométrie** si, pour tout x dans E, $N(u(x)) = N(x)$. On note $\mathrm{Isom}(N)$ l'ensemble des N-isométries. L'objectif du problème est de montrer que les p-isométries pour $p \neq 2$ sont en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini (mais compact). Sur $\mathbf{R}^n$ la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.

PARTIE I

Soit N une norme sur E.

I.1) Montrer que $(\mathrm{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$.

I.2) On note $\Sigma(N) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer $u \in \mathrm{Isom}(N) \Leftrightarrow u\,(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

I.3) Dans cette question uniquement $n = 2$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \mathrm{V}ect\,(e_1 - e_2)$ et r la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$-isométries ?

PARTIE II

Dans cette partie p est un réel strictement supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. On appelle p-isométrie une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\mathrm{Isom}(p)$ le groupe des p-isométries.

II.1) Soit σ dans S_n et $\varepsilon = (\varepsilon_1 \ldots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma,\varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie, pour tout i dans $[\![1; n]\!]$, $u_{\sigma,\varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$. Montrer que $u_{\sigma,\varepsilon}$ est une p-isométrie.

II.2) **Inégalité de Hölder**

a) Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.

b) En déduire que pour tous vecteurs x et y de E, on a $|\langle x \mid y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle **l'inégalité de Hölder** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).

c) Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p-isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice A, matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

II.3) Montrer que pour tout j dans $[\![1;n]\!]$, $\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|^p$.

II.4) Soit x dans E. On note $\Sigma_q = \left\{ z \in E \;\middle|\; \|z\|_q = 1 \right\}$.

a) Montrer $\sup_{y\in\Sigma_q} |\langle x \,|\, y\rangle| \leq \|x\|_p$.

b) Soit i dans $[\![1;n]\!]$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i \,|x_i|^{p-1}\, \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et, si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, .., y_n)$. Montrer $|\langle x \,|\, y\rangle| = \|x\|_p$, puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max_{y\in\Sigma_q} |\langle x \,|\, y\rangle|$.

II.5) On note u^* l'élément de $\mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^{\mathrm{t}}A$.

a) Montrer que, pour tout (x, y) dans E^2, on a $\langle u(x) \,|\, y\rangle = \langle x \,|\, u^*(y)\rangle$.

b) En déduire que u^* est une q-isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |a_{ji}|^q$.

II.6) On suppose de plus $p \neq 2$.

a) Soit α_1, α_2, …, α_r des réels dans $[0; 1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^{r} \alpha_k^p = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k^q$. Montrer avec soin que, pour tout k dans $[\![1;r]\!]$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b) En déduire que, pour tout i et j dans $[\![1;n]\!]$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que deux valeurs différentes que l'on précisera.

c) Montrer que, lorsque $p \neq 2$, $\mathrm{Isom}(p)$ est un groupe fini dont on déterminera le cardinal.

On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p.

Deuxième composition de mathématiques
École Polytechnique – MP

On se propose de démontrer quelques propriétés des nombres irrationnels et de leurs approximations par des rationnels. On désigne par

— $\mathcal{E}$ l'ensemble des nombres réels irrationnels,

— $[z]$ la partie entière d'un nombre réel z et $\{z\}$ sa partie fractionnaire, i.e. $\{z\} = z - [z]$,

— G le groupe des matrices $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des entiers relatifs et $ad - bc = \pm 1$.

PARTIE I

I.1) Vérifier que, pour tout g dans G et tout x dans $\mathcal{E}$, le nombre $T_g(x)$ défini par $T_g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ existe et appartient à $\mathcal{E}$.

I.2) Soit g et g' dans G. Déterminer $T_{g'} \circ T_g$ et en déduire que T_g est une permutation de $\mathcal{E}$. À quelle condition a-t-on $T_g = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$?

PARTIE II

Dans cette partie, pour tout nombre réel x, on note $A(x)$ la matrice $\begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. On fixe une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $u_0 \in \mathbf{N}$ et $u_n \in \mathbf{N}^*$ pour $n > 0$. Enfin, on définit p_n et q_n par

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1)\ldots A(u_n)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

II.1) Vérifier que l'on a $p_n = u_n p_{n-1} + p_{n-2}$ et $q_n = u_n q_{n-1} + q_{n-2}$ pour $n \geq 2$.
On pose $r_n = p_n/q_n$.

II.2) Exprimer $r_n - r_{n-1}$ en fonction de q_n et q_{n-1}.

II.3) a) Montrer que les suites des termes d'indices pairs et impairs de (r_n) forment des suites adjacentes.

b) En déduire que la suite (r_n) admet une limite qu'on notera $\lambda(u)$.

c) Montrer que $\lambda(u)$ est irrationnel. [On pourra comparer $|\lambda(u) - r_n|$ et $1/q_n q_{n+1}$.]

d) Déterminer $[\lambda(u)]$.

PARTIE III

On dit qu'un nombre réel irrationnel x est <u>algébrique</u> s'il annule un polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ de degré supérieur ou égal à 2. On dit qu'un polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ est <u>irréductible</u> s'il est de degré au moins égal à 1 et s'il n'existe pas de polynômes Q et R dans $\mathbf{Q}[X]$ tels que $P = QR$ avec Q et R de degrés strictement inférieurs à celui de P.
Pour tout réel non entier x on pose $F(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$.

III.1) Montrer que l'itérée F^n est définie en x pour tout entier $n > 0$ si et seulement si $x \in \mathcal{E}$.

III.2) Soit x irrationnel et algébrique.

a) Montrer qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbf{Q}[X]$ irréductible, de degré ≥ 2, annulé par x et dont le coefficient dominant est 1. On notera P_x ce polynôme et d_x son degré.

b) Montrer que si x est irrationnel et algébrique, $T_g(x)$ l'est aussi, et comparer d_x et $d_{T_g(x)}$.

III.3) On considère une suite u telle que $u_0 \in \mathbf{N}$ et $u_n \in \mathbf{N}^*$ pour $n > 0$; on définit une suite u' par $u'_n = u_{n+1}$, laquelle définit à son tour des nombres p'_n, q'_n, r'_n et $\lambda(u')$.

a) Exprimer p_n et q_n en fonction de u_0, p'_{n-1}, q'_{n-1}.

b) Comparer $\lambda(u')$ et $F(\lambda(u))$.

c) On suppose la suite u périodique. Montrer que $\lambda(u)$ est algébrique et déterminer $d_{\lambda(u)}$.

d) Même question en supposant seulement la suite u périodique à partir d'un certain rang.

III.4) Soit x et y deux nombres réels irrationnels tels que, pour tout entier naturel k, $\left[F^k(x)\right] = \left[F^k(y)\right]$. Établir l'égalité, pour $n \geq 1$

$$y - x = (-1)^n(F^n(y) - F^n(x))\prod_{k=0}^{n-1}\left\{F^k(x)\right\}\cdot\left\{F^k(y)\right\} .$$

III.5) Soit x un réel positif irrationnel. Construire une suite u vérifiant $\lambda(u) = x$, et démontrer son unicité.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CCP 2007 – MP

PARTIE I

I.1) Soit u dans $\mathrm{Isom}(N)$ et x dans $\mathrm{Ker}(u)$. On a alors $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ et donc $x = 0$. Il en résulte que u est injective et donc, u étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $u \in \mathrm{GL}(E)$. Autrement dit $\mathrm{Isom}(N) \subset \mathrm{GL}(E)$. De plus Id_E est une N-isométrie et donc $\mathrm{Isom}(N)$ n'est pas vide.

Soit maintenant u et v dans $\mathrm{Isom}(N)$ et x dans E. Puisque $v \in \mathrm{Isom}(N)$, $v^{-1}(x)$ existe et on a $N(x) = N(v \circ v^{-1}(x)) = N(v^{-1}(x))$ et, puisque $u \in \mathrm{Isom}(N)$, $N(v^{-1}(x)) = N(u \circ v^{-1}(x))$, d'où $u \circ v^{-1} \in \mathrm{Isom}(N)$. Il en résulte que $\boxed{(\mathrm{Isom}(N), \circ) \text{ est un sous-groupe de } \mathrm{GL}(E).}$

I.2) Soit u dans $\mathrm{Isom}(N)$ et x dans $\Sigma(N)$, alors $N(u(x)) = N(x) = 1$ et, puisque $u^{-1} \in \mathrm{Isom}(N)$, $N(u^{-1}(x)) = N(x) = 1$. Il en résulte $u(x) \in \Sigma(N)$ et x est l'image d'un élément de $\Sigma(N)$ par u. Donc $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

Réciproquement, soit u dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$ et soit x dans E. On écrit $x = N(x)y$ avec y dans $\Sigma(N)$. Il vient $u(x) = N(x)u(y)$ et donc $N(u(x)) = N(x)N(y) = N(x)$, par homogénéité. $\boxed{\text{Pour } u \text{ dans } \mathscr{L}(E), \text{ on a } u \in \mathrm{Isom}(N) \Leftrightarrow u(\Sigma(N)) = \Sigma(N).}$

I.3) La sphère unité $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ est le carré de sommets $\pm e_i$, avec $1 \le i \le 2$. Comme r transforme ce carré en un carré différent, ayant $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ comme sommet, $\boxed{r \notin \mathrm{Isom}(\|\cdot\|_1).}$ Par contre la droite D étant une diagonale du carré, s laisse fixe $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ et donc $\boxed{s \in \mathrm{Isom}(\|\cdot\|_1).}$

PARTIE II

II.1) Soit x dans E avec $x = (x_i)_{1 \le i \le n}$ et $u = u_{\sigma,\varepsilon}$. On a donc

$$\|u(x)\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} \left|x_{\sigma^{-1}(i)}\right|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p = \|x\|_p^p$$

par réindexation, puisque σ est bijective. Autrement dit $\boxed{u_{\sigma,\varepsilon} \text{ est une } p\text{-isométrie.}}$

II.2) a) Soit a et b dans $\mathbf{R}_+$. Si a ou b est nul, on a $ab = 0$ et donc $ab \le \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. On suppose dorénavant a et b dans $\mathbf{R}_+^*$. Par concavité du logarithme, il vient

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \ge \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

et donc, par croissance de l'exponentielle $ab \le \dfrac{1}{p}a^p + \dfrac{1}{q}b^q$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ positifs ou nuls, on a } ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.}$$

b) Soit x et y dans E avec $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. On écrit $x = (x_i)_{1 \le i \le n}$ et $y = (y_i)_{1 \le i \le n}$. Pour i entier entre 1 et n, on a, d'après ce qui précède, $x_i y_i \le |x_i| . |y_i| \le \dfrac{1}{p}|x_i|^p + \dfrac{1}{q}|y_i|^q$ et donc, en sommant, $\langle x \mid y \rangle \le \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En appliquant ce qui précède à $-x$ et y, il vient $-\langle x \mid y \rangle \le 1$ et donc $|\langle x \mid y \rangle| \le 1 = \|x\|_p \|y\|_q$.

Dans le cas général, on écrit $x = \|x\|_p\, x'$ et $y = \|y\|_q\, y'$ avec $\|x'\|_p = 1$ et $\|y'\|_q = 1$ et il vient

$$|\langle x \mid y\rangle| = \|x\|_p \|y\|_q |\langle x' \mid y'\rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q \ .$$

D'où $\boxed{\text{l'inégalité de Hölder.}}$

c) Lorsque $p = 2$ $\boxed{\text{l'inégalité de Hölder est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.}}$

II.3) On a, pour j entier entre 1 et n, $\|u(e_j)\|_p = \|e_j\|_p = 1$ et donc $\boxed{\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1.}$ En sommant sur j, il vient $\boxed{\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = n.}$

II.4) Soit x dans E. On note $\Sigma_q = \left\{ z \in E \ \middle| \ \|z\|_q = 1 \right\}$.

a) D'après l'inégalité de Hölder, pour x dans E et y dans Σ_q, on a $|\langle x \mid y\rangle| \le \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p$. Par définition de la borne supérieure, puisque Σ_q est non vide, il vient $\boxed{\sup_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle| \le \|x\|_p.}$

b) Par construction, on a $y = 0$ si $x = 0$ et sinon, en notant $I = \{i \in [\![1;n]\!] \mid x_i \neq 0\}$, on a $I \neq \emptyset$ et

$$\langle x \mid y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \|x\|_p^{1-p} \sum_{i\in I} \varepsilon_i x_i |x_i|^{p-1} = \|x\|_p$$

et donc, par positivité, dans tous les cas $\boxed{|\langle x \mid y\rangle| = \|x\|_p.}$

Par ailleurs, si $x \neq 0$,

$$\|y\|_q^q = \|x\|_p^{q(1-p)} \sum_{i\in I} |x_i|^{q(p-1)} = \|x\|_p^{-p} \|x\|_p^p = 1$$

et donc

$$\sup_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle| \ge |\langle x \mid y\rangle| = \|x\|_p \ .$$

Cette dernière inégalité est directe si $x = 0$ puisque les termes sont tous nuls. Par double inégalité, il vient $\sup_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle| = |\langle x \mid y\rangle| = \|x\|_p$ et, puisque la borne est atteinte, $\boxed{\|x\|_p = \max_{y\in\Sigma_q} |\langle x \mid y\rangle|.}$

II.5) a) Soit x et y dans E et X et Y les vecteurs colonnes associés relativement à la base $\mathcal{B}$. On a donc $\langle u(x) \mid y\rangle = {}^{\mathrm{t}}(AX)Y = {}^{\mathrm{t}}X\,{}^{\mathrm{t}}AY$, i.e. $\boxed{\langle u(x) \mid y\rangle = \langle x \mid u^*(y)\rangle.}$

b) D'après ce qui précède, appliqué au couple d'exposants conjugués (q, p), on a, pour x dans E, par définition de u^* et puisque $u(\Sigma_p) = \Sigma_p$:

$$\|u^*(x)\|_q = \max_{y\in\Sigma_p} |\langle u^*(x) \mid y\rangle| = \max_{y\in\Sigma_p} |\langle x \mid u(y)\rangle| = \max_{y\in u(\Sigma_p)} |\langle x \mid y\rangle| = \max_{y\in\Sigma_p} |\langle x \mid y\rangle| = \|x\|_q \ ,$$

$\boxed{u^* \text{ est une } q\text{-isométrie.}}$

En appliquant le résultat de II.3, la somme des puissances q^{e} des modules des coefficients de la matrice de u^* dans $\mathcal{B}$ est égale à n. Il en résulte $\boxed{\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^q = n.}$

II.6) a) Pour α dans $]0;1[$, la fonction $t \mapsto \alpha^t$ est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$. Pour $\alpha \in \{0,1\}$, la même fonction est constante, donc décroissante au sens large. Comme $p \neq 2$, on a $p \neq q$ et donc les sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k^p$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{r}\alpha_k^q$ sont ordonnées à l'inverse de p et q. Si l'un des α_k est distinct de 0 et 1, alors les deux sommes sont strictement ordonnées. Par contraposée $\boxed{\text{pour tout } k \text{ dans } [\![1;r]\!],\ \alpha_k \text{ ne prend que les valeurs 0 ou 1.}}$

b) Puisque $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|^p = n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^q$, d'après II.3 et II.5b, il résulte de ce qui précède (avec $r = n^2$ et $a_{ij} = \alpha_{n(i-1)+j}$) que,

$\boxed{\text{pour tout } i \text{ et } j \text{ dans } [\![1;n]\!],\ |a_{ij}| \text{ ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1.}}$

c) D'après II.3, pour j dans $[\![1;r]\!]$, $\sum_{i=1}^{n}|a_{ji}|^p = 1$ et donc A est une matrice constituée de 0 et de ± 1, avec un seul élément non nul par colonne. Comme ${}^{\mathrm{t}}A$ est la matrice d'une q-isométrie avec $q \neq 2$, ${}^{\mathrm{t}}A$ a aussi cette propriété, i.e. A ne comporte qu'un seul élément non nul par ligne. Il en résulte que u est de la forme $u_{\sigma,\varepsilon}$ avec $\sigma \in S_n$ et $\varepsilon \in \{-1,+1\}^n$.

On a vu en II.1 que si u est de cette forme, alors $u \in \mathrm{Isom}(p)$. Il en résulte que $\mathrm{Isom}(p)$ est en bijection (ensembliste) avec $S_n \times \{-1,+1\}^n$ et est donc de cardinal $2^n n!$:

$\boxed{\mathrm{Isom}(p) \text{ est un groupe fini de cardinal } 2^n n!.}$

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – X 1999 – MP

PARTIE I

I.1) Soit g dans G et x dans $\mathcal{E}$. On écrit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, avec a, b, c et d entiers et $ad - bc = \pm 1$.

D'après cette dernière condition, on a $(c, d) \neq (0, 0)$ et donc $cX + d$ est un polynôme non nul de degré au plus 1. Puisque x est irrationnel, il n'est pas racine du polynôme à coefficients rationnels $cX + d$ et donc $T_g(x)$ est bien défini.

On a donc $(cx + d)T_g(x) = ax + b$ et aussi $(cT_g(x) - a)x + dT_g(x) - b = 0$. Si $T_g(x)$ était rationnel, puisque x n'est pas racine d'un polynôme non nul de degré au plus 1 et à coefficients rationnels, on aurait $cT_g(x) = a$ et $dT_g(x) = b$ et donc $ad - bc = 0$, ce qui est une contradiction.

$\boxed{\text{Pour tout } g \text{ dans } G \text{ et tout } x \text{ dans } \mathcal{E}, \text{ le nombre } T_g(x) \text{ existe et appartient à } \mathcal{E}.}$

I.2) On reprend les notations précédentes. Soit g' dans G et $g' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$. On a

$$\begin{aligned} T_{g'} \circ T_g(x) &= \frac{a'T_g(x) + b'}{c'T_g(x) + d'} \\ &= \frac{a'(ax + b) + b'(cx + d)}{c'(ax + b) + d'(cx + d)} \\ &= \frac{(a'a + b'c)x + a'b + b'd}{(c'a + d'c)x + c'b + d'd} \end{aligned}$$

et donc $\boxed{T_{g'} \circ T_g = T_{g'g}}$. Il en résulte $T_g \circ T_{g^{-1}} = T_{g^{-1}} \circ T_g = T_{\mathrm{Id}_2} = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ et donc T_g est bijective d'inverse $T_{g^{-1}}$, i.e. $\boxed{T_g \text{ est une permutation de } \mathcal{E}.}$

On a $T_g = Id_{\mathcal{E}}$ si et seulement si, pour tout x dans $\mathcal{E}$, $cx^2 + (d - a)x + b = 0$. Comme cette expression polynomiale a alors une infinité de zéros, il vient $b = c = a - d = 0$ et donc g est scalaire. Comme son déterminant est ± 1, on a $g = \pm I_2 = \pm 1_G$. La réciproque est vraie et donc $\boxed{T_g = Id_{\mathcal{E}} \text{ si et seulement si } g = \pm I_2.}$

PARTIE II

II.1) Soit $n \in \mathbf{N}$ avec $n \geq 2$. On a $A(u_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, de sorte que

$$\begin{pmatrix} p_{n-1} \\ q_{n-1} \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1)\dots A(u_{n-1}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1)\dots A(u_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = A(u_0)A(u_1)\dots A(u_n)I_2 = A(u_0)A(u_1)\dots A(u_n)$ et donc

$$\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} A(u_n) = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_{n-2} \\ q_{n-1} & q_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En comparant les premières colonnes, il vient
$\boxed{p_n = u_n p_{n-1} + p_{n-2} \text{ et } q_n = u_n q_{n-1} + q_{n-2} \text{ pour } n \geq 2.}$

II.2) Pour $n \geq 1$, on a $r_n - r_{n-1} = (p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n)/(q_n q_{n-1})$ de sorte qu'on a

$$r_n - r_{n-1} = \frac{\begin{vmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{vmatrix}}{q_n q_{n-1}} = \frac{\prod_{i=0}^n \det(A(u_i))}{q_n q_{n-1}},$$

d'où $\boxed{r_n - r_{n-1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{q_n q_{n-1}}.}$

II.3) a) Par définition, on a $q_0 = 1$ et $q_1 = u_1$. De la formule de récurrence, on déduit que (q_n) est une suite strictement positive, et donc strictement croissante à partir du rang 2 : $q_n \geq q_{n-1} + q_{n-2}$ (car $u_n \geq 1$) et donc $q_n \geq q_{n-1} + 1 > q_{n-1}$. Par conséquent, pour $n \geq 2$,

$$r_n - r_{n-2} = \frac{(-1)^n}{q_{n-1}} \left(\frac{1}{q_{n-2}} - \frac{1}{q_n} \right)$$

est du signe de $(-1)^n$. Donc (r_{2n}) est croissante tandis que (r_{2n+1}) est décroissante. Leur différence tend vers 0 puisque (q_n) est strictement croissante, donc tend vers l'infini.

$\boxed{\text{Les suites des termes d'indices pairs et impairs de } (r_n) \text{ forment des suites adjacentes.}}$

b) Les suites extraites d'indices pairs et impairs de (r_n) convergent vers une même limite et donc $\boxed{\text{la suite } (r_n) \text{ admet une limite.}}$

c) Puisque les suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) tendent vers $\lambda(u)$ en croissant et décroissant respectivement, on a, pour tout entier n,

$$|\lambda(u) - r_n| \leq |r_{n+1} - r_n| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}}.$$

Supposons $\lambda(u)$ rationnel. On dispose alors de a et b entiers, avec $b > 0$, tels que $\lambda(u) = \dfrac{a}{b}$ et la relation précédente s'écrit $|aq_n - bp_n| \leq \dfrac{b}{q_{n+1}}$ et donc, puisque (q_n) diverge vers l'infini, donne $|aq_n - bp_n| < 1$ à partir d'un certain rang. Comme on a affaire à des entiers, ceci impose $aq_n = bp_n$ et donc $r_n = \lambda(u)$. La suite (r_n) serait stationnaire, mais ce n'est pas le cas puisque, d'après ce qui précède, $r_n - r_{n-1}$ n'est jamais nul. Il en résulte que $\boxed{\lambda(u) \text{ est irrationnel.}}$

d) On a en particulier $r_0 < \lambda(u) < r_1 \leq r_0 + \dfrac{1}{q_0 q_1} \leq r_0 + 1$ et donc $[\lambda(u)] = r_0$, i.e. $\boxed{[\lambda(u)] = u_0.}$

PARTIE III

III.1) Soit x dans $\mathcal{E}$, alors $F(x) = T_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -[x] \end{pmatrix}}(x)$ et donc $F(x)$ est défini et est dans $\mathcal{E}$. Par une récurrence immédiate, les itérées de F sont toutes définies en x.

Sinon on dispose de a et b entiers avec $b > 0$ tels que $x = \dfrac{a}{b}$. Si $a = bq + r$ est la division euclidienne de a par b, $F(x)$ est défini si et seulement si $r \neq 0$ et alors $F(x) = \dfrac{b}{r}$. Il résulte de l'algorithme d'Euclide que les itérées de F^k sont définies si et seulement si l'algorithme d'Euclide a au moins $k+1$ itérations. En particulier

$\boxed{\text{l'itérée } F^n \text{ est définie en } x \text{ pour tout entier } n > 0 \text{ si et seulement si } x \in \mathcal{E}.}$

III.2) a) Soit I défini par $I = \{P \in \mathbf{Q}[X] \,|\, P(x) = 0\}$. On pourrait définir P_x comme le générateur unitaire de l'idéal I.

Plus concrètement on considère $X = \{\deg(P) \,|\, P \in I, P \neq 0\}$. Puisque x est algébrique et irrationnel, X est non vide et minoré par 2. Puisque c'est une partie de $\mathbf{N}$, X admet un élément minimal, que l'on note d. Soit Q de degré d appartenant à I et P le polynôme proportionnel à Q qui est unitaire. Comme $Q(x) = 0$, on a $P(x) = 0$, i.e. $P \in I$. Montrons que P est irréductible. Si $P = RS$ avec R et S dans $\mathbf{Q}[X]$, non nuls, de degrés strictement inférieurs à d, alors par intégrité de $\mathbf{Q}$, on a $R(x) = 0$ ou $S(x) = 0$ et ceci contredit la minimalité de d.

Montrons maintenant que P est unique avec ces propriétés. Soit R un autre polynôme de $\mathbf{Q}[X]$ irréductible, de degré ≥ 2, annulé par x et dont le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1. On divise R par P dans $\mathbf{Q}[X]$, ce qui est licite puisque $P \neq 0$, et on écrit $R = AP + B$ avec $\deg(B) < d$. De $R(x) = P(x) = 0$, on tire $B(x) = 0$ et donc, par minimalité de d, $B = 0$. Donc $R = AP$ et, puisque R est irréductible, $\deg(A) = 0$. Par égalité des coefficients dominants, il vient $R = P$.

$\boxed{\begin{array}{l}\text{Il existe un unique polynôme } P \text{ de } \mathbf{Q}[X] \text{ irréductible, de degré} \geq 2\text{, annulé par } x \text{ et dont} \\ \text{le coefficient du terme de plus haut degré est égal à 1.}\end{array}}$

b) Si x est irrationnel, $T_g(x)$ aussi. Si x est de plus algébrique, on a $P_x(x) = 0$ où P_x est le polynôme de la question précédente. Donc, en posant $y = T_g(x)$, $P_x(T_{g^{-1}}(y)) = 0$. Si $P = \sum_{k=0}^{d_x} \alpha_k X^k$, il vient, après multiplication par $(-cy + a)^{d_x}$,

$$\sum_{k=0}^{d_x} \alpha_k (dy - b)^k (-cy + a)^{d_x - k} = 0$$

et donc y est racine d'un certain polynôme de degré au plus d_x dont le coefficient de degré n est $\displaystyle\sum_{k=0}^{d_x} \alpha_k d^k (-c)^{d_x - k}$. Si $c = 0$, ce coefficient est $\alpha_{d_x} d^{d_x}$ et comme d est alors non nul, ce coefficient est non nul. Si $c \neq 0$, ce coefficient peut s'écrire $c^{d_x} P_x(-d/c)$ et est donc non nul puisque P_x ne saurait avoir de racine rationnelle, sinon il serait divisible par $X + d/c$ et donc ne serait pas irréductible sur $\mathbf{Q}[X]$.

Il en résulte que y est algébrique de degré au plus d_x. En appliquant le résultat à y et g^{-1}, il vient $d_x \leq d_y$ et donc, finalement,

$\boxed{\text{si } x \text{ est irrationnel et algébrique, } T_g(x) \text{ l'est aussi, et } d_x = d_{T_g(x)}.}$

III.3) a) Par définition, on a, pour $n \geq 1$,

$$\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = A(u_0) \begin{pmatrix} p'_n \\ q'_n \end{pmatrix}$$

et donc $\boxed{p_n = u_0 p'_{n-1} + q'_{n-1} \text{ et } q_n = p'_{n-1}}$.

b) La relation précédente donne, pour $n \geq 1$, $r_n = u_0 + \dfrac{1}{r'_{n-1}}$. Par passage à la limite, il en résulte $\lambda(u) = u_0 + \dfrac{1}{\lambda(u')}$, i.e. puisque $u_0 = [\lambda(u)]$, $\boxed{\lambda(u') = F(\lambda(u)).}$

c) Soit k la période de u. On pose $g = A(u_0) \cdots A(u_{k-1})$. Par périodicité, il vient pour $n \in \mathbf{N}$, $g \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+k} \\ q_{n+k} \end{pmatrix}$ et donc $r_{n+k} = T_g(r_n)$. En passant à la limite en n, il vient $\lambda(u) = T_g(\lambda(u))$.

Si $k = 1$, on a $g = A(u_0) \neq \pm I_2$. Sinon on a $g = \begin{pmatrix} p_{k-1} & p_{k-2} \\ q_{k-1} & q_{k-2} \end{pmatrix}$ et donc, puisque $q_{k-1} \neq 0$, $g \neq \pm I_2$. Si on note $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a donc $\lambda(u)(c\lambda(u) + d) = a\lambda(u) + b$, avec $c \neq 0$, de sorte que $\lambda(u)$ est racine d'un polynôme du second degré. Comme il est irrationnel, il n'est racine d'aucun polynôme de degré 1 et il vient $\boxed{\lambda(u) \text{ est algébrique et } d_{\lambda(u)} = 2.}$

d) Soit k le rang à partir duquel u est périodique et v la suite obtenue par translation des indices de k : $v_n = u_{n+k}$. La suite v est donc périodique et $\lambda(v)$ est donc algébrique de degré 2. De plus, d'après b), $\lambda(v) = F^k(\lambda(u))$.

Or, pour x dans $\mathcal{E}$, $F(x) = T_g(x)$ pour $g = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -[x] \end{pmatrix}$. On vérifie que $\det(g) = -1$, de sorte que $g \in G$. Comme G est un groupe, il en résulte qu'il existe h dans G tel que $F^k(\lambda(u)) = T_h(\lambda(u))$ et donc $\lambda(u) = T_{h^{-1}}(\lambda(v))$. D'après III.2.b), on en conclut que $\boxed{\lambda(u) \text{ est algébrique et } d_{\lambda(u)} = 2.}$

III.4) On note $a_k = \left[F^k(x)\right] = \left[F^k(y)\right]$ pour $k \geq 1$. On a $y - x = (y - a_1) - (x - a_1) = (x - a_1)(y - a_1)\left(\dfrac{1}{x - a_1} - \dfrac{1}{y - a_1}\right)$, i.e. $y - x = -(F(y) - F(x))\,\{x\}\,\{y\}$. Par une récurrence immédiate, on en déduit la formule

$$\boxed{\text{pour } n \geq 1, \quad y - x = (-1)^n (F^n(y) - F^n(x)) \prod_{k=0}^{n-1} \left\{F^k(x)\right\} \cdot \left\{F^k(y)\right\}.}$$

III.5) Puisque $[\lambda(u)] = u_0$, on a $[F^n(\lambda(u))] = u_n$ d'après III.3.b). Il en résulte que si une suite u vérifie $\lambda(u) = x$, alors nécessairement u est la suite $([F^n(x)])_{n \in \mathbf{N}}$, ce qui montre l'unicité de u.

On pose maintenant $u = ([F^n(x)])_{n\in\mathbf{N}}$. On a bien $u_0 \in \mathbf{N}$ puisque x est positif. De plus F est à valeurs dans $]1, +\infty[$ et donc $u_n \in \mathbf{N}^*$ pour $n \geq 1$. Par construction x et $\lambda(u)$ vérifient les hypothèses de la question précédente. On a donc, pour tout $n \geq 1$,

$$\lambda(u) - x = (-1)^n (F^n(\lambda(u)) - F^n(x)) \prod_{k=0}^{n-1} \left\{F^k(x)\right\} \left\{F^k(\lambda(u))\right\} \ .$$

Soit ε dans $\mathbf{R}_+$. Si pour tout n l'une au moins des parties fractionnaires de $F^n(x)$ et de $F^n(\lambda(u))$ est inférieure à $1-\varepsilon$, il vient $|\lambda(u) - x| \leq (1-\varepsilon)^n$ pour tout entier n et donc $x = \lambda(u)$. Sinon, on dispose d'un tel n et il vient $|\lambda(u) - x| \leq \varepsilon$. Cette alternative étant valable pour tout ε strictement positif, il en résulte $\lambda(u) = x$. $\boxed{\text{Il existe une unique suite } u \text{ vérifiant } \lambda(u) = x.}$