

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES – MP

Dans ce problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on note :

- E l'espace vectoriel \mathbf{R}^n muni de son produit scalaire canonique et rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathcal{L}(E)$ la \mathbf{R} -algèbre des endomorphismes de E et $\text{GL}(E)$ le groupe des automorphismes de E .
- $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ le \mathbf{R} -espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne, $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ la \mathbf{R} -algèbre des matrices carrées réelles de taille n , $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$, A^T sa matrice transposée.
- $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ le groupe des matrices orthogonales, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
- S_n le groupe des permutations de l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket$.

Si x_1, x_2, \dots, x_n sont des réels, on note $\text{diag}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels x_1, x_2, \dots, x_n dans cet ordre.

Si p est un réel supérieur ou égal à 1, on note $\|\cdot\|_p$ la **norme** p sur E , i.e. si $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$. On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme uniforme** sur E , i.e. si $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Une norme N sur E est dite euclidienne s'il existe un produit scalaire φ sur E tel que pour tout x dans E , $N(x) = \sqrt{\varphi(x, x)}$

Si N est une norme sur E , on dit qu'un endomorphisme u dans $\mathcal{L}(E)$ est une N -**isométrie** si, pour tout x dans E , $N(u(x)) = N(x)$. On note $\text{Isom}(N)$ l'ensemble des N -isométries. L'objectif du problème est de déterminer le nombre d'éléments de $\text{Isom}(N)$ dans le cas des normes euclidiennes puis des normes p .

PARTIE I - Description des normes euclidiennes

I.1) Identité du parallélogramme

- a) Démontrer que si N est une norme euclidienne alors elle vérifie l'identité du parallélogramme, c'est-à-dire pour tous vecteurs x et y de E , on a $(N(x+y))^2 + (N(x-y))^2 = 2[(N(x))^2 + (N(y))^2]$. En déduire que la norme $\|\cdot\|_\infty$ n'est pas euclidienne.
- b) Justifier que la norme $\|\cdot\|_2$ est euclidienne puis démontrer que pour $p \neq 2$, la norme $\|\cdot\|_p$ n'est pas euclidienne.

I.2) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de E , on note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ les matrices colonnes associées. Démontrer que si l'on pose $\langle x | y \rangle_S = X^T S Y$, alors $\langle \cdot | \cdot \rangle_S$ définit un produit scalaire sur E .

I.3) Soit φ un produit scalaire sur E et S la matrice de coefficients $(\varphi(e_i, e_j))$. Justifier, pour tous vecteurs x et y de E , $\varphi(x, y) = X^T S Y$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$.

On a donc démontré $\varphi = \langle \cdot | \cdot \rangle_S$.

Toute norme euclidienne peut donc s'écrire sous la forme : $N_S : x \mapsto \sqrt{X^T S X}$ avec $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ où X désigne la matrice colonne associée à x .

PARTIE II - Quelques généralités et exemples

Soit N une norme sur E .

II.1) Montrer que $(\text{Isom}(N), \circ)$ est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.

II.2) On note $\Sigma(N) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$, la sphère unité pour N . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer $u \in \text{Isom}(N) \Leftrightarrow u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

II.3) Dans cette question uniquement $n = 2$. On note s la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D = \text{Vect}(e_1 - e_2)$ et r la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{3}$. Les endomorphismes s et r sont-ils des $\|\cdot\|_1$ -isométries ?

II.4) Dans cette question uniquement $n = 3$. Si $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, on pose $q(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xz$, ce qui définit une forme quadratique q .

- On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice symétrique S dans $\mathcal{S}_3(\mathbf{R})$, telle que $q(x, y, z) = X^T S X$.
- Déterminer une matrice P dans $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$ et une matrice diagonale D dans $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$ telles que $S = P D P^T$.
- Justifier alors que l'application $N_q : (x, y, z) \mapsto \sqrt{q(x, y, z)}$ est une norme euclidienne sur \mathbf{R}^3 .
- Déterminer la nature géométrique de la quadrique $\Sigma(N_q)$ et en donner une équation simple dans une nouvelle base.
- Justifier que $\Sigma(N_q)$ est une surface de révolution, préciser un vecteur qui dirige son axe.
- Déduire de la question II.2, par une considération géométrique, que $\text{Isom}(N_q)$ a une infinité d'éléments.

PARTIE III - Étude de $\text{Isom}(N)$ lorsque N est une norme euclidienne

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on note $[u]_{\mathcal{B}}$ la matrice de u dans la base \mathcal{B} . Si N est une norme, on note $\text{ISOM}(N) = \{[u]_{\mathcal{B}} \mid u \in \text{Isom}(N)\}$. L'ensemble $\text{ISOM}(N)$ est par construction un groupe isomorphe à $\text{Isom}(N)$, c'est sa version matricielle.

III.1) Caractérisation matricielle des isométries euclidiennes

- Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$, N_S la norme euclidienne associée et $\langle \cdot | \cdot \rangle_S$ le produit scalaire associé. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est une N_S -isométrie si et seulement si pour tous vecteurs x et y de E , on a $\langle u(x) | u(y) \rangle_S = \langle x | y \rangle_S$.
- En déduire que u est une N_S -isométrie si et seulement si sa matrice A dans \mathcal{B} vérifie $A^T S A = S$.

III.2) Reconnaître alors $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$. Que peut-on dire du nombre d'éléments de $\text{ISOM}(\|\cdot\|_2)$? Justifier votre réponse.

III.3) Une application des polynômes interpolateurs

On désigne par $\mathbf{R}_r[X]$ le \mathbf{R} -espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à r . On se donne $r + 1$ réels $x_0 < x_1 < \dots < x_r$. On considère l'application linéaire u de $\mathbf{R}_r[X]$ vers \mathbf{R}^{r+1} définie par $P \mapsto (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_r))$.

- a) Déterminer le noyau de u . En déduire que pour tous réels y_0, y_1, \dots, y_r , il existe un unique polynôme L de $\mathbf{R}_r[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0; r \rrbracket$, $L(x_i) = y_i$ (un tel polynôme est appelé polynôme interpolateur).
- b) Application : soit n un entier naturel non nul et u_1, \dots, u_n des réels strictement positifs, on pose $U = \text{diag}(u_1, \dots, u_n)$ et $V = \text{diag}(\sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})$. Démontrer qu'il existe un polynôme L , à coefficients réels, tel que $V = L(U)$.

III.4) Racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$

- a) Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$. Déterminer une matrice A dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que $A^2 = S$. On dit que A est une racine carrée de S .
- b) Soit $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ une autre racine carrée de S . Démontrer qu'il existe un polynôme Q , à coefficients réels, tel que $A = Q(B)$. En déduire que A et B commutent.
- c) Démontrer que la somme de deux matrices symétriques définies positives est une matrice inversible.
- d) Déduire des questions précédentes que $A = B$ (on pourra calculer $(A + B)(A - B)$).
Désormais, on note \sqrt{S} l'unique racine carrée dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ de S .

III.5) Étude du groupe d'isométrie pour une norme euclidienne

Soit N une norme euclidienne. Il existe donc une matrice S dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ telle que pour tout $x \in E$, $N(x) = N_S(x) = \sqrt{X^T S X}$ où X est le vecteur colonne associée à x .

- a) Montrer que si $M \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$, la matrice $(\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ appartient à $\text{ISOM}(N_S)$
- b) Montrer que l'application ψ de $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ dans $\text{ISOM}(N_S)$ définie par $M \mapsto (\sqrt{S})^{-1} M \sqrt{S}$ est une bijection.

Le groupe d'isométrie d'une norme euclidienne est-il fini ?

PARTIE IV

Dans cette partie p est un réel strictement supérieur à 1, on appelle **exposant conjugué** de p l'unique réel q tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On appelle p -isométrie une isométrie pour la norme $\|\cdot\|_p$ et on note $\text{Isom}(p)$ le groupe des p -isométries.

- IV.1) a) Soit σ dans S_n et $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, +1\}^n$. On note $u_{\sigma, \varepsilon}$ l'endomorphisme de E qui vérifie, pour tout i dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $u_{\sigma, \varepsilon}(e_i) = \varepsilon_i e_{\sigma(i)}$. Montrer que $u_{\sigma, \varepsilon}$ est une p -isométrie.
- b) Écrire la matrice de $u_{\sigma, \varepsilon}$ dans la base canonique dans le cas où $n = 4$, $\sigma = (13)(24)$ et $\varepsilon = (1, 1, -1, 1)$.

IV.2) Inégalité de HÖLDER

- a) Montrer que pour tous réels a et b positifs ou nuls, on a $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On pourra utiliser la fonction logarithme népérien.
- b) En déduire que pour tous vecteurs x et y de E , on a $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q$. Ce résultat s'appelle l'**inégalité de HÖLDER** (on pourra d'abord démontrer l'inégalité lorsque $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$).
- c) Que devient l'inégalité si $p = 2$?

Dans toute la suite, u désigne une p -isométrie. On note (a_{ij}) les coefficients de la matrice A , matrice de u relativement à la base \mathcal{B} .

IV.3) Montrer que pour tout j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$. En déduire la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p$.

IV.4) Soit x dans E . On note $\Sigma_q = \{z \in E \mid \|z\|_q = 1\}$.

a) Justifier l'existence du réel $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle|$ et montrer $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle| \leq \|x\|_p$.

b) Soit i dans $\llbracket 1; n \rrbracket$; si $x_i \neq 0$, on pose $y_i = \varepsilon_i |x_i|^{p-1} \|x\|_p^{1-p}$ où ε_i désigne le signe de x_i et, si $x_i = 0$, on pose $y_i = 0$. On définit ainsi un vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$. Montrer $|\langle x | y \rangle| = \|x\|_p$, puis montrer l'égalité suivante : $\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle|$.

IV.5) On note u^* l'élément de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base \mathcal{B} est A^T .

a) Montrer que, pour tout (x, y) dans E^2 , on a $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$.

b) En déduire que u^* est une q -isométrie. Donner alors, en justifiant, la valeur de $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q$.

IV.6) On suppose de plus $p \neq 2$.

a) Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des réels dans $[0; 1]$ vérifiant $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p = \sum_{k=1}^r \alpha_k^q$. Montrer avec soin que, pour tout k dans $\llbracket 1; r \rrbracket$, α_k ne prend qu'un nombre fini de valeurs à déterminer.

b) En déduire que, pour tout i et j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que deux valeurs différentes que l'on précisera.

c) Montrer que, lorsque $p \neq 2$, $\text{Isom}(p)$ est un groupe fini dont on déterminera le cardinal.

On remarquera en particulier que ce cardinal est indépendant de p .

On vient de démontrer que les p -isométries pour $p \neq 2$ sont en nombre fini, contrairement aux isométries euclidiennes qui forment un groupe infini (mais compact). Sur \mathbf{R}^n la géométrie euclidienne est donc plus riche que celle des normes p pour $p \neq 2$.

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES – CCP 2007 – MP

PARTIE II

II.1) Soit u dans $\text{Isom}(N)$ et x dans $\text{Ker}(u)$. On a alors $N(x) = N(u(x)) = N(0) = 0$ et donc $x = 0$. Il en résulte que u est injective et donc, u étant un endomorphisme d'un espace de dimension finie, $u \in \text{GL}(E)$. Autrement dit $\text{Isom}(N) \subset \text{GL}(E)$. De plus Id_E est une N -isométrie et donc $\text{Isom}(N)$ n'est pas vide.

Soit maintenant u et v dans $\text{Isom}(N)$ et x dans E . Puisque $v \in \text{Isom}(N)$, $v^{-1}(x)$ existe et on a $N(x) = N(v \circ v^{-1}(x)) = N(v^{-1}(x))$ et, puisque $u \in \text{Isom}(N)$, $N(v^{-1}(x)) = N(u \circ v^{-1}(x))$, d'où $u \circ v^{-1} \in \text{Isom}(N)$. Il en résulte que $\boxed{(\text{Isom}(N), \circ) \text{ est un sous-groupe de } \text{GL}(E)}$.

II.2) Soit x dans $\Sigma(N)$, alors $N(u(x)) = N(x) = 1$ et, puisque $u^{-1} \in \text{Isom}(N)$, $N(u^{-1}(x)) = N(x) = 1$. Il en résulte $u(x) \in \Sigma(N)$ et x est l'image d'un élément de $\Sigma(N)$ par u . Donc $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$.

Réciproquement. on suppose $u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)$. Soit x dans E . On écrit $x = N(x)y$ avec y dans $\Sigma(N)$. Il vient $u(x) = N(x)u(y)$ et donc $N(u(x)) = N(x)N(y) = N(x)$, par homogénéité.

$\boxed{\text{Pour } u \text{ dans } \mathcal{L}(E), \text{ on a } u \in \text{Isom}(N) \Leftrightarrow u(\Sigma(N)) = \Sigma(N)}$.

II.3) La sphère unité $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ est le carré de sommets $\pm e_i$, avec $1 \leq i \leq 2$. Comme r transforme ce carré en un carré différent, ayant $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ comme sommet, $\boxed{r \notin \text{Isom}(\|\cdot\|_1)}$. Par contre la droite D étant une diagonale du carré, s laisse fixe $\Sigma(\|\cdot\|_1)$ et donc $\boxed{s \in \text{Isom}(\|\cdot\|_1)}$.

PARTIE IV

IV.1) Soit x dans E avec $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $u = u_{\sigma, \varepsilon}$. On a donc

$$\|u(x)\|_p^p = \sum_{i=1}^n |x_{\sigma^{-1}(i)}|^p = \sum_{i=1}^n |x_i|^p = \|x\|_p^p$$

par réindexation, puisque σ est bijective. Autrement dit $\boxed{u_{\sigma, \varepsilon} \text{ est une } p\text{-isométrie}}$.

IV.2) a) Soit a et b dans \mathbf{R}_+ . Si a ou b est nul, on a $ab = 0$ et donc $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. On suppose dorénavant a et b dans \mathbf{R}_+^* . Par concavité du logarithme, il vient

$$\ln\left(\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q\right) \geq \frac{1}{p}\ln(a^p) + \frac{1}{q}\ln(b^q) = \ln(ab)$$

et donc, par croissance de l'exponentielle $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$. Il en résulte que

$$\boxed{\text{pour tous réels } a \text{ et } b \text{ positifs ou nuls, on a } ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q}$$

b) Soit x et y dans E avec $\|x\|_p = \|y\|_q = 1$. On écrit $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour i entier entre 1 et n , on a, d'après ce qui précède, $x_i y_i \leq |x_i| \cdot |y_i| \leq \frac{1}{p}|x_i|^p + \frac{1}{q}|y_i|^q$ et donc, en sommant, $\langle x | y \rangle \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En appliquant ce qui précède à $-x$ et y , il vient $-\langle x | y \rangle \leq 1$ et donc $|\langle x | y \rangle| \leq 1 = \|x\|_p \|y\|_q$.

Dans le cas général, on écrit $x = \|x\|_p x'$ et $y = \|y\|_q y'$ avec $\|x'\|_p = 1$ et $\|y'\|_q = 1$ et il vient

$$|\langle x | y \rangle| = \|x\|_p \|y\|_q |\langle x' | y' \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q .$$

D'où l'inégalité de HÖLDER.

c) Lorsque $p = 2$ l'inégalité de HÖLDER est l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

IV.3) On a, pour j entier entre 1 et n , $\|u(e_j)\|_p = \|e_j\|_p = 1$ et donc $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$. En sommant

sur j , il vient $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = n$.

IV.4) a) Puisque Σ_q est une sphère unité pour une norme et que E est de dimension finie, il résulte du théorème de HEINE-BOREL que Σ_q est compact. Soit φ l'application de E dans \mathbf{R} donnée par $y \mapsto |\langle x | y \rangle|$. Si on munit E de la norme $\|\cdot\|_q$, l'inégalité de HÖLDER montre que φ est $\|x\|_p$ -lipschitzienne et donc continue. La continuité ne dépendant pas de la norme choisie, puisque E est de dimension finie, il résulte du théorème de WEIERS-TRASS que φ est bornée et atteint son maximum sur le compact non vide Σ_q . Autrement dit

le réel $\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle|$ est bien défini.

D'après l'inégalité de HÖLDER, pour x dans E et y dans Σ_q , on a $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_q = \|x\|_p$. Par définition de la borne supérieure, puisque Σ_q est non vide, il vient

$$\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle| \leq \|x\|_p .$$

b) Par construction, on a $y = 0$ si $x = 0$ et sinon, en notant $I = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid x_i \neq 0\}$, on a $I \neq \emptyset$ et

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \|x\|_p^{1-p} \sum_{i \in I} \varepsilon_i x_i |x_i|^{p-1} = \|x\|_p$$

et donc, par positivité, dans tous les cas $|\langle x | y \rangle| = \|x\|_p$.

Par ailleurs, si $x \neq 0$,

$$\|y\|_q^q = \|x\|_p^{q(1-p)} \sum_{i \in I} |x_i|^{q(p-1)} = \|x\|_p^{-p} \|x\|_p^p = 1$$

et donc

$$\max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle| \geq |\langle x | y \rangle| = \|x\|_p .$$

Cette dernière inégalité est directe si $x = 0$ puisque les termes sont tous nuls. Par double inégalité, il vient

$$\|x\|_p = \max_{y \in \Sigma_q} |\langle x | y \rangle| .$$

IV.5) a) Soit x et y dans E et X et Y les vecteurs colonnes associés relativement à la base \mathcal{B} . On a donc $\langle u(x) | y \rangle = (AX)^T Y = X^T A^T Y$, i.e. $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$.

- b) D'après ce qui précède, appliqué au couple d'exposants conjugués (q, p) , on a, pour x dans E , par définition de u^* et puisque $u(\Sigma_p) = \Sigma_p$:

$$\|u^*(x)\|_q = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle u^*(x) | y \rangle| = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x | u(y) \rangle| = \max_{y \in u(\Sigma_p)} |\langle x | y \rangle| = \max_{y \in \Sigma_p} |\langle x | y \rangle| = \|x\|_q ,$$

u^* est une q -isométrie.

En appliquant le résultat de II.IV.3, la somme des puissances q^e des modules des coefficients

de la matrice de u^* dans \mathcal{B} est égale à n . Il en résulte $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q = n$.

- IV.6) a) Pour α dans $]0; 1[$, la fonction $t \mapsto \alpha^t$ est strictement décroissante sur $[1; +\infty[$. Pour $\alpha \in \{0, 1\}$, la même fonction est constante, donc décroissante au sens large. Comme $p \neq 2$, on a $p \neq q$ et donc les sommes $\sum_{k=1}^r \alpha_k^p$ et $\sum_{k=1}^r \alpha_k^q$ sont ordonnées à l'inverse de p et q . Si l'un des α_k est distinct de 0 et 1, alors les deux sommes sont strictement ordonnées. Par contraposée pour tout k dans $\llbracket 1; r \rrbracket$, α_k ne prend que les valeurs 0 ou 1.

- b) D'après IV.3, pour j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$ et donc les coefficients de A sont à valeurs dans $[0; 1]$. Puisque $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = n = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n |a_{ji}|^q$, d'après IV.3 et IV.5b, il résulte de ce qui précède (avec $r = n^2$ et $a_{ij} = \alpha_{n(i-1)+j}$) que,

pour tout i et j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $|a_{ij}|$ ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1.

- c) D'après IV.3, pour j dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, $\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^p = 1$ et donc A est une matrice constituée de 0 et de ± 1 , avec un seul élément non nul par colonne. Comme A^T est la matrice d'une q -isométrie avec $q \neq 2$, A^T a aussi cette propriété, i.e. A ne comporte qu'un seul élément non nul par ligne. Il en résulte que u est de la forme $u_{\sigma, \varepsilon}$ avec $\sigma \in S_n$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}^n$. On a vu en IV.1 que si u est de cette forme, alors $u \in \text{Isom}(p)$. Il en résulte que $\text{Isom}(p)$ est en bijection (ensembliste) avec $S_n \times \{-1, +1\}^n$ et est donc de cardinal $2^n n!$:

$\text{Isom}(p)$ est un groupe fini de cardinal $2^n n!$.