Lycée Lesage MP

MATHÉMATIQUES

DEVOIR EN TEMPS LIBRE 7

7 mars 2023 – À rendre pour le 21 mars 2023

CCINP 2007 & 2014 – MP (premières compositions)
Questions 1 à 8 obligatoires

Merci d'indiquer sur chacune des copies (de préférence doubles) : le nom de la personne ayant rédigé, celui de son binôme éventuel et enfin celui de la personne ayant corrigé.

Chaque membre d'un binôme doit rendre une copie séparée, afin de faciliter la correction.

Première composition de mathématiques
CCINP 2007 – MP

EXERCICE I

On considère la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par : $f(x,y) = \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}$

Q1. On pose $F = [0;1] \times [0;1]$; justifier que la fonction f est bornée sur F et y atteint sa borne supérieure. On pose alors $M = \sup\limits_{(x,y)\in F} f(x,y)$.

Q2. Démontrer que si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert $]0;1[\times]0;1[$, alors nécessairement $M = 3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$.

Q3. Déterminer le maximum de la fonction f sur la frontière de F et le comparer à $3\dfrac{\sqrt{3}}{8}$. Déterminer M.

Première composition de mathématiques
CCINP 2014 – MP

EXERCICE II

Soit a et b deux fonctions continues sur $\mathbf{R}$, on note l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0 \,.$$

On note $I = \mathbf{R}_+^*$, $J = \mathbf{R}_-^*$, S^+ l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle I et S^- l'espace vectoriel des solutions de (E) sur l'intervalle J.
L'objectif de cet exercice est d'étudier la dimension de l'espace vectoriel S des fonctions y de classe C^2 sur $\mathbf{R}$ vérifiant (E) sur $\mathbf{R}$ tout entier.

Q4. Donner la dimension des espaces S^+ et S^-.

Q5. On note φ l'application linéaire de S vers $S^+ \times S^-$ définie par $\varphi(f) = (f_I, f_J)$ où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J.
Donner le noyau de l'application φ et en déduire $\dim(S) \leq 4$.

Q6. Dans cette question, on considère $a(x) = x$ et $b(x) = 0$, d'où

$$(E) : \quad x^2y'' + xy' = 0 \,.$$

Determiner S^+ et S^-.
Determiner ensuite S et donner sans détails la dimension de S.

Q7. Dans cette question $(E) : \quad x^2y'' - 6xy' + 12y = 0$. Déterminer deux solutions sur I de cette équation de la forme $x \mapsto x^\alpha$ (α réel).
En déduire S^+ puis S^-.
Determiner S et donner la dimension de S.

Q8. Donner un exemple d'équation différentielle du type $(E) : \quad x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim(S) = 0$ (on détaillera).
On pourra, par exemple, s'inspirer de la question précédente.

Première composition de mathématiques – CCINP 2007 – MP

EXERCICE I

Q1. La fonction F est une fraction rationnelle partout définie, elle est donc de classe C^∞ et en particulier continue. Comme un produit de segments est compact,

$\boxed{\text{l'assertion résulte du théorème de Weierstrass dit des bornes atteintes.}}$

Q2. Comme F est de classe C^1, si elle admet un extrémal local en (x,y), avec (x,y) dans l'ouvert $]0;1[\times]0;1[$, son gradient s'y annule. Comme on a $\nabla F(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{1-x^2-2xy}{(1+x^2)^2(1+y^2)} \\ \dfrac{1-y^2-2xy}{(1+x^2)(1+y^2)^2} \end{pmatrix}$, il est alors nécessaire d'avoir $2xy = 1-x^2 = 1-y^2$. En particulier $x=y$ car x et y sont positifs, et donc $x=y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Dans ce cas on a $F(x,y) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{9}{16}$. Par conséquent, si la borne supérieure est atteinte en un point de l'ouvert $]0;1[\times]0;1[$, alors nécessairement $\boxed{M = 3\dfrac{\sqrt{3}}{8}.}$

Q3. Les points de la frontières sont obtenus pour $x=0$, $x=1$, $y=0$ ou $y=1$. Par symétrie on peut simplement étudier les cas $x=0$ et $x=1$, i.e. les maxima sur $[0;1]$ des expressions $\dfrac{t}{1+t^2}$ et $\dfrac{1+t}{2(1+t^2)}$. La dérivée de la seconde expression s'annule si et seulement si $2t(1+t) = 1+t^2$, i.e. $t^2+2t-1=0$ ou encore $t = \pm\sqrt{2}-1$. Comme la seconde est toujours supérieure à la première, qu'elle prend la valeur $\frac{1}{2}$ en 0 et 1, et la valeur $\dfrac{\sqrt{2}}{8-4\sqrt{2}}$, i.e. $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4}$, en l'unique zéro de sa dérivée sur $]0;1[$, et enfin qu'on a $\sqrt{2}>1$ et donc $\dfrac{1+\sqrt{2}}{4} > \dfrac{1}{2}$ $\boxed{\text{le maximum de } f \text{ sur la frontière de } F \text{ est } \dfrac{1+\sqrt{2}}{4}.}$ Comme $2(1+\sqrt{2}) < 2+3 = 5 < \sqrt{27}$, on a $\boxed{\dfrac{1+\sqrt{2}}{4} < 3\dfrac{\sqrt{3}}{8} \text{ et donc } M = 3\dfrac{\sqrt{3}}{8}.}$

Première composition de mathématiques
CCINP 2014 – MP

EXERCICE II

Q4. Sur I ou J, l'équation (E) est équivalente à l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 $y'' + \dfrac{a(x)}{x^2}y' + \dfrac{b(x)}{x^2} = 0$ et donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on a $\boxed{\dim(S^+) = \dim(S^-) = 2.}$

Q5. Soit f dans S telle que f_I et f_J soient nulles. Alors par continuité en 0, f est nulle en 0 et donc f est nulle sur S, i.e. $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = 0.}$ Le théorème du rang assure $\dim(S) = \operatorname{rg}(\varphi)$. Comme $\operatorname{rg}(\varphi) \leq \dim(S^+) + \dim(S^-)$, il résulte de la question précédente $\boxed{\dim(S) \leq 4.}$

Q6. Pour x non nul, l'équation équivaut à $xy'' + y' = 0$. En reconnaissant la dérivée de la fonction donnée par $xy'(x)$, on en déduit $\boxed{S^+ = \left\{ I \to \mathbf{R}, x \mapsto a + b\ln(x) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}}$ et

$\boxed{S^- = \left\{ J \to \mathbf{R}, x \mapsto a + b\ln(|x|) \;\middle|\; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.}$ Pour qu'une fonction dans S^- ou S^+ admette une limite en 0, il faut qu'elle soit constante et pour que cette limite soit la même, il faut que ces constantes soient identiques. On en déduit que si f est dans S alors f_I et f_J sont constantes égales à une même constante. Réciproquement si f est constante, elle est solution de (E), i.e.

$\boxed{S \text{ est l'ensemble des fonctions constantes sur } \mathbf{R}}$ et $\boxed{\dim(S) = 1.}$

Q7. Soit α réel et y donné par $y(x) = x^\alpha$ sur I. Alors y est de classe C^∞ et on a $xy' = \alpha y$ et $x^2 y'' = \alpha(\alpha-1)y$. Il en résulte que y appartient à S si et seulement si $\alpha(\alpha-1) - 6\alpha + 12 = 0$. Deux solutions sur I de (E) sont données par $\boxed{x \mapsto x^\alpha \text{ avec } \alpha = 3 \text{ ou } \alpha = 4.}$ Ainsi, puisqu'on a affaire à deux solutions indépendantes dans un espace de dimension 2, par exemple parce que leur wronskien en 1 vaut 1, $\boxed{S^+ = \left\{ I \to \mathbf{R}, x \mapsto ax^3 + bx^4 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.}$ On vérifie que les fonctions données par x^3 et x^4 sont également solutions sur J. Comme elles sont indépendantes dans un espace de dimension 2, par exemple parce que leur wronskien en -1 vaut 1, $\boxed{S^- = \left\{ J \to \mathbf{R}, x \mapsto ax^3 + bx^4 \;\middle|\; (a,b) \in \mathbf{R}^2 \right\}.}$ Soit f dans S^+ et g dans S^-. Alors f, f' et f'', resp. g, g' et g'', admettent des limites à droite, resp. à gauche, en 0, toutes nulles. Il en résulte que la fonction donnée par $y(x) = f(x)$ si $x > 0$, $y(x) = 0$ si $x = 0$ et $y(x) = g(x)$ si $x < 0$ est continue sur $\mathbf{R}$ et y est de classe C^2 d'après le théorème de la limite de la dérivée appliqué à y puis y'. Elle vérifie (E) sur I et J par construction, et également en 0 car (E) y est équivalente à $y = 0$. En utilisant les fonctions données par $\frac{x \pm |x|}{2}$, qui valent x sur I (resp. J) et 0 sur son complémentaire, on obtient $\boxed{S = \left\{ \mathbf{R} \to \mathbf{R}, x \mapsto ax^3 + bx^4 + cx^2\,|x| + dx^3\,|x| \;\middle|\; (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \right\}}$ et donc $\boxed{\dim(S) = 4.}$

Q8. On applique l'idée précédente de façon à obtenir des solutions pour $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$. On pose donc $\boxed{(E) \quad x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0.}$ On vérifie que les fonctions données par $\dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x^2}$ sont solutions de (E) et donc, puisque leur wronskien en 1 est -1, elles forment une base de S^+. Soit f dans S, alors f_I est donnée par $f_I(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x^2}$ avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Mais (E) impose aussi $f(0) = 0$ et donc f_I doit avoir une limite à droite en 0, égale à 0. Ceci impose $a = b = 0$ et $f_I = 0$. Mutatis mutandis on obtient que f_J est donnée par $f_J(x) = \dfrac{c}{x} + \dfrac{d}{x^2}$ avec $(c,d) \in \mathbf{R}^2$, puis $c = d = 0$ et $f_J = 0$. On en déduit $f = 0$ et donc $\boxed{\dim(S) = 0.}$