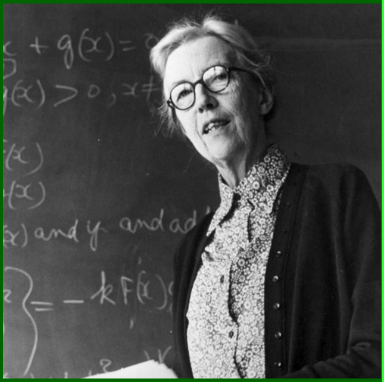
CHAPITRE

9

L^1 – Sommabilité



Dame Mary CARTWRIGHT est une mathématicienne britannique, née en 1900 et décédée en 1998. Elle accomplit sa thèse sous la direction de Godfrey HARDY en étudiant les zéros des fonctions entières. Dans ce domaine elle obtient un résultat majeur, répondant à une conjecture de John LITTLEWOOD sur le module d'une fonction analytique ne prenant jamais plus de p fois la même valeur.

En 1938 elle commence à travailler en réponse à une demande du Radio Research Board sur la dynamique d'une équation différentielle apparaissant dans des modélisations de l'étude de la radio et des radars. Ses travaux, avec LITTLEWOOD, influencent grandement la direction prise par la théorie moderne des systèmes dynamiques et du chaos. En parlant de ce qui est maintenant courant d'appeler l'effet papillon, LITTLEWOOD écrit

For something to do we went on and on at the thing with no earthly prospect of results ; suddenly the whole vista of the dramatic fine structure of solutions stared us in the face.

Mary CARTWRIGHT simplifie également grandement la démonstration d'HERMITE de l'irrationnalité de π et c'est cette démonstration qui est maintenant enseignée.

Elle est la première femme a recevoir la Médaille SYLVESTER et à être présidente de la London Mathematical Society. Elle est annoblie par la Reine en 1969 Dame Commander of the Order of the British Empire.

Programme

- Critère des séries alternées : signe et encadrement des restes. La transformation d'ABEL est hors-programme.
- Série absolument convergente. Cas des séries matricielles. Convergence. Le critère de CAUCHY est hors programme. Les séries sont avant tout un outil.
- Famille sommable de nombres complexes (exclusivement en vue du cours de probabilités). Somme. Cas $I = \mathbf{N}$. Invariance par permutation (démonstration non exigible). Linéarité de la somme. Sommation par paquets (démonstration hors programme). Cas $I = \mathbf{N}^2$. Produit de CAUCHY de deux séries absolument convergentes.
- Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe ; de la somme de deux endomorphismes qui commutent (démonstration non exigible).
- Espace des fonctions intégrables d'un intervalle quelconque I dans $\mathbf{K}$.
- Changement de variable bijectif et de classe C^1. Les étudiant·e·s peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).
- Intégration par parties sur un intervalle quelconque : l'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $[fg]_a^b$.
- Sommation des relations de comparaison pour les séries numériques et les fonctions à valeurs dans $\mathbf{K}$: domination, négligeabilité, équivalence. La fonction de référence est positive, la suite l'est à partir d'un certain rang.

1 Introduction

Les séries sont l'outil universel pour le calcul depuis NEWTON et LEIBNIZ. Si on sait depuis CANTOR que tout nombre est une suite, il serait plus exact de dire que c'est une suite d'approximations et que c'est donc de séries dont il faut parler. Même les fractions continues sont en fait des séries, même si les points de suspension ne sont pas là où on peut les trouver dans les développements en série de fonctions, comme chez EULER, TAYLOR, MACLAURIN. Les fractions continues sont une façon d'approcher les nombres par suites adjacentes et c'est LEIBNIZ qui énonce le critère relatif aux séries alternées ainsi obtenues.

L'approche est très féconde et Johann Heinrich LAMBERT (1728–1777) en tirera profit pour démontrer l'irrationalité de π, à partir de l'écriture

$$\tan(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cdots}}}$$

Les espaces vectoriels de séries convergentes ne sont pas les plus pertinents puisqu'il semble difficile d'y définir une norme en rapport avec la somme des séries. D'où l'intérêt des espaces de séries absolument convergentes et plus généralement de familles sommables. La somme d'une telle série a également toutes les propriétés d'une somme, et notamment l'associativité.

2 Transformation d'Abel et intégration par parties

Exemple 9 - 1

Série harmonique alternée – Bernhard RIEMANN - 1854

On écrit

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\right) \end{aligned}$$

et on en déduit que la somme est nulle, alors qu'elle est manifestement supérieure à $\frac{1}{2}$. La raison de ce paradoxe est la divergence de la série des termes impairs et de celle des termes pairs. Soit α dans $\mathbf{R}$. On se donne n minimal tel que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} > \alpha$$

ce qui est possible puisque la série considérée diverge vers $+\infty$. Une fois n choisi, on se donne m minimal tel que

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \cdots - \frac{1}{2m} < \alpha$$

et on construit ainsi, de proche en proche, un réarrangement de la série harmonique alternée qui donne naissance à deux suites adjacentes de limite α. Autrement dit, en effectuant les opérations dans un ordre bien choisi la somme $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$ peut être égale à α, et ce pour tout α réel (et même $\pm\infty$). Cet exemple conduira à la notion de convergence absolue.

Ainsi la sommation (des séries ou des intégrales) n'est pas vraiment une somme au sens de l'addition. En effet l'addition est commutative, mais dans la définition des série l'ordre des termes est important : les sommes infinies ne sont pas commutatives, du moins a priori.

Remarque 9 - 1

D'après le théorème de TONELLI ce genre de phénomène ne se produit pas pour les séries à termes positifs. On verra qu'il ne se produit pas non plus lorsque la convergence est absolue, i.e. si $\sum \|u_n\|$ converge. C'est cette notion qui permet de construire une théorie solide en commençant par remarquer, mais ce n'est pas évident, que la convergence absolue entraîne la convergence simple. L'outil pour démontrer cela est la compacité.

Proposition 9 - 1

Dérivation discrète

Soit $\sum u_n$ une série et (S_n) la suite de ses sommes partielles, i.e. $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

On a $u_n = \Delta(S)_{n-1}$, i.e. $u_0 = S_0$ et $u_n = S_n - S_{n-1}$ pour $n \geq 1$.

Tout comme dérivation et intégration sont des opérations (quasi-)réciproques pour les fonctions, leurs analogues discrets le sont, i.e. opérateur de différence (de Newton) et sommation (partielle).

Remarque 9 - 2

Si la série converge, alors les suites (S_n) et (S_{n-1}) convergent vers la même limite et donc $\lim u_n = 0$ et la suite des restes $\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est bien définie et tend vers 0.

On en déduit en particulier un critère de divergence.

Proposition 9 - 2

Divergence grossière
Soit $\sum u_n$ une série. Si (u_n) ne converge pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

Danger

Insistons sur le fait que la convergence de (u_n) vers 0 n'entraîne pas la convergence de la série $\sum u_n$. Par exemple $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ou $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ sont des séries divergentes.

Remarque 9 - 3

La série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est quant à elle convergente. En effet on peut écrire

$$-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n}} = -\frac{1}{(\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1})\sqrt{2n}\sqrt{2n+1}} \sim -(2n)^{-3/2}$$

et on peut raisonner ensuite sur les sommes partielles paires et impaires. Les premières sont des sommes partielles d'une série convergente, par comparaison à une série de Riemann, les secondes en diffèrent par un $o(1)$ et donc on a bien la convergence de toutes les sommes partielles vers la même limite.

On a en fait affaire à des suites adjacentes. Les deux suites adjacentes sont regroupées en une seule série, dont les termes sont alternativement de signes contraires. La monotonie des deux suites revient alors à la décroissance (en valeur absolue) du terme général de la série et la limite de la différence des termes des deux suites est donc la limite du terme général de la série.

Théorème 9 - 1

Critère de Leibniz - Critère spécial des séries alternées - 1682
Soit $\sum(-1)^n a_n$ une série à termes réels avec $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite décroissante de limite nulle (et donc positive). Alors la série est convergente et sa somme est encadrée par ses sommes partielles. Plus précisément, soit $S = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$, S_n la somme partielle $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k$ et R_n le reste d'indice n, i.e. $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k$ (ce qui est licite car cette série converge), alors

$$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |R_n| = |S - S_n| \leq a_{n+1}\,.$$

Démonstration. Les suites extraites de (S_n) d'indices pairs et impairs sont adjacentes car, pour n dans $\mathbf{N}$, on a

$$S_{2n+2} - S_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0 \quad S_{2n+3} - S_{2n+1} = -a_{2n+3} + a_{2n+2} \geq 0$$

et

$$S_{2n+1} - S_{2n} = -a_{2n+1} \to 0 \ .$$

La convergence de la série s'ensuit. De plus, pour tout entier naturel n, par adjacence on a $S_{2n} \geq S_{2n+2} \geq S \geq S_{2n+1}$, d'où $0 \geq S - S_{2n} \geq -a_{2n+1}$ et $0 \leq S - S_{2n+1} \leq a_{2n+2}$, d'où l'assertion. □

Remarques 9 - 4

Bien sûr le signe peut être l'opposé, i.e. la série peut s'écrire $\sum (-1)^{n+1} a_n$.

De même on peut faire partir la sommation à partir d'un autre rang que 0, comme dans le cas de la série harmonique alternée.

Danger

La décroissance est fondamentale et ne souffre aucun à peu près. Par exemple un équivalent ne suffit pas ! La série $\sum \left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \right)$ est obtenue comme somme d'une série convergente et d'une série divergente et est donc divergente. Pourtant son terme général est équivalent à celui de $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, qui est convergente. On en dégage deux contre-exemples : la nécessité de la décroissance pour appliquer le critère de Leibniz et le fait que deux séries à termes quelconques peuvent avoir des termes généraux équivalents et ne pas être de même nature.

Remarque 9 - 5

Si $a_n \sim b_n$ alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature lorsque les séries sont à termes positifs. On en conclut alors que la convergence absolue de ces deux séries est simultanée, i.e. $\sum \|a_n\|$ converge si et seulement si $\sum \|b_n\|$ converge.

Exemples 9 - 2

La série harmonique alternée, i.e. $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, est convergente tout comme la série

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots$$

On peut calculer leurs sommes grâce aux développements de Taylor avec reste de Laplace ou de Lagrange. On a

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots = \ln(2) \quad \text{et} \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots = \frac{\pi}{4} \ .$$

Un autre exemple fondamental est celui du développement en série de l'exponentielle. On peut démontrer qu'elle converge sans utiliser la formule de Taylor, avec reste de Laplace ou de Lagrange, en la comparant à une série géométrique.

Proposition 9 - 3

Exponentielle

La série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x.

Démonstration. Si x est positif ou nul, on se donne n tel que $x \leq n+1$ et alors, pour k dans $\mathbf{N}$, on a $0 \leq \dfrac{x^{n+k}}{(n+k)!} \leq \dfrac{x^n}{n!}\left(\dfrac{x}{n+1}\right)^k$ et donc, par comparaison d'une série à termes positifs avec une série géométrique, à savoir $\sum\limits_k \left(\dfrac{x}{n+1}\right)^k$, la série exponentielle converge.

Si x est strictement négatif, la série exponentielle est alternée. La valeur absolue de son terme général est $|x|^n/n!$ et le rapport de deux termes successifs est $|x|/(n+1)$ et la série exponentielle vérifie donc le critère de Leibniz à partir du rang $[\,|x|\,]$. □

Exemple 9 - 3

Intégrale de Dirichlet

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est semi-convergente.

En 0, la fonction $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité et donc elle est localement intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Pour n dans $\mathbf{N}$, soit a_n l'intégrale sur le segment $[n\pi; (n+1)\pi]$. Il vient

$$a_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+n\pi}\,\mathrm{d}x$$

et ceci est le terme général d'une série alternée satisfaisant au critère de Leibniz, puisque l'intégrande est positif et décroissant en fonction de n.

Soit maintenant u dans $\mathbf{R}_+$ et n la partie entière de u/π. Alors, toujours par positivité de l'intégrande, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{u} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ est comprise entre les sommes partielles d'indice n et $n+1$ de $\sum a_k$ et donc l'intégrale considérée converge et on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+n\pi}\,\mathrm{d}x\ .$$

Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1805 – 1859, mathématicien allemand, est le beau-frère de Fanny Mendelssohn-Hensel et Felix Mendelssohn et donc grand-oncle par alliance du mathématicien Kurt Hensel. Son patronyme vient de la déformation de *le jeune de Richellette*, sa famille ayant émigré depuis la commune belge, proche de Liège, de Ritchele.

Une méthode très performante pour l'étude des séries de produits est la transformation d'Abel, qui est une sorte d'intégration par parties discrète. Elle a les mêmes utilités que son analogue continu : ramener l'étude au cas positif ou absolument convergent, notamment en tirant partie de la monotonie.

On considère $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries, p et q des entiers naturels, avec $p \leq q$. On a $\Delta(ab)_n = \begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n \\ b_n & b_{n+1} \end{vmatrix} = b_{n+1}\Delta a_n + a_n \Delta b_n$ et donc, par sommation entre p et q,

Propriété 9 - 1

Intégration par parties discrète - Transformation d'Abel

$$\sum_{k=p}^{q} a_k (\Delta b)_k = a_{q+1}b_{q+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^{q} (\Delta a)_k b_{k+1}\ .$$

L'analogie est frappante avec l'intégration par partie puisqu'on peut l'écrire

$$\sum_{k=p}^{q} a_k(\Delta b)_k = [ab]_p^{q+1} - \sum_{k=p}^{q}(\Delta a)_k b_{k+1} \ .$$

En prenant $a_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n\pi}\,\mathrm{d}x$ et $(b_n) = (0,1,0,1,0,\dots)$, de sorte qu'on a $\Delta b_n = (-1)^n$, la récriture ci-dessus exhibe la série associée à l'intégrale de DIRICHLET comme somme d'un terme tendant vers 0 car (b_n) est bornée et $\lim a_n = 0$, et d'un terme associé à la série de terme général $\pi \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{(x+2n\pi)(x+(2n+1)\pi)}\,\mathrm{d}x$, à savoir un terme positif dans $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Pour poursuivre le rapprochement avec l'intégration par parties, on peut développer le même argument directement sur les intégrales.

Exemple 9 - 4

Intégrale de DIRICHLET

On a $\displaystyle\int \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\cos(x)}{x} + \int \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$. Or la seconde intégrale est donnée par une fonction positive, prolongeable par continuité en 0 et dans $\mathrm{O}_{+\infty}\left(x^{-2}\right)$, donc intégrable en $+\infty$. Il en résulte, puisque la fonction donnée par $\dfrac{1-\cos(x)}{x}$ admet des limites en 0 et en $+\infty$, que l'intégrale de DIRICHLET existe et qu'on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x \ .$$

En passant on obtient directement la positivité, également obtenue par les suites adjacentes.

On dipose en fait d'un critère (hors-programme) généralisant la critère de LEIBNIZ.

Proposition 9 - 4

(♠) Règle d'ABEL

Soit (a_n) est une suite de réels décroissante de limite nulle et $\sum u_n$ une série à valeurs réelles dont les sommes partielles sont bornées par M. Alors $\sum a_n u_n$ converge et, pour p et q entiers naturels avec $p \leq q$, on a

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k u_k\right| \leq 2Ma_p \ .$$

Démonstration. On écrit la transformation d'ABEL avec $u_n = \Delta b_n$. Par hypothèse (b_n) est donc borné par M et la majoration finale en découle par inégalité triangulaire et négativité de Δa_k :

$$\left|\sum_{k=p}^{q} a_k u_k\right| \leq a_{q+1}M + a_p M - M\sum_{k=p}^{q}\Delta a_k = 2Ma_p$$

Il en résulte que la série considérée est bornée et admet donc une suite extraite convergente, disons vers ℓ. Soit alors $\varepsilon > 0$. On dispose de N entier tel que pour $p \geq N$ on a $2Ma_{p+1} < \varepsilon$, car $a_n = \mathrm{o}(1)$, et alors on dispose de $q > p$ tel que $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{q} a_k u_k - \ell\right| < \varepsilon$ par définition de ℓ. Il en en résulte $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{p} a_k u_k - \ell\right| < \varepsilon$, ce qui conclut. □

3 Sommabilité

Dans ce chapitre E et F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie, souvent égaux à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. La norme est notée $\|\cdot\|$ sauf mention explicite du contraire.

Définition 9 - 1

Sommabilité, intégrabilité, convergence absolue

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de F indexée par un ensemble dénombrable I est dite sommable si $(\|u_i\|)_{i\in I}$ l'est. Une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ continue par morceaux et à valeurs dans F est dite intégrable (ou encore sommable) sur I si $\|f\|$ l'est.

Si $I = \mathbf{N}$ on étudie également la série $\sum u_n$ dont on dit qu'elle est absolument convergente si $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Programme

Le programme se limite aux familles de nombres réels ou complexes et aux intégrales de fonctions à valeurs réelles ou complexes. Seules les séries sont étudiées dans le cadre plus général des espaces vectoriels normés (de dimension finie dans le cas vectoriel et à valeurs dans un espace de dimension finie dans le cas fonctionnel).

Remarque 9 - 6

On réserve la terminologie « normalement » convergente, ou convergente en norme, aux séries de fonctions.

Remarque 9 - 7

Sous-famille, restriction

Toute sous-famille d'une famille sommable de nombres complexes est sommable. La restriction d'une fonction intégrable à un sous-intervalle est intégrable.

Théorème 9 - 2

Toute série absolument convergente est également convergente.

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Pour n et p dans $\mathbf{N}$, on a, par inégalité triangulaire

$$\left\|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right\| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \|u_k\| \ .$$

Pour $n = 0$, le membre de droite est majoré par la somme de la série $\sum \|u_n\|$ et donc les sommes partielles de la série $\sum u_n$ sont bornées et donc prennent leurs valeurs dans un compact de F, puisque ce dernier est de dimension finie.

Soit S et S' deux valeurs d'adhérence de la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ et ε un réel strictement positif. On dispose alors de n_0 entier tel que $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} \|u_k\| \leq \varepsilon$ par convergence de $\sum \|u_n\|$. Par définition des valeurs d'adhérence, on dispose alors de n entier supérieur à n_0 tel que $\displaystyle\left\|S - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right\| \leq \varepsilon$ et de p entier tel que

$\left\| S' - \sum_{k=0}^{n+p} u_k \right\| \leq \varepsilon$. Par inégalité triangulaire, il vient

$$\|S - S'\| \leq 2\varepsilon + \left\| \sum_{k=n}^{n+p} u_k \right\| \leq 3\varepsilon$$

et on en conclut $S = S'$, i.e. la suite des sommes partielles de $\sum u_n$ admet une unique valeur d'adhérence. Étant bornée, elle converge, d'après la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass. □

Aparté

Les notions de suite de Cauchy, et donc le critère de Cauchy, et d'espace complet auraient permis une démonstration plus concise et permettrait de démontrer cette propriété dans le cadre des séries à valeurs dans un espace de Banach.

Proposition 9 - 5

Séries géométriques

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée (i.e. munie d'une norme sous-multiplicative), 1 son unité et u dans $\mathcal{A}$ vérifiant $\|u\| < 1$. Alors $\sum u^n$ est absolument convergente et sa somme est l'inverse de $1 - u$, qui est donc inversible :

$$(1-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n = 1 + u + u^2 + u^3 + \cdots$$

Démonstration. Puisqu'on a affaire à une algèbre normée, on a $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ et donc la série $\sum u^n$ est absolument convergente, donc convergente, et $u^n = \mathrm{o}(1)$. De plus, si S_n est la somme partielle de rang n, $(1-u)S_n = 1 - u^{n+1} = 1 + \mathrm{o}(1)$. Par continuité du produit il en résulte $(1-u)\sum_{n=0}^{+\infty} u^n = 1$. □

Exemple 9 - 5

C'est en particulier le cas lorsque $\mathcal{A}$ est $\mathscr{L}(E)$ ou $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ avec, si $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, $\|M\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$ ou encore $\|M\| = \sup_{\|x\|=1} \|Mx\|$ pour une norme quelconque sur E.

Danger

La condition $\|M\| < 1$ dépend de la norme et donc il est impératif d'utiliser une norme d'algèbre pour appliquer ce résultat.

Bien entendu, pour tout M il existe une norme telle que $\|M\| < 1$ et pourtant il arrive que $1 - M$ ne soit pas inversible. Ne serait-ce que pour $M = 1$!

Remarque 9 - 8

Lorsque $\mathcal{A} = \mathbf{R}$ ou $\mathcal{A} = \mathbf{C}$, la série $\sum u^n$ est divergente si $|u| \geq 1$. En effet, dans ce cas là, la norme est multiplicative et la série est grossièrement divergente, i.e. son terme général ne tend pas vers 0.

Proposition 9 - 6

Série exponentielle
Soit $\mathcal{A}$ une algèbre normée (i.e. munie d'une norme sous-multiplicative), 1 son unité et u dans $\mathcal{A}$. Alors $\sum \frac{1}{n!}u^n$ est absolument convergente, en convenant $u^0 = 1$. On note $\exp(u)$ sa somme.

Démonstration. Puisqu'on a affaire à une algèbre normée, on a $\|u^n\| \leq \|u\|^n$ et donc la série $\sum \frac{1}{n!}u^n$ est absolument convergente, donc convergente. □

Exemple 9 - 6

Exponentielle de matrices
Comme ce résultat est vrai pour tout u dans $\mathcal{A}$, il est en fait vrai pour toute norme équivalente à une norme d'algèbre sur $\mathcal{A}$.
En dimension finie, et puisqu'il existe des normes d'algèbre sur $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, la série $\sum \frac{1}{n!}u^n$ est convergente.

Exemple 9 - 7

Dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, pour $D = \mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ on a $\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{a_1}, \ldots, e^{a_n})$, et

$$\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1!} & \cdots & \frac{1}{n!} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{1!} \\ (0) & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 9 - 7

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble dénombrable I. Elle est sommable si et seulement si $(\mathrm{Re}(u_i))_{i\in I}$ et $(\mathrm{Im}(u_i))_{i\in I}$ le sont. Si $(u_i)_{i\in I}$ est à valeurs réelles, elle est sommable si et seulement si $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont, en notant $x^+ = \frac{|x|+x}{2}$ et $x^- = \frac{|x|-x}{2}$.
Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle réel I et à valeurs complexes. Elle est intégrable sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont. Si f est à valeurs réelles, elle est intégrable sur I si et seulement si f^+ et f^- le sont, en notant $f^+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$ et $f^- = \frac{1}{2}(|f|-f)$.

Démonstration. En vertu des comparaisons entre familles à termes positifs, cette proposition résulte dans le cas des séries des inégalités :

$$\forall z \in \mathbf{C}, \quad 0 \leq |\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)| \leq |z| \leq |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad 0 \leq x^+, x^- \leq |x| \leq x^+ + x^-,$$

et, dans le cas des intégrales, de

$$\forall x \in I, \quad 0 \leq |\mathrm{Re}(f(x))|, |\mathrm{Im}(f(x))| \leq |f(x)| \leq |\mathrm{Re}(f(x))| + |\mathrm{Im}(f(x))|$$

et

$$\forall x \in I, \quad 0 \leq f^+(x), f^-(x) \leq |f(x)| \leq f^+(x) + f^-(x).$$

□

Définition 9 - 2

Somme d'une famille sommable ou d'une fonction intégrable

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable à valeurs dans $\mathbf{K}$ indexée par un ensemble dénombrable I. On pose, dans le cas réel, $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-$ et, dans le cas complexe, $\sum_{j\in I} u_j = \sum_{j\in I} \mathrm{Re}(u_j) + i\sum_{j\in I} \mathrm{Im}(u_j)$.

Soit f dans $\mathcal{L}^1(I,\mathbf{K})$. On pose, dans le cas réel, $\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-$ et, dans le cas complexe, $\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i\int_I \mathrm{Im}(f)$.

Notation

Si $]a;b[\, = \mathring{I}$ et $f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbf{K})$, on note $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Propriété 9 - 2

Suites exhaustives

Soit I un ensemble dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de parties finies telle que $\lim \uparrow I_n = I$; on a

$$\forall (u_i)_{i\in I} \in \ell^1(I,\mathbf{K}) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i = \sum_{i\in I} u_i\ .$$

Soit I un intervalle réel et $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite croissante de segments telle que $\lim_n \uparrow I_n = I$; on a

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(I,\mathbf{K}) \qquad \int_I f = \lim_n \int_{I_n} f\ .$$

Démonstration. Au vu de la définition de la somme en se ramenant au cas positif, c'est une conséquence de la linéarité de la limite et du même résultat dans ce cas. □

Danger

La réciproque est fausse : l'existence des limites ne garantissent pas l'intégrabilité ou la sommabilité. C'est la différence principale entre intégrales généralisées (semi-convergentes) et la notion d'intégrabilité.

Remarque 9 - 9

Cas positif

Soit I un intervalle réel et f dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{R}_+)$. Alors f est intégrable sur I (au sens des fonctions positives) si et seulement si son intégrale sur I converge.

Pour aller plus loin

La famille $(u_i)_{i\in I}$ admet S pour somme si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \ \exists J \in \mathscr{P}_f(I)\ \forall K \in \mathscr{P}_f(I) \quad K \supset J \Longrightarrow \left\| \sum_{k\in K} u_k - S \right\| < \varepsilon\ .$$

4 Familles sommables et séries

Proposition 9 - 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de nombres complexes. Elle est sommable si et seulement si elle est absolument convergente, et sa somme ne dépend alors ni du point de vue (i.e. en tant que série ou en tant que famille sommable), ni de l'ordre des termes.

Démonstration. La première partie provient des résultats dans le cas positif. Soit σ une permutation de $\mathbf{N}$, éventuellement identique. Alors on a $\lim \uparrow \sigma([\![0;n]\!]) = \mathbf{N}$ de sorte que la somme de la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est égale à $\lim \sum\limits_{k\in\sigma([\![0;n]\!])} u_k$, i.e. à $\lim \sum\limits_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)}$ ou encore $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$. Les autres assertions en résultent. □

En particulier, on en déduit :

Théorème 9 - 3

Dirichlet - 1837
Si $\sum a_n$ est une série absolument convergente, alors elle est commutativement convergente, i.e. pour toute permutation σ de $\mathbf{N}$, $\sum a_{\sigma(n)}$ est convergente et sa somme est indépendante de σ.

Proposition 9 - 9

Sommation par paquets – cas général
Soit I un ensemble dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une partition de I. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors

1. pour tout entier n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est finie ou sommable ;
2. la série $\sum\limits_{n}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$ converge absolument.

Dans ce cas $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$.

Démonstration. Le premier point résulte du fait qu'une sous-famille d'une famille sommable l'est aussi.

Pour le second point, par inégalité triangulaire, on a, pour tout entier n,

$$\left|\sum_{i\in I_n} u_i\right| \leq \sum_{i\in I_n} |u_i|$$

et le membre de droite est le terme général d'une série convergente d'après le théorème de sommation par paquets dans le cas réel positif. Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\sum\limits_{n}\left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$ converge absolument.

La dernière assertion résulte de la linéarité de la somme et du même résultat dans le cas des familles sommables de réels positifs en écrivant $u_j = \mathrm{Re}(u_j)^+ - \mathrm{Re}(u_j)^- + i\,\mathrm{Im}(u_j)^+ - i\,\mathrm{Im}(u_j)^-$ et en écrivant que les quatre termes forment des familles sommables, par définition. □

Il résulte directement du théorème de TONELLI les deux critères suivants.

Proposition 9 - 10

Théorème de FUBINI-TONELLI discret - CAUCHY - 1821

Soit $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ une famille de nombres complexes. On suppose que

1. pour tout entier j, la série $\sum_i |a_{i,j}|$ est convergente ;
2. la série $\sum_j \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |a_{i,j}|\right)$ est convergente.

Alors la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.

Leonida TONELLI, 1885–1946, et Guido FUBINI, 1879–1943, mathématiciens italiens.

Théorème 9 - 4

Théorème de FUBINI discret

Lorsqu'une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ de nombres complexes est sommable, on a

1. pour tout entier j, la série $\sum_i a_{i,j}$ est absolument convergente ;
2. pour tout entier i, la série $\sum_j a_{i,j}$ est absolument convergente ;
3. la série $\sum_j \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$ est absolument convergente ;
4. la série $\sum_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$ est absolument convergente.

De plus

$$\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\right) .$$

D'après le théorème de sommation par paquets, on peut également donner un autre critère en liaison avec la multiplication des polynômes, on peut sommer degré par dégré en parcourant $\mathbf{N}^2$ par diagonales successives.

Définition 9 - 3

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes complexes. On appelle produit de CAUCHY des deux séries la série $\sum c_n$ définie par

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} .$$

Théorème 9 - 5

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à valeurs complexes absolument convergentes, alors leur produit de CAUCHY $\sum c_n$ est absolument convergent et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) .$$

Démonstration. Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à valeurs complexes absolument convergentes. En posant $\alpha_{m,n} = a_m b_n$, pour toute partie finie K de $\mathbf{N}^2$, on dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $J \subset [\![0;n]\!]^2$ et il vient

$$\sum_{k\in K} |\alpha_k| \leq \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |\alpha_{i,j}| = \left(\sum_{i=0}^{n} |a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{n} |b_j|\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{+\infty} |b_j|\right)$$

et donc $(\alpha_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable. Le produit de Cauchy est alors un simple cas particulier de réarrangement : en posant $I_n = \left\{(i,j)\in\mathbf{N}^2 \;\middle|\; i+j=n\right\}$, on a affaire à une partition de $\mathbf{N}^2$ et donc on a

$$\sum_{k\in\mathbf{N}^2} \alpha_k = \sum_{n\in\mathbf{N}}\sum_{k\in I_n} \alpha_k = \sum_{i\in\mathbf{N}}\sum_{j\in\mathbf{N}} \alpha_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right) = \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right)\left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)$$

i.e. le produit de Cauchy de $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est absolument convergent et la somme du produit est le produit des sommes. □

Exemple 9 - 8

Exponentielle d'une somme – cas commutatif

On en déduit que, si x et y sont deux éléments qui commutent dans une algèbre normée $\mathcal{A}$, alors $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, le produit étant donné comme produit de Cauchy.

La convergence absolue n'est pas superflue, comme le montre ce contre-exemple également donné par Cauchy en 1821.

Exemple 9 - 9

La série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ est convergente, d'après le critère de Leibniz, mais le produit de Cauchy de cette série avec elle-même n'est pas convergent.

Démonstration. Notons $\sum c_n$ la série obtenue par produit de Cauchy de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ avec elle-même. On a donc

$$|c_n| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}\sqrt{n+1-k}} \geq \frac{2n+2}{n+2}$$

car, par inégalité entre moyenne géométrique et moyenne arithmétique,

$$\sqrt{(k+1)(n+1-k)} \leq \frac{k+1+n+1-k}{2} = \frac{n+2}{2}\,.$$

Il en résulte que le terme général de $\sum c_n$ ne tend pas vers 0, i.e. $\sum c_n$ est grossièrement divergente. □

5 Structure

Notation

Espaces ℓ^1 et $\mathcal{L}^1$ ♠

On note $\ell^1(F)$ l'ensemble des séries à valeurs dans F et absolument convergentes, $\ell^1(I, \mathbf{K})$ celui des familles sommables à valeurs dans $\mathbf{K}$ et indexées par un ensemble dénombrable I et $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$ celui des fonctions **continues par morceaux**, définies sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$ et intégrables (sur I).

Propriété 9 - 3

Espaces fonctionnels

Les ensembles $\ell^1(F)$, $\ell^1(I, \mathbf{K})$ et $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Les deux premiers et $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K}) \cap C^0(I, \mathbf{K})$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés pour les normes données par

$$\left\| \sum u_n \right\|_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_n\| \ , \qquad \|(u_i)_{i \in I}\|_1 = \sum_{i \in I} |u_i| \qquad \text{et} \qquad \|f\|_1 = \int_I |f| \ .$$

Démonstration. Montrons qu'on a affaire à des espaces vectoriels. Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries et λ et μ des scalaires. Pour tout n, on a $\|\lambda u_n + \mu v_n\| \leq |\lambda| \|u_n\| + |\mu| \|v_n\|$ et donc, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que $\ell^1(E)$ est bien un espace vectoriel, puis que $\|\cdot\|_1$ vérifie l'inégalité triangulaire. Les autres axiomes étant directs, $\ell^1(E)$ est bien un espace vectoriel normé pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Les démonstrations sont similaires dans les autres cas, en utilisant la comparaison des familles à termes positifs ou des intégrales de fonctions positives. □

Aparté

L'espace $\ell^2(\mathbf{R})$ des séries $\sum a_n$ telles que $\sum |a_n|^2$ est convergente est un espace vectoriel préhilbertien pour le produit scalaire donné par

$$\left\langle \sum u_n \,\middle|\, \sum v_n \right\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n v_n$$

et de la norme donnée par $\left\| \sum u_n \right\|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{+\infty} |u_n|^2}$.

Proposition 9 - 11

Linéarité

L'application qui à une série dans $\ell^1(F)$ (resp. une famille dans $\ell^1(I, \mathbf{K})$, une fonction dans $\mathcal{L}^1(I, \mathbf{K})$) associe sa somme (resp. son intégrale) est linéaire.

Démonstration. Puisqu'une série absolument convergente est convergente, la linéarité résulte du cas convergent. Pour les familles et les intégrales, la linéarité résulte du calcul par suites exhaustives et de la linéarité de la limite. □

Proposition 9 - 12

Positivité

Les applications linéaires précédentes sont positives. Plus précisément

Familles Soit $(u_i)_{i\in I}$ dans $\ell^1(I,\mathbf{R})$. Si on a $\forall i\in I\ u_i\geq 0$ alors on a $\sum_{i\in I} u_i\geq 0$ et $\sum_{i\in I} u_i = 0$ si et seulement si $\forall i\in I\ u_i=0$.

Intégrales Soit I un intervalle de bornes a et b et f dans $\mathcal{L}^1(I,\mathbf{R})$. Si on a $\forall x\in I\ f(x)\geq 0$, alors on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geq 0$ et de plus, si f est continue, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=0$ si et seulement si f est nulle sur I.

Démonstration. L'assertion résulte du fait qu'une limite croissante de termes positifs n'est nulle que si tous les termes sont nuls, ce qui ramène l'étude au cas d'une somme finie ou d'une intégrale sur un segment. □

Corollaire 9 - 1

Croissance

Les applications linéaires précédentes sont croissantes. Plus précisément

Familles Soit $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ dans $\ell^1(I,\mathbf{R})$. Si on a $\forall i\in I\ u_i\geq v_i$ alors on a $\sum_{i\in I} u_i\geq \sum_{i\in I} v_i$ et $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} v_i$ si et seulement si $\forall i\in I\ u_i=v_i$.

Intégrales Soit I un intervalle de bornes a et b et f et g dans $\mathcal{L}^1(I,\mathbf{R})$. Si on a $\forall x\in I\ f(x)\geq g(x)$, alors on a $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\geq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et de plus, si f et g sont continues, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ si et seulement si $f=g$ sur I.

Proposition 9 - 13

Relation de Chasles

Si I est une partie dénombrable et si $I=I_1+I_2$, alors $(u_i)_{i\in I}\in\ell^1(I,\mathbf{K})$ si et seulement si $(u_i)_{i\in I_1}\in\ell^1(I_1,\mathbf{K})$ et $(u_i)_{i\in I_2}\in\ell^1(I_2,\mathbf{K})$, et dans ce cas $\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I_1} u_i + \sum_{i\in I_2} u_i$.

Si I est un intervalle réel et c un point intérieur à I, soit $J_1 = \left]-\infty;c\right]\cap I$ et $J_2=\left[c;+\infty\right[\cap I$, alors $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbf{K})$ si et seulement si $f_{|J_1}\in\mathcal{L}^1(J_1,\mathbf{K})$ et $f_{|J_2}\in\mathcal{L}^1(J_2,\mathbf{K})$. Dans ce cas on a $\int_I f = \int_{J_1} f + \int_{J_2} f$.

Proposition 9 - 14

Inégalité triangulaire

Si $\sum u_n\in\ell^1(F)$, alors $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\|u_n\|$.

Si $(u_i)_{i\in I}\in\ell^1(I,\mathbf{K})$, alors $\left|\sum_{i\in I} u_i\right|\leq \sum_{i\in I}|u_i|$.

Si $f\in\mathcal{L}^1(I,\mathbf{K})$, alors $\left|\int_I f\right|\leq\int_I |f|$.

Démonstration. C'est direct par passage à la limite. □

6 Critères de sommabilité

Définition 9 - 4

Intégration sur un intervalle quelconque

Soit I un intervalle réel ; si b est une des bornes de I (finie ou infinie), on dit que f est localement intégrable au voisinage de b (sur I) si $|f|$ l'est.

Par conséquent f est intégrable sur I si et seulement si f est **localement intégrable** sur I et au voisinage de **chacune des deux bornes** de I.

Par application des résultats dans le cas positif, on obtient via l'inégalité triangulaire les critères de comparaison.

Propriété 9 - 4

Sommation des relations de comparaison - cas convergent

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $\sum a_n$ une série convergente à termes réels **positifs**. Soit f et g dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$, b une des bornes de I et J un sous-intervalle de I de longueur non nulle et admettant b comme borne. On suppose g **positive** et intégrable sur J.

1. Si $u_n = \mathrm{O}\left(a_n\right)$ (resp. $u_n = \mathrm{o}\left(a_n\right)$), alors $\sum u_n$ est absolument convergente et on a $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right)$ (resp. $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} a_k\right)$).
   (♠) Les mêmes résultats sont vrais pour les séries à valeurs vectorielles.
2. Si $f = \mathrm{O}_b\left(g\right)$ (resp. $f = \mathrm{o}_b\left(g\right)$), alors f est intégrable sur J et on a $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}_b\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ (resp. $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}_b\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$).

Propriété 9 - 5

Sommation des relations de comparaison - cas divergent

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans $\mathbf{R}$ et $\sum a_n$ une série à termes **positifs**, avec $\sum a_n$ divergente. Soit f et g dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$, b une des bornes de I et J un sous-intervalle de I de longueur non nulle et admettant b comme borne. On suppose g **positive** et non-intégrable sur J.

1. Si $u_n = \mathrm{O}\left(a_n\right)$ (resp. $u_n = \mathrm{o}\left(a_n\right)$), alors on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$ (resp. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \mathrm{o}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right)$).
   (♠) Les mêmes résultats sont vrais pour les séries à valeurs vectorielles.
2. Si $f = \mathrm{O}_b\left(g\right)$ (resp. $f = \mathrm{o}_b\left(g\right)$), on a, pour tout a dans J, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}_b\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ (resp. $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}_b\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$).

Rappel

La notation $u_n = \mathrm{O}\left(a_n\right)$ signifie $\exists M \in \mathbf{R}_+\ \exists N \in \mathbf{N}\ \forall n \in \mathbf{N}\ n \geq N \Longrightarrow |u_n| \leq M a_n$. La notation $\mathrm{o}\left(a_n\right)$ s'obtient en changeant $\exists M$ en $\forall M$. On prendra surtout garde à la **valeur absolue** sur u_n (ou à la norme dans le cas vectoriel).

7 Calcul d'intégrales

Remarque 9 - 10

Si I est un segment, toute fonction continue par morceaux sur I y est intégrable (théorème de CAUCHY, sommes de DARBOUX ou prolongement des formes linéaires uniformément continues). Plus généralement si I est borné et f est continue par morceaux sur I et prolongeable par continuité aux bornes de I, f est intégrable sur I et son intégrale sur I est celle de son prolongement par continuité à l'adhérence de I.

Propriété 9 - 6

Calcul par limite ou somme de série

Si f est intégrable sur $[a;b[$, ou plus généralement si $\displaystyle\int_{[a;b[} f$ converge, on a

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a;b[} f \quad \text{et} \quad \lim_{x\to b^-}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

et si (b_n) est une suite croissante de limite b et telle que $b_0 = a$, alors

$$\int_{[a;b[} f = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Remarque 9 - 11

On peut échanger le rôle de a et b dans ce qui précède et étudier f intégrable sur $]a;b]$, ou telle que $\displaystyle\int_{]a;b]} f$ converge.

Si on intègre sur un intervalle ne contenant aucune des bornes, il faut le couper en deux et utiliser la relation de CHASLES. Si f est intégrable sur $]a;b[$, ou plus généralement si $\displaystyle\int_{]a;b[} f$ converge, et si c, (a_n) et $b_n)$ sont tels que $a < c < b$, $a_0 = b_0 = c$, (a_n) décroit vers a et b_n croit vers b, alors on a

$$\int_{]a;b[} f = \lim_{y\to a^+}\int_y^c f(t)\,\mathrm{d}t + \lim_{x\to b^-}\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{a_{n+1}}^{a_n} f(t)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=0}^{+\infty}\int_{b_n}^{b_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Propriété 9 - 7

Intégrale et primitive

Soit f continue et admettant F comme primitive (i.e. $F' = f$) sur $]a;b[$. Alors F admet des limites en a et b si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et c'est en particulier le cas lorsque f est intégrable sur $]a;b[$. De plus on a alors

$$\int_{]a;b[} f = \lim_{b^-} F - \lim_{a^+} F = [F]_a^b$$

cette dernière égalité étant entendue comme une limite.

Propriété 9 - 8

Intégration par parties

Si f et g sont de classe C^1 sur $]a;b[$, fg y est une primitive de $f'g+fg'$ de sorte que si fg a des limites en a et b, alors $\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature (en temps qu'intégrales semi-convergentes) et, dans le cas convergent, on a

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b^-} fg - \lim_{a^+} fg - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

cette dernière égalité étant entendue comme une limite. On peut écrire des intégrales indéfinies sous la forme

$$\int f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = fg - \int f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$$

puis justifier l'existence de limites en a et b pour fg et de l'intégrale semi-convergente $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

♥

La notation $[fg]_a^b$ est une double limite. Il faut démontrer l'existence à la fois de $\lim_{b^-} fg$ et de $\lim_{a^+} fg$ **avant** de pouvoir écrire $[fg]_a^b$!

Danger

Une intégration par parties ne conserve pas l'intégrabilité. C'est même un procédé, semblable au lemme d'Abel pour les séries, qui permet de ramener une intégrale semi-convergente à une intégrale absolument convergente.

Il ne faut donc pas utiliser l'intégration par parties sans la justifier correctement. Comme on ne peut faire appel à l'intégrabilité, il faut revenir à la notion d'intégrale semi-convergente et donc utiliser des limites. Concrètement on fait une intégration par parties sur des segments puis on essaye de faire tendre les bornes vers ce qu'on veut.

Exemple 9 - 10

Intégrabilité et intégration par parties

L'intégrale de Dirichlet est semi-convergente, i.e. $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. En effet, pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $|\sin(x)| \geq \sin^2(x)$ et la fonction positive $x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Néanmoins on peut se ramener à une fonction intégrable grâce à une intégration par parties :

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \quad \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1-\cos(x)}{x} + \int_0^x \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

en prenant une limite vis-à-vis de la borne inférieure. D'après le critère de Riemann l'intégrande dans l'intégrale du membre de droite est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$.

Le théorème de changement de variable est souvent incorrectement cité : la question de savoir s'il est nécessaire ou pas de demander au changement de variable d'être bijectif, c'est-à-dire strictement monotone, est en effet difficile et subtile.

Théorème 9 - 6

Changement de variable pour les fonctions continues sur un segment

Soit I et J deux intervalles, f dans $C^0(I,\mathbf{K})$ et φ dans $C^1(J,I)$. Soit a et b tels qu'on ait $[a;b] \subset J$. Alors $\displaystyle\int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. On notera que, d'après les théorèmes de Bolzano (valeurs intermédiaires) et Weierstrass, l'image du segment $[a;b]$ par φ est un segment et donc le théorème résulte du fait que chacun des deux membres est égal à $F\circ\varphi(b) - F\circ\varphi(a)$, où F est une primitive de f sur $\varphi([a;b])$. □

Programme

Le programme autorise explicitement l'utilisation des changements de variable classiques sans justification. Par là il faut entendre : changement de variable affine bijectif $x \mapsto ax+b$ avec $a \neq 0$ ou plus généralement fonction puissance **bijective**, ou encore via l'utilisation de l'exponentielle ou du logarithme.

On prendra garde que l'absence de justification n'est tolérée que s'il est manifeste que le changement de variable est bijectif.

Toutefois c'est le théorème suivant, avec un peu plus d'hypothèses sur φ, qui est le seul théorème au programme dans le cas des intégrales impropres (le précédent ne concerne, quant à lui, que les intégrales au sens propre).

Théorème 9 - 7

Changement de variable bijectif

Soit I et J deux intervalles, f dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{K})$ et φ dans $C^1(J,I)$ **strictement monotone** ou, ce qui revient au même, **bijective** de J sur $\varphi(J)$.

1. Soit c et d tels qu'on ait $[c,;d] \subset I$. Alors
$$\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\varphi^{-1}(c)}^{\varphi^{-1}(d)} f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\ .$$
2. Soit a et b tels qu'on ait $[a;b] \subset J$. Alors $\displaystyle\int_{[a;b]} f\circ\varphi\cdot|\varphi'| = \int_{\varphi([a;b])} f$.
3. Soit a et b tels qu'on ait $]a;b[\subset J$. Alors f est intégrable sur $\varphi(]a;b[)$ si et seulement si $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ est intégrable sur $]a;b[$. Et, dans ce cas,
$$\int_{]a;b[} f\circ\varphi\cdot|\varphi'| = \int_{\varphi(]a;b[)} f\ .$$
De plus les limites $\lim_{a^+}\varphi$ et $\lim_{b^-}\varphi$ existent. On les note respectivement α et β et dans le cas d'intégrabilité, on a
$$\int_a^b f\circ\varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Démonstration. Soit $(x_0,\cdots,x_n)$ une subdivision de $[c;d]$ adaptée à f, i.e. $c = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = d$, de sorte que f soit prolongeable par continuité sur les segments $[x_{i-1};x_i]$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors $f\circ\varphi$ est continue par morceaux sur $\left[\varphi^{-1}(x_0);\varphi^{-1}(x_n)\right]$ et une subdivision $\left[\varphi^{-c};\varphi^{-1}(d)\right]$ adaptée à $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ est donnée par $(\varphi^{-1}(x_0),\cdots,\varphi^{-1}(x_n))$. Il en résulte que $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ est continue par morceaux sur $\left[\varphi^{-c};\varphi^{-1}(d)\right]$. L'assertion résulte de la relation de Chasles et du théorème de changement de variable dans le cas continu.

Le seconde point est une simple reformulation. En effet si φ est strictement monotone, l'intervalle $\varphi([a;b])$ est l'intervalle d'extrémités $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$. Si φ est croissante, il s'agit de $[\varphi(a);\varphi(b)]$ et $|\varphi'| = \varphi'$. Sinon il s'agit de $[\varphi(b);\varphi(a)]$, de sorte que l'intégrale sur $\varphi([a;b])$ est l'opposée de l'intégrale de $\varphi(a)$ à $\varphi(b)$. Cette différence de signe est compensée par le fait qu'on a alors $|\varphi'| = -\varphi'$.

L'existence de α et β résulte du théorème de la limite monotone. Quitte à composer φ par $t \mapsto a+b-t$, on peut supposer φ croissante. On a alors $\varphi(]a;b[) =]\alpha;\beta[$.

Soit $([\alpha_n;\beta_n])_{n\in\mathbf{N}}$ une suite exhaustive de segments dans $]\alpha;\beta[$. On note $[a_n;b_n]$ les pré-images par φ, de sorte que $([a_n;b_n])_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite exhaustive de segments dans $]a;b[$. On en déduit que f est intégrable sur $]\alpha;\beta[$ si et seulement si $\left(\int_{[\alpha_n;\beta_n]} |f|\right)$ est bornée. D'après le théorème dans le cas compact, cette dernière condition s'écrit $\left(\int_{[a_n;b_n]} |f|\circ\varphi\cdot|\varphi'|\right)$ bornée, i.e. $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ intégrable sur $]a;b[$.

Dans le cas intégrable, on a

$$\int_{]\alpha;\beta[} f = \lim_n \int_{[\alpha_n;\beta_n]} f \quad \text{et} \quad \int_{]a;b[} f\circ\varphi\cdot\varphi' = \lim_n \int_{[a_n;b_n]} f\circ\varphi\cdot\varphi'$$

et la dernière assertion se déduit donc du cas compact. □

Remarque 9 - 12

Dans le raisonnement du point 3., on pourrait travailler avec $[a;b[$ ou $]a;b]$ sans problème.

Dans les compléments on montre qu'on peut changer de variable dans une intégrale impropre si $f\circ\varphi\cdot\varphi'$ est continue par morceaux et que φ admet des limites (à droite et à gauche) en a et b, mais ce résultat est hors-programme et très peu connu.

Danger

Si on suppose seulement f dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{K})$ et φ dans $C^1(J,I)$, en général $f\circ\varphi$ n'est pas continue par morceaux.

En effet, prenons pour f la fonction caractéristique du segment $[0;1]$, i.e. une très gentille fonction continue par morceaux. Soit φ une application de classe C^1 d'un segment $[a;b]$ dans $\mathbf{R}$. Alors la fonction $f\circ\varphi$ est nulle en dehors de $\varphi^{-1}([0;1])$, où elle vaut 1. Or l'ensemble $\varphi^{-1}([0;1])$ est un fermé de $[a;b]$ (donc un compact), mais n'a aucune raison d'être un intervalle. Il n'a même aucune raison d'être une réunion finie d'intervalles. Par conséquent $f\circ\varphi$ n'a pas de raison d'être continue par morceaux. Un exemple est donné par la fonction φ définie sur $[0;1]$ par $\varphi(x) = x^3\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ qui est de classe C^1 (en la prolongeant par 0 en 0) et pour laquelle $\varphi^{-1}([0;1])$ est la réunion de $\{0\}$ et des intervalles $\left[\frac{1}{(2n+1)\pi};\frac{1}{2n\pi}\right]$.

On peut imaginer des exemples encore plus étranges.

Danger

Pour f dans $C^0(I,\mathbf{K})$ et φ dans $C^1(J,I)$, si on suppose seulement $]a;b[$ inclus dans J, on ne peut pas conclure quant à l'intégrabilité de $\varphi' f\circ\varphi$ sur $]a;b[$ ni de f sur $]\varphi(a);\varphi(b)[$ et d'ailleurs φ peut très bien ne pas avoir de limites en a et b (à droite et à gauche respectivement).

En effet l'intégrabilité nécessite une valeur absolue qui n'a aucune raison de bien se comporter au niveau de φ'. Voici un exemple. On prend $J = \mathbf{R}_+$ et φ donnée par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Alors φ est de classe C^1 et de dérivée donnée par (le prolongement par continuité à $\mathbf{R}_+$ de) $\varphi'(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. En 0, on a $\varphi(0) = 0$ et on a $\lim_{+\infty} \varphi = \dfrac{\pi}{2}$ (mais peu importe la valeur exacte, car il suffit de savoir que cette intégrale est semi-convergente). Prenons donc $I = \mathbf{R}$ et f la fonction constante égale à 1. On aimerait donc savoir si on peut écrire $\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}t$ en tant qu'égalité d'intégrales de fonctions (absolument) intégrables. La seconde étant une intégrale propre, il revient au même de demander si φ' est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ et tel n'est pas le cas.

Exemple 9 - 11

On a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(b-t)(t-a)}} = [\arcsin]_{-1}^{1} = \pi$.

Exemple 9 - 12

Calcul par intégrations par parties itérées

Soit I_n définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$.

On remarque que l'intégrande est bien intégrable (pour n dans $\mathbf{N}^*$). On étudie alors, pour x dans $\mathbf{R}_+$, la quantité $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$. On peut effectuer une intégration par parties et il vient

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^x + \int_0^x \frac{3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

et donc, en passant à la limite, $I_n = 3n(I_n - I_{n+1})$ et on en déduit

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{3^k}\right) .$$

Exercice

Calculer, avec les mêmes idées, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 9 - 13

On peut également considérer des intégrales indéfinies, i.e. des primitives. Ainsi on peut écrire

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \frac{t}{(1+t^3)^n} + \int \frac{3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

ce qu'il faut interpréter comme une égalité entre ensembles : l'ensemble de toutes les primitives de $\dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ s'obtient en ajoutant la fonction $\dfrac{t}{(1+t^3)^n}$ à une fonction de l'ensemble des primitives de $\dfrac{3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}}$.

Aparté

Cette identification entre ensemble et élément d'un ensemble, qu'on peut assimiler à une synecdoque, est à rapprocher de la notation $o(1)$. Ainsi quand on écrit $\ln(2+o(1)) = \ln(2)+o(1)$, on signifie que l'ensemble des fonctions obtenues comme logarithme d'une fonction tendant vers 2 est égal à l'ensemble des fonctions obtenues comme la somme de la fonction constante égale à $\ln(2)$ et d'une fonction tendant vers 0. Ce sont des sommes d'ensembles, en assimilant un élément au singleton constitué par cet élément.

Remarque 9 - 14

On peut également calculer directement dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ puisqu'on a affaire à des fonctions à valeurs positives.

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{3nt^3}{(1+t^3)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leq +\infty\ .$$

Ainsi si l'un des termes de droite est infini, celui de gauche l'est, et réciproquement.

Exemple 9 - 13

Calcul par changement de variable et décomposition en éléments simples

Un changement de variable $u = \sqrt{\tan(t)}$ permet d'écrire (dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$)

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{2u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^4}\ .$$

Cette dernière intégrale se calcule par décomposition en éléments simples en écrivant

$$\frac{2u^2}{1+u^4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} - \frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\ .$$

puis

$$-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1} = -\frac{1}{2}\frac{2u+\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}u+1)^2+1}$$

et

$$\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1} = \frac{1}{2}\frac{2u-\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}u-1)^2+1}\ ,$$

ce que l'on peut écrire plus synthétiquement

$$\mp\frac{u}{u^2\pm\sqrt{2}u+1} = \mp\frac{1}{2}\frac{2u\pm\sqrt{2}}{u^2\pm\sqrt{2}u+1} + \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}u\pm 1)^2+1}\ .$$

Il vient

$$\int_0^{+\infty} \frac{2u^2\,\mathrm{d}u}{1+u^4} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\arctan(\sqrt{2}u+1)+\arctan(\sqrt{2}u-1)\right]_0^{+\infty}$$

soit

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\ .$$

Exemple 9 - 14

Calcul par décomposition en éléments simples

Pour calculer
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} ,$$
on passe aussi par une décomposition en éléments simples. On écrit en effet
$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{1}{a}\frac{1/a}{1+(x/a)^2} - \frac{1}{b}\frac{1/b}{1+(x/b)^2}\right)$$
et il vient
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{a}-\frac{\pi}{b}\right) = \frac{\pi}{ab(a+b)} .$$

Mais on peut aussi passer par des méthodes plus fines.

Exemple 9 - 15

Comparaison série-intégrale et polynômes

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \lim_n \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}\ln(2) .$$

Puisque l'intégrande est continu et monotone, on peut utiliser une comparaison série-intégrale, i.e. la méthode de Maclaurin :
$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$$
et
$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \geq \int_0^{\pi/2n} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) .$$
La différence entre le majorant et le minorant donne
$$\frac{\pi}{2n}\ln\left(\sin\left(\frac{n\pi}{2n}\right)\right) - \int_0^{\pi/2n} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2n} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}\left(1\right)$$
par intégrabilité. En fait, plus précisément on a par sommation des relations de comparaisons entre fonctions négatives
$$-\int_0^{\pi/2n} \ln(\sin(t))\,\mathrm{d}t \sim -\int_0^{\pi/2n} \ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2n}(1-\ln(\frac{\pi}{2n})) = \mathrm{O}\left(\frac{\ln(n)}{n}\right) .$$

Quant au calcul du produit trigonométrique $\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$, on peut remarquer que les $\exp(2ik\pi/2n)$ décrivent les racines $2n^{\mathrm{e}}$ de l'unité distinctes de ± 1 (obtenues quant à elles pour $k=0$ et $k=n$) et qu'on a donc $(X^2-1)\prod_{\substack{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}\\ \zeta\neq\pm1}}(X-\zeta) = \prod_{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}}(X-\zeta) = X^{2n}-1$ ou encore $\prod_{\substack{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}\\ \zeta\neq\pm1}}(X-\zeta) = \sum_{k=0}^{n-1} X^{2k}$. En particulier on a $\prod_{\substack{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}\\ \zeta\neq\pm1}}(1-\zeta) = n$.

Par ailleurs, pour $P = (X - e^{2i\theta})(X - e^{-2i\theta})$ on a $P = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ et donc $P(1) = 2(1 - \cos(2\theta)) = 4\sin^2(\theta)$. Il vient, en prenant $\theta = k\pi/2n$ avec $1 \leq k \leq n-1$,

$$2^{2(n-1)} \prod_{k=1}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{\substack{\zeta\in\mathbf{U}_{2n}\\ \zeta\neq\pm 1}} (1-\zeta) = n\,,$$

d'où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(n) - (n-1)\ln 2 \sim -n\ln(2)$, ce qui permet de conclure.

Exercice

Démontrer l'identité $\displaystyle\sin(mx) = 2^{m-1}\prod_{k=0}^{m-1}\sin\left(x + \frac{k\pi}{m}\right)$ et retrouver le résultat précédent.

8 Compléments

8 1 Séries doubles

Puisque $\mathbf{N}^2$ est réunion croissante des carrés $[\![0;n]\!]^2$, la sommabilité peut s'énoncer à partir des sommes sur ces carrés.

Remarque 9 - 15

Convergence des séries doubles - Cauchy - 1821 ♠

Soit $(a_{ij})_{i,j\in\mathbf{N}}$ une famille de réels ou de complexes. On suppose qu'il existe un réel positif B tel que

$$\forall n \in \mathbf{N}\,,\quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}| \leq B\,,$$

i.e. la somme des modules des termes sur tout carré $[\![0;n]\!]^2$ de $\mathbf{N}^2$ est bornée. Alors

1. Pour tout i et j dans $\mathbf{N}$, les séries $\sum_j a_{ij}$ et $\sum_i a_{ij}$ convergent.
2. Les séries $\displaystyle\sum_i\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}\right)$ et $\displaystyle\sum_j\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{ij}\right)$ convergent. De plus leurs sommes sont égales.
3. Pour toute bijection φ de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{ij}\right).$$

8 2 Résultats d'Abel – Interversion somme-limite

Une méthode très performante pour l'étude des séries de produits est la transformation d'Abel, qui est une sorte d'intégration par parties discrètes. Elle a les mêmes utilités que son analogue continu. On considère $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries, p et q des entiers naturels, avec $p \leq q$. Alors

$$\sum_{k=p}^{q} a_k(b_{k+1} - b_k) = a_{q+1}b_{q+1} - a_p b_p - \sum_{k=p}^{q}(a_{k+1} - a_k)b_{k+1}$$

ou, autrement dit,

Définition 9 - 5

Transformation d'Abel

$$\sum_{k=p}^{q} a_k(\Delta b)_k = [ab]_p^{q+1} - \sum_{k=p}^{q}(\Delta a)_k b_{k+1} \ .$$

Proposition 9 - 15

Règle d'Abel (♠)

Si (a_n) est une suite de réels décroissante de limite nulle et $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace de Banach telle que

$$\exists B \in \mathbf{R}_+ \, , \forall n \in \mathbf{N} \, , \left\| \sum_{k=0}^{n} u_k \right\| \leq B$$

alors $\sum a_n u_n$ converge et, pour p et q entiers naturels avec $p \leq q$, on a

$$\left\| \sum_{k=p}^{q} a_k u_k \right\| \leq 2Ba_p \ .$$

Démonstration. On écrit la transformation d'Abel et la majoration finale en découle. Il en résulte que la série considérée est de Cauchy et on conclut puisque E est complet. Dans le cas d'un espace vectoriel normé de dimension finie, on peut aussi conclure car la suite des sommes partielles est bornée et admet une unique valeur d'adhérence. □

Théorème 9 - 8

Interversion somme-limite

Soit $(a_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}}$ une famille de réels telle que

1. Pour j fixé dans $\mathbf{N}$, $(a_{nj})_{n \in \mathbf{N}}$ est de signe constant.
2. Pour j fixé dans $\mathbf{N}$, $(|a_{nj}|)_{n \in \mathbf{N}}$ est croissante.
3. Il existe B dans $\mathbf{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \, , \quad \sum_{j=0}^{n} |a_{nj}| \leq B \ .$$

Alors

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{nj} \right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\lim_{n \to +\infty} a_{nj} \right) \ .$$

Démonstration. On applique une transformation d'Abel en posant $b_{0j} = a_{0j}$ et $b_{ij} = a_{ij} - a_{i-1,j}$, i.e. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} b_{ij} = a_{nj}$.

Comme $(b_{nj})_{n\in\mathbf{N}}$ est de signe constant, on a

$$\sum_{i=0}^{n} |b_{ij}| = |a_{nj}| \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} |b_{ij}| = \sum_{j=0}^{n} |a_{nj}| \leq B \,.$$

D'après le théorème de CAUCHY pour les séries doubles, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{+\infty} b_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} b_{ij}$$

et donc, par linéarité de la limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{n} b_{ij} = \sum_{j=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n} b_{ij} \,,$$

ce qui est l'assertion voulue. □

On en déduit une démonstration rigoureuse du résultat suivant, dû à EULER

Théorème 9 - 9

EULER - 1748
Soit x un rationnel, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Voici la « démonstration » d'EULER. On écrit la formule du binôme et il vient

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{n(n-1)}{2n^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}x^3 + \cdots$$

et chacun des termes admet la limite voulue, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Comme par ailleurs

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/x}\right)^x$$

cette limite est aussi e^x.

Passons maintenant à une démonstration plus rigoureuse !

Démonstration d'ABEL. La formule du binôme donne, pour x réel fixé,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} \frac{x^k}{k!}$$

avec $\alpha_{nk} = \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)$. On pose $a_{nk} = \alpha_{nk}x^k/k!$. Alors, les hypothèses sur le signe et la croissance sont vérifiées et on a

$$\sum_{j=0}^{n} |a_{nj}| \leq \sum_{j=0}^{n} \frac{|x|^j}{j!} \leq B$$

car, d'après le critère de d'ALEMBERT par exemple, cette dernière série est convergente.
□

Cette démonstration peut s'adapter pour démontrer, pour x réel

$$\operatorname{sh}(x) = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\times\cdots$$

et, pour x réel non multiple entier de π,

$$\sin(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\times\cdots$$

(voir les exercices 9 - 41, 9 - 42 et 11 - 21).

Un autre résultat d'ABEL est démontré en exercice (voir 11 - 46).

Théorème 9 - 10

ABEL - 1826

Si les trois séries $\sum a_n$, $\sum b_n$ et $\sum c_n$ convergent, où $\sum c_n$ est le produit de CAUCHY des deux autres séries, alors la somme du produit est le produit des sommes.

8 3 Calcul différentiel et intégral

On déduit de l'inégalité de LAGRANGE, comme dans le cas réel, pour f continue sur $[a;b]$, à valeurs dans F, et dérivable sur $]a;b[$:

1. f est lipschitzienne sur I si et seulement si sa dérivée est bornée sur $\mathring{I}$.
2. Si f' a une limite en a^+, alors f est dérivable en a, de dérivée donnée par cette limite. Autrement dit le théorème de la limite de la dérivée est vrai pour les fonctions à valeurs vectorielles.
3. La généralisation au cas des fonctions n-fois dérivables est également vraie.

Pour le théorème de la limite de la dérivée, en soustrayant une fonction affine, on se ramène au cas où la limite de la dérivée est nulle et on utilise le théorème de LAGRANGE pour majorer le taux d'accroissement par un supremum qui tend, par hypothèse, vers 0.

Les techniques usuelles de calcul d'intégrales sont également valides dans le cadre vectoriel.

Théorème 9 - 11

Intégration par parties

Soit f dans $C^n(I,E)$, g dans $C^n(I,F)$ et φ bilinéaire de $E\times F$ dans G. Pour $[a;b]\subset I$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b \varphi(f^{(n)}(t),g(t))\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\varphi(f^{(n-1-k)}(x),g^{(k)}(x))\right]_a^b \\ &+(-1)^n\int_a^b \varphi(f(t),g^{(n)}(t))\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Démonstration. Le cas $n=1$ s'obtient à partir de la formule de LEIBNIZ. Le cas général s'en déduit par exemple par récurrence. □

Théorème 9 - 12

Changement de variable

Soit f dans $C^0(I,E)$, φ dans $C^1(J,I)$ avec $J = [a;b] \subset \mathbf{R}$. Alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\ .$$

Démonstration. Cela résulte directement de la formule de dérivation d'une fonction composée. □

8 4 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 9 - 6

On note $\mathcal{L}_c^1(I,\mathbf{C})$ l'espace des fonctions continues, à valeurs dans $\mathbf{C}$ et intégrables sur I.

Théorème 9 - 13

Convergence en moyenne

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est une norme sur $\mathcal{L}_c^1(I,\mathbf{C})$, appelée norme de la convergence en moyenne. Si I est de longueur finie, on peut aussi considérer cette norme divisée par la longueur de I.

De plus la forme linéaire $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ est continue pour la norme de convergence en moyenne.

Démonstration. La vérification que $f \mapsto \displaystyle\int_I |f|$ est une norme est directe. Le dernier point résulte de l'inégalité triangulaire. □

Notation

On note la norme de la convergence en moyenne $\|\cdot\|_1$, en rajoutant l'indice I si nécessaire.

Définition 9 - 7

On dit qu'une fonction continue par morceaux est de carré intégrable si $|f|^2$ est intégrable. On note $\mathcal{L}^2(I,\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions à valeurs dans $\mathbf{C}$ et de carré intégrable et $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbf{C})$ son sous-ensemble formé des fonctions continues.

Par inégalité entre moyennes géométrique et quadratique, si f et g sont de carré intégrable, $|fg|$ est majorée par $\dfrac{1}{2}\left(|f|^2 + |g|^2\right)$ et est donc intégrable. Il en résulte que $f+g$ est intégrable.

Théorème 9 - 14

Convergence en moyenne quadratique

Les ensembles $\mathcal{L}^2(I,\mathbf{C})$ et $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbf{C})$ sont des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels. L'application $(f,g) \mapsto \langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_I \overline{f}g$ est un produit scalaire (hermitien) sur $\mathcal{L}_c^2(I,\mathbf{C})$. La norme associée est appelée norme de la convergence en moyenne quadratique.

Démonstration. La démonstration résulte directement du cas compact. □

On en déduit l'outil fondamental

Théorème 9 - 15

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit f et g continues et de carré intégrable sur I, alors

$$\left|\int_I \overline{f}g\right| \leq \|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \ .$$

Remarque 9 - 16

L'inégalité reste vraie avec f et g continues par morceaux (et de carré intégrable).

8 5 Critère de Cauchy

Toute l'étude des séries peut se faire dans un espace de Banach. Elle repose alors sur le critère de Cauchy. Ce qui suit est une simple reformulation en termes de séries du critère pour les suites.

Proposition 9 - 16

Critère de Cauchy - 1821

Soit $\sum u_n$ une série à valeurs dans un espace de Banach. Elle est convergente si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall (n,p) \in \mathbf{N}^2 \quad n \geq n_0 \Longrightarrow \left|\sum_{k=n}^{n+p} u_k\right| \leq \varepsilon \ .$$

Ce critère est rarement utilisé directement car on se bâtit une liste de séries de référence et ensuite on compare les séries à celles-ci via les critères de comparaison.

D'une façon générale pour une suite (a_n) réelle quelconque, on note $\underline{\lim}\ a_n$ et $\overline{\lim}\ a_n$la plus petite et la plus grande de ses valeurs d'adhérence, i.e.

$$\underline{\lim}\ a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\inf_{k\geq n} u_k\right) \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\ a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sup_{k\geq n} u_k\right) \ .$$

L'existence de ces limites, dans $\mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$, provient de la monotonie des suites de supremum et d'infimum.

Théorème 9 - 16

Critères de convergence absolue - Cauchy - 1821

Soit $\sum a_n$ une série à termes réels ou complexes.

1. Si $\overline{\lim}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, alors $\sum a_n$ est absolument convergente.
2. Si $\underline{\lim}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, alors $\sum a_n$ est absolument divergente.
3. Si $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} < 1$, alors $\sum a_n$ est absolument convergente.
4. Si $\underline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} > 1$, alors $\sum a_n$ est absolument divergente.

Démonstration. Il suffit d'adapter les démonstrations du cours. Les inégalités permettent de comparer la série à une série géométrique. Par exemple : $\overline{\lim}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ signifie qu'il existe α, avec $\alpha < 1$, tel qu'à partir d'un certain rang $|a_{n+1}| < \alpha\,|a_n|$ etc. □

Proposition 9 - 17

Critère de Cauchy pour les intégrales impropres

L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on peut trouver b dans $[a;+\infty[$ tel que pour x et y réels supérieurs à b, $\left|\displaystyle\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon$.

8 6 Théorèmes de changement de variable

Théorème 9 - 17

Soit I et J deux intervalles (quelconques) de $\mathbf{R}$, f dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{K})$ et φ dans $C^1(J,I)$. Soit enfin $]a;b[$ un intervalle inclus dans J tel que $f\circ\varphi$ soit continue par morceaux sur $]a;b[$ et tel que les limites $\lim_{a^+}\varphi$ et $\lim_{b^-}\varphi$ existent. On note alors $\lim_{a^+}\varphi = \alpha$ et $\lim_{b^-}\varphi = \beta$.

Alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent simultanément et, si tel est le cas, sont égales.

On choisit c dans $]a;b[$. Il suffit de démontrer le théorème pour $]a;c]$ et $[c;b[$ et quitte à composer φ par une fonction affine bijective, le cas $[c;b[$ résulte du cas $]a;c]$. On se ramène donc au problème sur $[a;b[$. Et on a donc $\alpha=\varphi(a)$, par continuité de φ.

On note

$$I_{a,b} = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad I_{\alpha,\beta} = \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Comme $\varphi([a;b[)$ est un invervalle et que β lui est adhérent, soit β est une des bornes de $\varphi([a;b[)$ et cette borne ne fait pas partie de l'intervalle, soit $\beta\in\varphi([a;b[)$.

On étudie d'abord le cas où, pour tout x dans $[a;b[$, $\varphi(x)<\beta$. Dans ce cas on a également $\beta=\sup(\varphi([a;b[))$ par caractérisation de la borne supérieure.

Soit (b_n) une suite à valeurs dans $[a;b[$ et tendant vers b, alors $(\varphi(b_n))$ tend vers β par valeurs inférieures (et est à valeurs dans $[\alpha;\beta[$ à partir d'un certain rang). De plus, pour tout entier n, on a

$$\int_a^{b_n} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\varphi(b_n)} f(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

d'après le théorème de changement de variable pour un segment. Il en résulte directement que si $I_{\alpha,\beta}$ converge, alors il en va de même pour $I_{a,b}$ et ces deux intégrales sont égales.

On suppose maintenant que $I_{a,b}$ converge. Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose alors de α dans $]0;b-a[$ tel que, pour $b-\alpha<x<b$, on ait

$$\left|\int_a^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t - I_{a,b}\right| < \varepsilon$$

et aussi, d'après le théorème de changement de variable pour un segment,

$$\left|\int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t - I_{a,b}\right| < \varepsilon\,.$$

On remarque tout d'abord qu'on a $\varphi(b-\alpha)<\beta$. Soit donc y tel que $\varphi(b-\alpha)<y<\beta$, alors, d'après le théorème de Bolzano (valeurs intermédiaires), il existe x dans

$]b-\alpha;b[$ tel que $y=\varphi(x)$ et donc

$$\left|\int_\alpha^y f(t)\,\mathrm{d}t - I_{a,b}\right| < \varepsilon\ .$$

Autrement dit à ε dans $\mathbf{R}_+^*$ on peut associer η dans $\mathbf{R}_+^*$, donné par $\eta=\beta-\varphi(b-\alpha)$, tel que, pour y dans $]b-\eta;b[$, on ait $\left|\displaystyle\int_\alpha^y f(t)\,\mathrm{d}t - I_{a,b}\right| < \varepsilon$, i.e. $I_{\alpha,\beta}$ converge et est égale à $I_{a,b}$.

Mutatis mutandis, cette étude est valable également dans le cas où, pour tout x dans $[a;b[$, $\varphi(x)>\beta$.

Enfin si $\beta\in\varphi([a;b[)$, on dispose de c dans $[a;b[$ tel que $\varphi(c)=\beta$ et donc $I_{\alpha,\beta}$ est convergente puisque l'intégrale propre $\displaystyle\int_{[\alpha;\beta]} f$ existe. De plus, par le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Leibniz-Newton), la fonction $y\mapsto \displaystyle\int_\alpha^y f(t)\,\mathrm{d}t$ est continue en β. Soit alors x dans $[a;b[$, d'après le théorème de changement de variable pour un segment, il vient

$$\int_a^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Or, si x tend vers b par valeurs inférieures, $\varphi(x)$ tend vers β et il en résulte que $I_{\alpha,\beta}$ est convergente et égale à $I_{a,b}$.

Remarque 9 - 17

Le point important est que les formules aient un sens : il faut supposer $f\circ\varphi$ intégrable donc au minimum continue par morceaux (dans le cadre de ce cours, mais intégrable au sens général suffirait) et que φ a des limites en a et b.

Exercices

Séries

9 - 1 Ⓢ ★ Produit de CAUCHY

Montrer que le produit de CAUCHY des deux séries divergentes $2+\sum_{n\geq 1} 2^n$ et $-1+\sum_{n\geq 1} 1$ est une série (absolument) convergente.

9 - 2 Ⓢ ★ Série alternée

Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n}}$.

9 - 3 Ⓢ ★ Intégrale de DIRICHLET

Montrer que la série $\sum \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\,dt$ est convergente, mais pas absolument convergente.

9 - 4 Ⓢ ★ †

Montrer que la série $\sum \sin\left(\pi(1-\sqrt{2})^n\right)$ est absolument convergente. En déduire le même résultat pour $\sum \sin\left(\pi(1+\sqrt{2})^n\right)$.

9 - 5 Ⓢ ★ Formule d'addition de sin

Soit, pour x et y réels (ou complexes), les séries données par

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \qquad g(y) = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \cdots .$$

Exprimer $f(x)g(y) + f(y)g(x)$ sous forme de série, en justifiant les calculs effectués.

9 - 6 Ⓢ ★★ Convergence des séries de RIEMANN

On souhaite montrer, en utilisant le critère de LEIBNIZ, que la série de RIEMANN $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si $\alpha > 1$.

a. Montrer, pour n dans $\mathbf{N}^*$ et $\beta = \frac{1}{k}$ avec $k \in \mathbf{N}^*$,
$$\frac{1}{(2n-1)^\beta} - \frac{1}{(2n)^\beta} \geq \frac{\beta}{2^{1+\beta}}\frac{1}{n^{1+\beta}}.$$

b. En déduire que les sommes partielles de la série $\sum \frac{1}{n^{1+\beta}}$ sont majorées par $\frac{2^{1+\beta}}{\beta}$.

c. Conclure.

9 - 7 Ⓢ ★★ Produit de CAUCHY †

a. Déterminer une série $\sum(-1)^n a_n$ telle que le produit de CAUCHY avec elle-même soit la série divergente $\sum(-1)^n$.

b. Montrer que $\sum(-1)^n a_n$ converge.

c. Est-elle absolument convergente ?

9 - 8 Ⓢ ★★

Nature de $\sum(10 - n^{1/p_n})$ où p_n désigne le nombre de chiffres dans l'écriture en base 10 de n.

9 - 9 Ⓢ ★★ Transformée d'ABEL

Soit $\sum a_n$ une série convergente et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite monotone bornée. Démontrer que $\sum a_n b_n$ est convergente.

9 - 10 Ⓢ ★★ Transformation d'ABEL

a. Étudier en fonction de α dans $\mathbf{R}_+^*$ et t dans $\mathbf{R}$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{int}}{n^\alpha}$.

b. En déduire l'étude des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(nt)}{n^\alpha}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nt)}{n^\alpha}$.

9 - 11 Ⓢ CCP 2013 ★★ Séries alternées

On considère les deux suites suivantes $u_n = \frac{1}{\ln(n)+(-1)^n n^a}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{n^a}$ avec $a > 0$.

a. Étudier la nature de $\sum v_n$.

b. À partir d'un certain rang, la série $\sum u_n$ est-elle alternée ?

c. Étudier la nature de la série $\sum(u_n - v_n)$.

d. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

9 - 12 Ⓢ C 2013 ★★ Convergence en moyenne

Soit E l'espace vectoriel des suites réelles. On étudie l'application f qui à une suite u associe la suite v définie par : $\forall n \in \mathbf{N}$, $v_n = \frac{u_0 + 2u_1 + \cdots + (n+1)u_n}{(n+1)^2}$.

a. Montrer que si u converge, alors $f(u)$ converge également. Préciser alors sa limite.

b. Montrer que f est un automorphisme de E.

c. Trouver valeurs propres et vecteurs propres de f.

d. On note F le sous-espace vectoriel de E constitué des suites bornées. On le munit de la norme infinie. Montrer que F est stable par f.

e. Montrer que f est continu pour la norme considérée et (♠) préciser sa norme subordonnée.

9 - 13 Ⓢ C 2013 ★★★ Séries de puissances

Soit $\sum u_n$ une série complexe absolument convergente.

a. Pour k dans $\mathbf{N}^*$, montrer que $\sum u_n^k$ converge.

b. On suppose que, pour tout k dans $\mathbf{N}^*$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0$.

i. Montrer qu'il existe n_0 dans $\mathbf{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$, $|u_n| < 1$.

ii. On pose $U(k) = \sum_{n=0}^{n_0} u_n^k$ et $R(k) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n^k$. Montrer $\lim U(k) = \lim R(k) = 0$.

iii. Soit P dans $\mathbf{C}[X]$. Quelle est la limite $\sum_{n=0}^{n_0} P(u_n)u_n^k$? En déduire $\forall n \leq n_0$, $|u_n| < 1$.

iv. Montrer que (u_n) est la suite nulle.

9 - 14 Ⓢ ★★★ Problème de Bâle ♥

a. Déterminer α et β dans $\mathbf{R}$ tels que, pour tout entier naturel non nul n, on ait $\int_0^\pi (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$.

b. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Indication : on pourra utiliser le lemme de Riemann-Lebesgue, i.e. se souvenir du comportement de $\int_a^b f(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini, avec f régulière.

9 - 15 Ⓢ ★★★ Théorème de Mertens

On suppose que la série $\sum a_n$ converge absolument et que la série $\sum b_n$ est convergente. On note $\sum c_n$ leur produit de Cauchy.

a. On pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\beta_n = \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$. Montrer

$$\sum_{k=0}^{n} c_k = A_n\beta_0 - \sum_{k=0}^{n} a_k\beta_{n+1-k}\ .$$

b. En déduire que $\sum c_n$ converge et calculer sa somme.

9 - 16 Ⓢ ★★★ Suites récurrentes

a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle bornée et telle que $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment non vide de $\mathbf{R}$.

b. Soit f une fonction continue de $[0;1]$ dans lui-même et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite donnée par u_0 dans $[0;1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer qu'elle converge si et seulement si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$.

9 - 17 Ⓢ ★★★ Théorème taubérien ♥

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs complexes et $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des moyennes arithmétiques de ses premiers termes, i.e. $m_n = \frac{1}{n+1}s_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$.

a. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aussi et qu'alors leurs limites sont égales.

b. Construire une suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ positive non bornée telle que $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ tende vers 0.

c. On pose $b_n = \Delta a_{n-1}$, i.e. $b_n = a_n - a_{n-1}$. Montrer que si $\lim nb_n = 0$ et $(m_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aussi.

d. Même conclusion sous l'hypothèse plus faible que $(nb_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.

Indication : écrire $a_n - m_n = \frac{k+1}{n-k}(m_n - m_k) + \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}(a_n - a_i)$ et choisir k de sorte qu'on ait $k \leq \frac{n-\varepsilon}{1+\varepsilon} < k+1$.

Familles sommables

9 - 18 Ⓢ ★★ Sommabilité

Montrer qu'une famille $(a_i)_{i\in I}$ de réels est sommable si et seulement si l'ensemble de ses sommes finies est borné, i.e. si $\left\{ \sum_{j\in J} a_j \;\middle|\; J \in \mathscr{P}_f(I) \right\}$ est borné.

9 - 19 ★★★ Convexité

a. Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres complexes et C une partie convexe et fermée telle que la somme de toute sous-famille de $(a_i)_{i\in I}$ appartient à C. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de réels dans $[0;1]$. Montrer que la somme de toute sous-famille de $(\lambda_i a_i)_{i\in I}$ appartient à C.

b. En déduire que, pour $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs complexes, les familles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\left(\frac{nu_n}{p(p+1)}\right)_{0\leq n\leq p}$ sont simultanément sommables ou non. Que dire de leurs sommes ?

Intégrales

9 - 20 Ⓢ CCP 2012 ★ Fraction rationnelle

Calculer, pour y réel, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x+iy)}\,\mathrm{d}x$.

9 - 21 Ⓢ M 2012 ★ Intégrabilité

Soit f dans $C^1([1;+\infty[, \mathbf{R}_+^*)$ tel que $\lim_{+\infty} \frac{f'}{f} = -\infty$. Montrer que f est intégrable sur $[1;+\infty[$.

9 - 22 Ⓢ ★★ Inégalité triangulaire

Démontrer l'inégalité triangulaire en suivant les indications suivantes : démontrer l'inégalité dans le cas des fonctions en escalier. Soit alors $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E et $\|\cdot\|_\infty$ la norme infinie relativement à cette base. Par équivalence des normes, on dispose de C dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\|\cdot\| \leq C\,\|\cdot\|_\infty$. Montrer que pour $I = [\,a;b\,]$, f dans $C^0_{mcx}(I,E)$ et φ en escalier sur I, on a

$$\left\|\int_I f\right\| \leq \int_I \|f\| + C(b-a)\sup_I \|f-\varphi\|_\infty + C\left\|\int_I (f-\varphi)\right\|_\infty$$

puis conclure.

9 - 23 Ⓢ ★★ Calculs pratiques

Existence et calcul des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^3\ln(t)}{(1+t^4)^3}\,\mathrm{d}t$

b. $\displaystyle\int_{-2}^{0} \frac{\sqrt{-x(x+4)}}{x}\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(8x^2-4x+5)\sqrt{1+x^2}}$

d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(2+(t+3)\ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right)\right)\mathrm{d}t$

e. $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{t^2+3t+3}{(t+1)^3}e^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$

9 - 24 Ⓢ ★★ Intégrale trigonométrique

Soit $a_n = \displaystyle\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{4\cos(x)-5}\,\mathrm{d}x$. Calculer a_0, a_1 puis, pour n entier naturel, $a_n + a_{n+2}$. En déduire a_n pour tout n.

9 - 25 Ⓢ ★★ Intégrale oscillante

Existence, pour n dans $\mathbf{N}$, et calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t$

9 - 26 Ⓢ CCP ★★ Intégrales de Dirichlet et Fresnel

a. Soit $M > 0$ et u une fonction de classe C^1 sur $[\,1;+\infty\,[$ bornée (en valeur absolue) par M. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{u'(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

b. En déduire que les intégrales $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(t^2)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes.

c. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\sin(t^3)\,\mathrm{d}t$ converge. On pourra commencer par effectuer un changement de variable.

9 - 27 Ⓢ ★★ Intégrale de Fresnel

Montrer que les intégrales de Fresnel $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos(x^2)\,\mathrm{d}x$ convergent. Sont-elles absolument convergentes, i.e. les fonctions $x\mapsto\sin(x^2)$ et $x\mapsto\cos(x^2)$ sont-elles intégrables sur $\mathbf{R}_+$?

9 - 28 Ⓢ C 2001 ★★ Quadrature

Soit a, b et c des réels deux à deux distincts, avec $a<b$.

a. Montrer qu'il existe un unique triplet (α,β,γ) de réels tel que pour tout P dans $\mathbf{R}_2[X]$ on ait l'identité, notée (1),

$$\int_a^b \frac{P(t)}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}\,\mathrm{d}t = \alpha P(a)+\beta P(b)+\gamma P(c)\,.$$

b. Étudier, pour a et b fixés quelconques, l'existence de c tel que (1) soit vrai pour tout P dans $\mathbf{R}_3[X]$.

c. L'identité (1) est-elle réalisable pour tout P dans $\mathbf{R}_4[X]$?

d. Décrire l'ensemble H_n des polynômes P de $\mathbf{R}_n[X]$ qui vérifient (1).

9 - 29 Ⓢ TPE ★★ Calcul d'intégrale

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-2t}-e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

9 - 30 Ⓢ ★★ Uniforme continuité et intégrabilité

Soit f uniformément continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et intégrable sur $\mathbf{R}_+$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et la préciser.

9 - 31 Ⓢ ★★ Changements de variable

Soit a dans $\mathbf{R}_+^*$. On cherche à calculer l'intégrale I donnée par $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\exp\left(-x^2-\frac{a^2}{x^2}\right)\mathrm{d}x$.

a. Montrer que I est bien défini.

b. Montrer qu'on a

$$I = \int_0^{\sqrt{a}}\exp\left(-x^2-\frac{a^2}{x^2}\right)\left(1+\frac{a}{x^2}\right)\mathrm{d}x\,.$$

c. Conclure en utilisant la valeur de l'intégrale de Gauss.

9 - 32 Ⓢ ★★ Équation différentielle

Soit $E = C(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$, $b\in\mathbf{R}$ et $a>0$.

a. Montrer que, pour tout $f\in E$, il existe un unique g dans $C^1(\mathbf{R}_+,\mathbf{R})$ tel que $g'+ag=f$ et $g(0)=b$.

b. Montrer que si f est intégrable sur $\mathbf{R}_+$, g l'est également. Donner une relation entre $\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty}g(t)\,\mathrm{d}t$.

9 - 33 Ⓢ ★★ **Équation différentielle**

Soit f continu et intégrable sur $\mathbf{R}$. On considère l'équation différentielle $(E) : y' - y + f = 0$.

a. Montrer que (E) admet une unique solution F bornée sur $\mathbf{R}$.

b. Montrer que F est intégrable sur $\mathbf{R}$ et comparer $\int_{\mathbf{R}} F$ et $\int_{\mathbf{R}} f$.

9 - 34 Ⓢ ★★ **Limites**

Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles, admettant des limites en $-\infty$ et en $+\infty$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (f(x+1) - f(x))\,\mathrm{d}x$ existe et la calculer.

9 - 35 Ⓢ **M** ★★★ **Intégrabilité**

Intégrabilité sur $\mathbf{R}_+^*$ de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$?

9 - 36 Ⓢ ★★★ **Décomposition d'intégrale oscillante**

Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t} + \cos(t)}$ est semi-convergente. On écrira l'intégrande comme somme de deux fonctions de la forme $\dfrac{\sin(t)}{t^\alpha}$ et d'une fonction intégrable.

9 - 37 Ⓢ **M 2015** ★★★ **Intégrale oscillante**

Existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\sqrt{t + \sqrt{t}\sin(t)}}\,\mathrm{d}t$?

9 - 38 Ⓢ ★★★ **Sur un air de Cauchy-Schwarz**

Soit f dans $C^0_{mcx}(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R})$. On suppose f et xf de carré intégrable, i.e. les fonctions $x \mapsto f^2(x)$ et $x \mapsto x^2 f^2(x)$ sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$. Montrer que f l'est aussi et que son intégrale est majorée par

$$2\left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/4}\left(\int_0^{+\infty} t^2 f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/4}.$$

9 - 39 Ⓢ ★★★ **Intégrale de Dirichlet** ♥

On se propose de calculer l'intégrale de Dirichlet donnée par $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

a. En utilisant une somme trigonométrique, calculer u_n donné (pour n entier naturel) par

$$u_n = \int_0^\pi \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\,\mathrm{d}x\,.$$

b. Montrer que v_n donné (pour n entier naturel) par

$$v_n = \int_0^\pi \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)\mathrm{d}x$$

tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

c. Conclure.

Passages à la limite

9 - 40 Ⓢ ★★

Donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^n$.

Indication : On pourra introduire $a_{k,n} = \mathbb{1}_{k<n}\left(1 - \dfrac{k}{n}\right)^n$.

9 - 41 Ⓢ ★★★★

On désire montrer, pour x réel, l'identité

$$\mathrm{sh}(x) = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \times \cdots$$

le produit infini étant vu comme la limite (si elle existe) des produits des n premiers termes.

a. Montrer que, pour x non nul, on a

$$\ln\left(\frac{\mathrm{sh}(x)}{x}\right) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=1}^N \ln\left(1 + \frac{x^2}{(2N+1)^2}\cot^2\left(\frac{k\pi}{2N+1}\right)\right).$$

b. Conclure en s'inspirant de la démonstration de l'identité $\exp(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

9 - 42 ★★★★

On désire montrer, pour x dans $\mathbf{R} \setminus \pi\mathbf{Z}$, l'identité

$$\sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \times \cdots$$

le produit infini étant vu comme la limite (si elle existe) des produits des n premiers termes.

a. Pour $n = 2p + 1$, avec p entier naturel, établir que $\sin(nx)$ est égal à

$$n\sin(x)\prod_{k=1}^p\left(1 - \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(k\pi/n)}\right)$$

et aussi à

$$n\cos^n(x)\tan(x)\prod_{k=1}^p\left(1 - \frac{\tan^2(x)}{\tan^2(k\pi/n)}\right).$$

b. Établir pour $0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$ les inégalités $\dfrac{\sin(x)}{\sin(y)} > \dfrac{x}{y}$ et $\dfrac{\tan(x)}{\tan(y)} < \dfrac{x}{y}$.

c. Conclure.