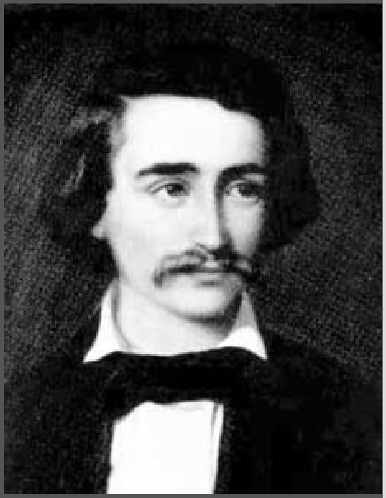
CHAPITRE

8

Positivité



Richard DEDEKIND (6/10/1831-12/2/1916) naît et meurt à Brunswick, où il passe presque toute sa vie. Il vit célibataire avec sa sœur Julia jusqu'à la mort de celle-ci en 1914. DEDEKIND est le dernier élève de GAUSS à Göttingen. Il y donne des cours de probabilités et de géométrie, et y fait connaître la théorie de GALOIS, popularisant la notion de groupe fondamentale en algèbre et en arithmétique.

En 1858, il va à Zurich pour enseigner à l'École polytechnique fédérale de Zurich. C'est là qu'il définit les coupures, une nouvelle idée pour représenter les nombres réels. En 1872, il publie ses réflexions dans « Continuité et nombres irrationnels ». En 1874, il rencontre CANTOR et est parmi les premiers à comprendre la portée de ses travaux sur la théorie des ensembles infinis.

DEDEKIND édite les œuvres de DIRICHLET, GAUSS et RIEMANN. Les éditions de 1879 and 1894 des Traités de RIEMANN sur la théorie des nombres contiennent des suppléments introduisant la notion d'idéal, fondamentale en théorie des anneaux. (le mot « anneau », introduit en 1897 par HILBERT, n'apparaît dans le travail de DEDEKIND.) Le concept est développé par HILBERT et (Emmy) NOETHER. Il généralise des notions de KUMMER introduites pour tenter de démontrer le théorème de FERMAT.

En 1888, il publie *Was sind und was sollen die Zahlen ?* (Que sont les nombres et à quoi servent-ils ?), avec une axiomatique des nombres naturels, simplifiée un an plus tard par PEANO. La notation **N** est introduite par DEDEKIND (qui n'inclut pas 0) et il construit formellement **Z**. Toutefois la notation est de BOURBAKI : DEDEKIND utilise **K** !

Programme

— Séries à termes positifs. Règle de D'ALEMBERT. Comparaison série-intégrale. Interprétation géométrique. Sommation des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

— Famille sommable de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable. Somme. Sommation par paquets (démonstration hors programme).

— Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{R}_+$, notée $\mathbf{E}(X)$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique, une loi de POISSON. Si $0 \leq X \leq Y$ et si Y est d'espérance finie, alors X est d'espérance finie. Inégalité de MARKOV.

— Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$. Critère d'intégrabilité. Cas des fonctions puissances sur $[1; +\infty[$. Comparaisons : $0 \leq f \leq g$, $f = \mathrm{O}(g)$, $f \sim g$. Intégration sur un intervalle quelconque. Cas des fonctions puissances. Cas de nullité de l'intégrale d'une fonction continue à valeurs positives. Intégration des relations de comparaison : domination, négligeabilité, équivalence.

— Fonctions convexes d'une variable réelle, inégalité de JENSEN. Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes. Caractérisation des fonctions convexes dérivables ou deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe et de ses cordes. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

1 Introduction

À partir des années 1860 il devient pressant de construire formellement les nombres réels. Jusqu'à cette date, l'existence des réels et leurs propriétés sont admises, par exemple par CAUCHY dans son cours à l'École Polytechnique ou par GAUSS dans ses nombreuses démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre. En 1817 le prêtre Praguois Bernhard BOLZANO établit qu'une partie non vide majorée de réels admet une borne supérieure, dans un mémoire peu lu et peu influent jusqu'aux travaux de WEIERSTRASS vers 1865. Les premières constructions, basées sur les suites de CAUCHY, sont dues à Charles MÉRAY en 1869, mais surtout à Georg CANTOR dont les idées furent exposées en 1872 par HEINE, date de publication de la méthode des coupures par DEDEKIND. Ce dernier s'appuie également sur la propriété de borne supérieure mais, contrairement à BOLZANO, définit les nombres réels.

Théorème 8 - 1

(♠) Soit $\mathbf{K}$ un corps totalement ordonné. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes à $\mathbf{K} \simeq \mathbf{R}$:

1. $\mathbf{K}$ possède la propriété de la borne supérieure (DEDEKIND) ;
2. le théorème de la limite monotone (pour les suites) est vrai dans $\mathbf{K}$;
3. $\mathbf{K}$ est archimédien et toute suite de CAUCHY y est convergente (CANTOR) ;
4. $\mathbf{K}$ est archimédien et le théorème des suites adjacentes y est vrai.

Un corps ordonné est un corps muni d'une relation d'ordre total et compatible à l'addition ($a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$) et à la multiplication ($a \geq 0$ et $b \geq 0 \Longrightarrow ab \geq 0$)

et une suite (u_n) est dite de CAUCHY si

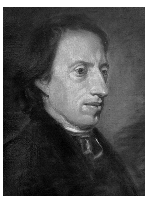
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbf{N}\ \forall (p,q) \in \mathbf{N}^2 \quad (p \geq n \wedge q \geq n) \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon\ .$$

David HILBERT énonce que $\mathbf{R}$ est un ensemble maximal parmi les corps totalement ordonnés archimédiens, et que ceci le caractérise. De cette façon il construit les nombres réels à partir de la géométrie. Il complète l'axiomatique d'EUCLIDE et construit donc l'analyse à partir de la géométrie.

Pour DEDEKIND, un réel est une partie propre A de $\mathbf{Q}$, i.e. $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbf{Q}$, stable par minorant et n'ayant pas d'élément maximal, i.e.

$$\forall a \in A \quad (\forall x \in \mathbf{Q} \quad x < a \Longrightarrow x \in A) \wedge (\exists a' \in A \quad a < a')\ .$$

Il identifie un rationnel r à $\{x \in \mathbf{Q} \,|\, x < r\}$ et e à $\left\{ x \in \mathbf{Q} \;\middle|\; \exists N \in \mathbf{N}\ x < \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} \right\}$. On peut aussi écrire un réel comme un couple (A, B) avec $B = \mathbf{Q} \setminus A$, de sorte que $\{A, B\}$ est une partition de $\mathbf{Q}$ telle que tous les éléments de A sont strictement inférieurs à ceux de B et telle que A n'admette pas d'élément maximal. Avec cette identification, un réel (A, B) est la « coupure » entre A et B. Il est rationnel si et seulement si B admet un élément minimal. L'ordre est celui donné par l'inclusion : $(A, B) \leq (A', B') \equiv A \subset A'$ En particulier $(A, B) \leq 0$ si $A \subset \mathbf{Q}_-^*$. L'addition se fait sur la partie gauche : $A + A' = \{a + a' \,|\, (a, a') \in A \times A'\}$. Sur la partie droite, c'est plus subtil, on a $\mathbf{Q} \setminus (A + A') = B + B' \cup \{\min(B + B')\}$, où le minimum peut ne pas exister (si la somme n'est pas rationnelle). Quant à la multiplication, elle est plus facilement définie sur les nombres positifs puisqu'alors $\mathbf{Q} \setminus A \cdot A' = BB' \cup \{\min(BB')\}$ avec $BB' = \{bb' \,|\, (b, b') \in B \times B'\}$. On la complète en utilisant la règle des signes.



Bernhard Bolzano
1781 – 1848

C'est dans ce contexte, avec cette construction que les théorèmes suivants prennent tout leur sel !

Théorème 8 - 2

BOLZANO – 1817 & DEDEKIND – 1872
Toute partie non vide majorée de $\mathbf{R}$ admet une borne supérieure.

Théorème 8 - 3

Convergence monotone
Soit (u_n) une suite croissante de réels. Alors (u_n) converge si et seulement si elle est majorée. Dans ce cas on a $\lim u_n = \sup u_n$ et sinon (u_n) diverge vers $+\infty$.

Le point principal est qu'on définit, construit ou atteint des nombres réels en considérant des ensembles et en prenant leur borne supérieure. Il n'est par exemple pas immédiat que la limite est linéaire dans ce contexte. La partie multiplication par un réel positif et l'addition sont des conséquences du fait que $\mathbf{R}$ est un corps ordonné, i.e. que l'addition et la multiplication sont compatibles à l'ordre. La partie multiplication par un réel négatif nécessite une gymnastique de renversement des inégalités. C'est pourquoi on va tout d'abord considérer des objets à valeur dans $\mathbf{R}_+$ et utiliser des moyennes (ou combinaisons convexes), de façon à former l'analogue des espaces vectoriels dans ce contexte, à savoir des cônes convexes.

2 Familles de réels positifs

Programme

La construction des nombres réels est hors-programme. Il est admis que $\mathbf{R}$ existe et vérifie la propriété de la borne supérieure. On en déduit le théorème de convergence monotone, celui des suites adjacentes (et des segments emboîtés) ainsi que le caractère archimédien. Seules les suites de CAUCHY sont hors-programme. On remplacera ce concept par un autre, légèrement moins général, dit de locale compacité et qu'on formulera comme réciproque partielle du théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS.

Définition 8 - 1

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. On note $\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$ l'élément de $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ défini par

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} u_n = \sup_{N\in\mathbf{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n \ .$$

La série est dite convergente si sa somme est finie, divergente sinon.

Proposition 8 - 1

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels positifs. Alors $\sum u_n$ converge si et seulement si, en notant $\mathscr{P}_f(\mathbf{N})$ l'ensemble des parties finies de $\mathbf{N}$,

$$\sup_{J\in\mathscr{P}_f(\mathbf{N})} \sum_{j\in J} u_j$$

existe (et est fini).

Démonstration. On suppose que $\sum u_n$ converge et on note $S = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n$, i.e. $S = \sup_{N\in\mathbf{N}} \sum_{n=0}^{N} u_n$. Pour tout J dans $\mathscr{P}_f(\mathbf{N})$, on a $\sum_{n\in J} u_n \leq \sum_{n=0}^{\max(J)} u_n$, par positivité des termes et donc S est aussi un majorant de ces sommes, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable.

Comme $[\![0;n]\!] \subset \mathscr{P}_f(\mathbf{N})$ pour tout entier n, la réciproque est immédiate. □

D'où le concept plus général de famille sommable.

Définition 8 - 2

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs indexée par un ensemble dénombrable I est dite sommable si, en notant $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I,

$$\sup_{J\in\mathscr{P}_f(I)} \sum_{j\in J} u_j$$

existe (et est fini).

Dans ce cas on note $\sum_{i\in I} u_i$ ce supremum et on l'appelle somme de la famille $(u_i)_{i\in I}$. Dans le cas contraire, on dit que la famille n'est pas sommable et on note $\sum_{i\in I} u_i = +\infty$.

Remarques 8 - 1

Une série $\sum u_n$ à termes réels positifs est convergente si et seulement si la famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable. La somme est indépendante du point de vue choisi.

Toute sous-famille d'une famille sommable de réels positifs est sommable.

Exemple 8 - 1

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille disjointe d'intervalles ouverts inclus dans $[0;1]$ et u_i la longueur de X_i, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable de somme inférieure à 1.

Propriété 8 - 1

La famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable de somme S si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists J \in \mathscr{P}_f(I), \forall K \in \mathscr{P}_f(I), J \subset K \Longrightarrow S - \varepsilon \leq \sum_{k\in K} u_k \leq S .$$

Dans ce cas, pour toute suite croissante $(J_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de parties finies de I telle que $\lim \uparrow J_n = I$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j\in J_n} u_j = \sum\limits_{i\in I} u_i$.

Démonstration. L'existence d'une partie J vérifiant $S-\varepsilon \leq \sum\limits_{j\in J} u_j \leq S$ résulte de la définition d'un supremum. La propriété résulte alors de la positivité des termes.

La seconde partie résulte du fait que si $\lim \uparrow J_n = I$, alors pour tout J dans $\mathscr{P}_f(I)$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $J \subset J_n$. □

En pondérant les séries ou les familles, on obtient des notions encore plus générale comme celle de l'espérance mathématique (somme de la famille $(p_n x_n)$ où $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$) ou de l'intégrale généralisée : une somme de RIEMANN n'est rien d'autre que la somme de $(u_i f(\xi_i))$ où u_i est comme ci-dessus la longueur de X_i et $\xi_i \in X_i$.

Le mot « Espérance » est à rapprocher, en mathématique, du verbe espagnol *esperar* qui signifie *attendre*. En anglais on parle d'ailleurs d'*expected value*. Il s'agit donc d'une valeur attendue.

Antoine GOMBAUD, chevalier de Méré, propose à Blaise PASCAL le problème des partis, dans la continuation de celui de la rupture des contrats entre marchands. PASCAL développe ses arguments dans son *Traité du triangle arithmétique* et l'illustre à propos d'un jeu de hasard en trois parties gagnantes interrompu avant la fin. La question est de répartir les enjeux de façon équitable.

Définition 8 - 3

Soit X une variable aléatoire réelle sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega)$ fini ou inclus dans $\mathbf{R}_+$; on définit l'espérance de X par la formule

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x)x$$

ou, autrement dit, $\mathbf{E}(X)$ est la somme de la famille $(\mathbf{P}(X=x)x)_{x\in X(\Omega)}$.

Dans le cas où l'ensemble des valeurs est infini, l'espérance peut être infinie.

Exemple 8 - 2

Si A est un événement observable, $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire discrète et positive d'espérance $\mathbf{P}(A)$.

Exemple 8 - 3

La moyenne d'une variable aléatoire suivant une loi de BERNOULLI est p puisqu'alors

$$\mathbf{E}(X) = (1-p)\times 0 + p \times 1 = p\ .$$

Exemple 8 - 4

Trois bus emmènent 135 étudiant(e)s en voyage scolaire dont un(e) qui connaît un raccourci. L'espérance du nombre d'étudiant(e)s arrivant en premier est supérieure à 45.

Exemple 8 - 5

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}k = np$ puisque, en posant $P = (1+T)^n$, on a $P = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T^k$ et donc $TP' = nT(1+T)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kT^k$, d'où $\mathbf{E}(X) = (1-p)^n(TP')\left(\frac{p}{1-p}\right)$, i.e.

$$\mathbf{E}(X) = (1-p)^n\frac{np}{1-p}\left(1+\frac{p}{1-p}\right)^{n-1} = np\ .$$

Ce n'est pas surprenant puisqu'on a affaire à la somme de n variables de BERNOULLI, chacune d'espérance p.

Proposition 8 - 2

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $\mathbf{E}(X) = \lambda$.

Démonstration. On a $\mathbf{E}(X) = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$ □

Remarque 8 - 2

C'est cohérent avec le fait que X peut s'obtenir comme une limite de variables aléatoires suivant une loi binomiale d'espérances égales à λ.

Exemple 8 - 6

Matching problem

Soit $\Omega = S_n$, $\mathcal{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ et $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme. On note X la variable aléatoire donnée par $X(\sigma) = \mathrm{Card}\,[\![1;n]\!]^\sigma = \mathrm{Card}\,\{k \in [\![1;n]\!] \mid \sigma(k) = k\}$. On introduit alors, pour k dans $[\![1;n]\!]$, la variable aléatoire X_k donnée par $X_k(\sigma) = \delta_{k,\sigma(k)}$. On a donc $X = \sum_{k=1}^{n}X_k$ et $X_k \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n}\right)$ donc $\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}(X_k) = 1$.

Autrement dit le nombre de points fixes moyen d'une permutation est 1.

Dans la question posée à PASCAL, si une joueuse mène par deux victoires à une et que chaque manche est modélisée par une loi de BERNOULLI de paramètre $\frac{1}{2}$, alors elle a trois chances sur quatre de remporter la partie. Aussi PASCAL suggère que, si le jeu devait s'arrêter à ce moment là, cette joueuse reparte avec trois quarts de la mise et son adversaire le quart restant car son espérance de gain est de trois quarts de la mise. Si le paramètre était p, l'espérance serait de $p + (1-p)p$, soit $p(2-p)$, pour une mise de 1.

3 Intégration des fonctions positives

Soit maintenant I un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$ (ni fermé, ni borné a priori).

Définition 8 - 4

Soit f dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{R}_+)$. On dit que f est intégrable sur I si $\sup_{[\,a;b\,]\subset I} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est fini. On note alors $\int_I f$ cette quantité ou encore $\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dans le cas contraire, on dit que f n'est pas intégrable sur I.

Remarques 8 - 3

Cette notion n'est pas nouvelle si I est un segment puisque, par croissance de l'intégrale, $\int_I f$ est un majorant et même un maximum des quantités $\int_J f$ pour J segment inclus dans I. La notation est donc cohérente.

Si $J \subset I$ et si f est intégrable sur I, alors f est intégrable sur J et

$$\int_J f \leq \int_I f\ .$$

Exemple 8 - 7

Si I est borné, la fonction constante égale à 1 est intégrable sur I et on a

$$\int_I 1 = \ell(I) = \sup(I) - \inf(I)\ ,$$

où $\ell(I)$ représente sa longueur.

La caractérisation suivante est importante car elle permet de se ramener à des suites.

Théorème 8 - 4

Intervalles exhaustifs

Si $I = \lim_{n\in\mathbf{N}} \uparrow I_n$ où (I_n) est une famille de segments, alors f est intégrable sur I si et seulement si la suite $\left(\int_{I_n} f\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est majorée ou encore si et seulement si elle est convergente.

Dans ce cas on a

$$\int_I f = \sup_n \int_{I_n} f = \lim_n \int_{I_n} f\ .$$

Démonstration. C'est immédiat en remarquant que, si J est un segment inclus dans I, alors il existe un entier N à partir duquel $J \subset I_n$, pour $n \geq N$, en utilisant la croissance de l'intégrale : $\sup_J \int_J f = \sup_n \int_{I_n} f$. □

Exemple 8 - 8

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ diverge car, pour tout entier naturel n, on a $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2(n+1)}$

Exercice

Trouver un exemple de fonction intégrable non bornée.

Exemple 8 - 9

Si f est continue par morceaux sur $]a;b[$ et si $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de limite a, alors f est intégrable sur $[a;b]$ si et seulement si la limite de $\displaystyle\int_{a_n}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Propriété 8 - 2

Relation de Chasles

Soit c un point intérieur à I, $J_1 =]-\infty;c] \cap I$ et $J_2 = [c;+\infty[\cap I$, alors f est intégrable sur I si et seulement si elle l'est sur J_1et sur J_2. Dans ce cas on a $\displaystyle\int_I f = \int_{J_1} f + \int_{J_2} f$.

Démonstration. Cela résulte directement de la relation de Chasles dans le cas des segments. □

Définition 8 - 5

Intégrabilité locale

On dit que f est intégrable au voisinage d'une des bornes α de I (éventuellement infinie) si elle est intégrable sur un intervalle J inclus dans I dont l'une des bornes est α. Par relation de Chasles f est intégrable sur I si et seulement si elle l'est au voisinage de chacune des bornes de I.

Voici quelques propriétés élémentaires.

Propriétés 8 - 3

1. En une borne finie α, si f est continue ou prolongeable par continuité en α, alors f est intégrable au voisinage de α.
2. Si f est continue, alors $\displaystyle\int_I f = 0$ si et seulement si f est nulle.

Démonstration.

1. On note g la fonction prolongée en α. Pour x dans I, on note J le segment joignant α à x. Par continuité de g, l'intégrale $\displaystyle\int_J g$ existe. D'après ce qui précède, pour tout segment K inclus dans J et ne contenant pas α, on a $\displaystyle\int_K g \leq \int_J g$ et donc aussi $\displaystyle\int_K f \leq \int_J g$ puisque f et g coïncident sur K. Il en résulte que f est intégrable sur J, et donc localement intégrable au voisinage de α.
2. Si f est continue et $\displaystyle\int_I f = 0$, alors pour tout segment J inclus dans I, on a $\displaystyle\int_J f = 0$ et donc $f_{|J} = 0$ par caractérisation des intégrales de fonctions continues et positives sur un segment. Il en résulte que f est identiquement nulle sur I.

□

4 Structure

Comme $\mathbf{R}_+$ est un intervalle, on peut s'attendre à trouver pour les objets précédemment définis des structures proches : stabilité par addition ou par multiplication par un réel positif, par exemple. On parle de structure de cône convexe.

Propriété 8 - 4

Cône convexe des familles sommables de réels positifs

Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, alors $(a_i + b_i)_{i\in I}$ l'est aussi et $\displaystyle\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$.

Si λ est un réel positif, alors $(\lambda a_i)_{i\in I}$ est sommable de somme $\displaystyle\lambda \sum_{i\in I} a_i$.

Démonstration. Si A et B sont les sommes des deux familles, pour tout ε strictement positif, on applique la propriété précédente pour trouver J_0 et J_1 tels que, pour K dans $\mathscr{P}_f(I)$, on ait $\displaystyle A-\varepsilon \leq \sum_{k\in K} a_k \leq A$, si $J_0 \subset K$, et $B - \varepsilon \leq \sum_{k\in K} b_k \leq B$, si $J_1 \subset K$, et donc, pour $J_0 \cup J_1 \subset K$, $A + B - 2\varepsilon \leq \sum_{k\in K}(a_k + b_k) \leq A + B$.

De même, pour $J_0 \subset K$, on a $\displaystyle\lambda A - \lambda\varepsilon \leq \sum_{k\in K} \lambda a_k \leq \lambda A$. □

Théorème 8 - 5

Sommation par paquets – cas positif

Soit I un ensemble dénombrable et $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une partition de I. Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, alors elle est sommable si et seulement si

1. pour tout entier n, la famille $(u_i)_{i\in I_n}$ est finie ou sommable ;
2. la série $\displaystyle\sum_n \left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Dans tous les cas $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$, en convenant que si la somme du membre de gauche est infinie, soit un des termes de la série en n est infini, soit celle-ci est divergente, et réciproquement.

Démonstration. Si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I_n}$ est finie ou sommable d'après la remarque précédente. De plus pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on dispose d'une partie finie J de I telle que, pour toute partie K de I finie et contenant J,

$$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon \leq \sum_{j\in J} u_j \leq \sum_{k\in K} u_k \leq \sum_{i\in I} u_i\ .$$

Comme $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une partition de I, pour toute partie K de I finie et contenant J, on dispose de N dans $\mathbf{N}$ tel que K est inclus dans $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{N} I_n$ et il vient

$$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon \leq \sum_{k\in K} u_k = \sum_{n=0}^{N}\sum_{k\in I_n\cap K} u_k \leq \sum_{i\in I} u_i$$

et donc, par passage au supremum sur K ;

$$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{k\in I_n} u_k \leq \sum_{i\in I} u_i \ .$$

Par positivité des termes de la série du milieu, elle converge car elle est majorée, et on obtient par passage à la limite en N :

$$\sum_{i\in I} u_i - \varepsilon \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i \ .$$

D'où le résultat dans ce cas.

Si au contraire $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on distingue deux cas. Si l'une des familles $(u_i)_{i\in I_n}$ n'est pas sommable, le résultat est immédiat. Sinon, pour tout M dans $\mathbf{R}_+^*$, on dispose d'une partie finie J de I telle que, pour toute partie K de I finie et contenant J, $M \leq \sum_{j\in J} u_j \leq \sum_{k\in K} u_k$. On termine alors comme précédemment pour obtenir $M \leq \sum_{n=0}^{N} \sum_{i\in I_n} u_i$ puis $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i\in I_n} u_i = +\infty$. □

On appelle, très improprement, série double une famille indexée par $\mathbf{N}^2$. Le théorème de sommation par paquets se reformule en le théorème de Leonida Tonelli (1885-1946).

Théorème 8 - 6

Théorème de Tonelli discret

Une famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in\mathbf{N}^2}$ de réels **positifs** est sommable si et seulement si

1. pour tout entier j, la série $\sum_i a_{i,j}$ est convergente ;
2. la série $\sum_j \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right)$ est convergente.

De plus on a, même si certains termes sont infinis,

$$\sum_{(i,j)\in\mathbf{N}^2} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}\right) \ .$$

Propriété 8 - 5

Cône convexe des variables aléatoires positives intégrables

L'ensemble des variables aléatoires réelles positives sur un même espace probabilisé et admettant une espérance, est stable par addition et par multiplication par un scalaire positif et ces opérations sont compatibles à l'espérance.

Démonstration. Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes positives définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$. On note $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_m)_{m\in\mathbf{N}}$ les valeurs de X et Y. Afin de simplifier, si X ou Y sont à valeurs finies, on complète avec des valeurs arbitraires (positives) de probabilité nulle. Soit $Z = X + Y$ et (z_k) l'ensemble de ses valeurs. C'est un ensemble discret de réels positifs car $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ est dénombrable et $\mathbf{R}_+$ stable par addition. Par construction on a $(Z = z_k) = \sum_{n\in\mathbf{N}}(X = x_n, Y = z_k - x_n)$ et donc Z est mesurable, i.e. c'est une variable aléatoire. Plus précisément on a

$$\mathbf{P}\left(Z = z_k\right) = \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}^2} \mathbf{P}\left(X = x_n, Y = y_m\right) \ .$$

On commence par appliquer le théorème de TONELLI pour obtenir la sommabilité des familles positives $(x_n \mathbf{P}(X = x_n, Y = y_m))_{(n,m)\in\mathbf{N}}$ et $(y_m \mathbf{P}(X = x_n, Y = y_m))_{(n,m)\in\mathbf{N}}$ puisque la somme à n (resp. m) fixé vaut $x_n \mathbf{P}(X = x_n)$ (resp. $y_m \mathbf{P}(Y = y_m)$), par formule des probabilités totales, et que cette famille est sommable par hypothèse. On en déduit, en additionnant ces deux familles sommables,

$$\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) = \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}} (x_n + y_m)\mathbf{P}(X = x_n, Y = y_m)$$

Enfin, pour k fixé, on note $I_k = \{(n,m) \in \mathbf{N} \mid x_n + y_m = z_k\}$. Le théorème de sommation par paquets et la formule pour $\mathbf{P}(Z = z_k)$ donnée si-dessus entraînent que $X+Y$ admet une espérance, égale à $\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$.

La stabilité par multiplication par un scalaire positif résulte directement de celle des familles sommables puisque λX est une variable aléatoire d'ensemble de valeurs (λx_n) et qu'on a $(\lambda X_n = \lambda x_n) = (X = x_n)$ si $\lambda \neq 0$ et $\lambda X_n = 0$ sinon. □

Définition 8 - 6

Produit de CAUCHY

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes complexes. On appelle produit de CAUCHY des deux séries la série $\sum c_n$ définie par

$$c_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \ .$$

Théorème 8 - 7

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont deux séries à termes positifs convergentes, alors leur produit de CAUCHY $\sum c_n$ l'est aussi et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) . \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) \ .$$

Démonstration. Le produit de CAUCHY est un simple cas particulier de sommation par paquets (avec I_n le carré $[\![0;n]\!]^2$) et, en posant $\alpha_{m,n} = a_m b_n$, on déduit de

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \alpha_{i,j} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) . \left(\sum_{j=0}^{n} b_j\right) \leq \left(\sum_{i=0}^{+\infty} a_i\right) . \left(\sum_{j=0}^{+\infty} b_j\right)$$

que le produit de CAUCHY de deux séries convergentes est convergent et que la somme du produit est le produit des sommes. □

Proposition 8 - 3

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1}{p}$.

Démonstration. On considère, pour x dans $]0;1[$, la série $\sum x^n$ convergente de somme $\dfrac{1}{1-x}$. Son produit de CAUCHY avec elle-même est donc également convergent et sa somme est le carré de $\dfrac{1}{1-x}$. Autrement dit $\sum (n+1)x^n$ est convergente de somme $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ et donc, en décalant les indices et en l'appliquant pour $x = 1-p$, il vient $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p\frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$. □

Remarque 8 - 4

Quand on modélise un instant de premier succès par une loi géométrique, on a affaire à une variable soit qui n'est pas définie sur tout Ω, soit qui prend la valeur infinie. L'événement problématique est négligeable en ce sens qu'il est de probabilité nulle. On convient qu'il ne compte pas dans le calcul de l'espérance. Autrement dit $\mathbf{P}(X = +\infty) \cdot (+\infty) = 0$ si $\mathbf{P}(X = +\infty) = 0$.

Propriété 8 - 6

Cône convexe des fonctions positives (localement) intégrables

L'ensemble des fonctions positives et intégrables sur I (ou au voisinage d'une de ses bornes) est stable par addition et par multiplication par un scalaire positif et ces opérations sont compatibles à la prise d'intégrale.

Démonstration. Cela résulte directement de la linéarité de l'intégrale (sur un segment) et de l'argument utilisé pour les familles. □

5 Critères de comparaison

Proposition 8 - 4

Comparaison des séries à termes positifs

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries vérifiant, pour tout n entier naturel à partir d'un certain rang, $0 \leq a_n \leq b_n$. On a

1. Si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ aussi.
2. Si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ aussi.

Démonstration. Les suites de sommes partielles sont alors croissantes à partir d'un certain rang. Elles convergent donc si et seulement si elles sont majorées.

Soit n_0 le rang à partir duquel on a l'encadrement $0 \leq a_n \leq b_n$. On a alors, en notant $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$, $S_n - S_{n_0} \leq T_n - T_{n_0}$, pour $n \geq n_0$, et on en déduit que si (T_n) est majorée, alors (S_n) aussi, ainsi que la contraposée. □

Exemple 8 - 10

Nicole Oresme - 1350

La série harmonique diverge car, pour tout entier naturel n, on peut écrire $2^{\alpha-1} < n \leq 2^\alpha$ pour un certain α, à savoir l'entier supérieur le plus proche de $\log_2(n)$, et il vient

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots$$

et la série de gauche admet $1 + \frac{n}{2}$ comme somme partielle d'indice 2^n. D'où la divergence.

Toujours par comparaison, il en résulte que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge pour $\alpha \leq 1$.

Proposition 8 - 5

Comparaison des familles de réels positifs

Soit λ un réel positif et $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par un ensemble dénombrable I et telles que, pour tout i dans I, $a_i \leq \lambda b_i$. Alors si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, il en va de même pour $(a_i)_{i\in I}$ et $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i \leq \lambda \sum_{i\in I} b_i$.

Démonstration. On a en effet, pour J dans $\mathscr{P}_f(I)$, $\displaystyle\sum_{j\in J} a_j \leq \lambda \sum_{j\in J} b_j \leq \lambda \sum_{i\in I} b_i$. □

Corollaire 8 - 1

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang.

1. Si $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ ou $a_n = \mathrm{o}(b_n)$ et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum a_n$ aussi.
2. Si $a_n \sim b_n$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.

Théorème 8 - 8

Sommation des relations de comparaison

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes positifs à partir d'un certain rang. On suppose $a_n = \mathrm{O}(b_n)$ (resp. $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, $a_n \sim b_n$).

1. Si $\sum b_n$ converge, alors $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} b_k\right)$ (resp. $\mathrm{o}\left(\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} b_k\right)$, $\sim \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$).
2. Si $\sum b_n$ diverge, alors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \mathrm{O}\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$ (resp. $\mathrm{o}\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$, $\sim \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$).

Démonstration. La nature des séries a déjà été étudiée. On note $S_n(a) = \sum_{k\leq n} a_n$ et $R_n(a) = \sum_{k\geq n} a_n$.

Si on dispose de M dans $\mathbf{R}_+^*$ et de n_M dans $\mathbf{N}$ tel que, pour $n \geq n_M$, on ait $0 \leq a_n \leq M b_n$, on en déduit pour $n \geq n_M$, $0 \leq R_n(a) \leq R_n(b)$ et $0 \leq S_n(a) \leq S_{n_M}(a) - S_{n_M}(b) + S_n(b)$. De plus, si $\sum b_n$ diverge, pour tout N dans $\mathbf{N}$ et ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on dispose de $n_{\varepsilon,N}$ tel que, pour $n \geq n_{\varepsilon,N}$, $S_N(a) \leq \varepsilon S_n(b)$.

Dans le cas $a_n = \mathrm{O}(b_n)$, on dispose de tels M et n_M et alors pour $n \geq n_M$ (resp. $n \geq \max(n_M, n_{M,n_M})$), on a $R_n(a) \leq M R_n(b)$ (resp. $S_n(a) \leq 2M S_n(b)$) dans le cas convergent (resp. divergent). D'où le résultat dans ces cas là.

Dans le cas $a_n = \mathrm{o}(b_n)$, on peut choisir M arbitraire et le résultat en découle.

Enfin si $a_n \sim b_n$, on pose $c_n = |a_n - b_n|$, de sorte qu'on a $c_n = \mathrm{o}(b_n)$. Comme $0 \leq a_n \leq b_n + c_n$ et $0 \leq b_n \leq a_n + c_n$, il vient en utilisant ce qui précède dans le cas convergent (resp. divergent) $R_n(a) \leq R_n(b) + R_n(c)$ et $R_n(b) \leq R_n(a) + R_n(c)$, puis $|R_n(a) - R_n(b)| \leq R_n(c) = \mathrm{o}(R_n(b))$ (resp. $|S_n(a) - S_n(b)| \leq \mathrm{o}(S_n(b))$), d'où le résultat dans ces cas. □

Ernesto Cesàro
1859 – 1906

Corollaire 8 - 2

Sommation au sens de Cesàro

Soit (a_n) une suite réelle convergente. On note $\ell = \lim a_n$. Alors $\displaystyle\lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k = \ell$.

Démonstration. On a $|a_n - \ell| = \mathrm{o}(1)$ et $\sum 1$ diverge, d'où $S_n(|a-\ell|) = \mathrm{o}(n+1)$ d'après ce qui précède et $|S_n(a-\ell)| \leq S_n(|a-\ell|)$ par inégalité triangulaire, et donc $S_n(a) - (n+1)\ell = \mathrm{o}(n+1)$, et l'assertion s'ensuit. □

Proposition 8 - 6

Comparaison série et intégrale - MACLAURIN – 1742

Soit f une fonction continue par morceaux de $\mathbf{R}_+$ **décroissante et positive** (ou bien croissante et négative). Alors la série de terme général a_n avec

$$a_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n) = \int_{n-1}^{n} (f(t) - f(n))\,\mathrm{d}t$$

est convergente. En particulier $\sum f(n)$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont simultanément convergentes ou divergentes.

Dans le cas où $\sum f(n)$ est divergente, on a

$$\sum_{k=0}^{n} f(k) \sim \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Démonstration. Par décroissance, on a, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $0 \leq a_n \leq f(n-1) - f(n)$ et la série de terme général $f(n-1) - f(n)$ est convergente, de somme majorée par $f(0)$. Le résultat en découle par comparaison de séries à termes positifs.

Les sommes partielles s'écrivent, en utilisant la relation de CHASLES,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

et donc $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite quand n tend vers l'infini si et seulement si $\sum f(n)$ est convergente. Comme $([0;n])$ est une suite exhaustive d'intervalles pour $\mathbf{R}_+$, l'existence de cette limite équivaut à la convergence de l'intégrale.

Enfin deux expressions tendant vers l'infini dont la différence est bornée sont équivalentes, puisque leur différence est dominée par l'une quelconque des expressions considérées. □

Exemples 8 - 11

On obtient ainsi un critère de convergence pour les séries de RIEMANN et plus précisément

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)\,, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \underset{\substack{n\to+\infty \\ \text{si } 0<\alpha<1}}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \underset{\substack{n\to+\infty \\ \text{si } \alpha>1}}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\ .$$

La fonction ζ de RIEMANN, somme de la série du même nom dans le cas convergent, est très utilisée en théorie (analytique) des nombres du fait de son lien très profond avec les nombres premiers. Elle s'étend en une fonction de la variable complexe α qui, grâce à une équation fonctionnelle ou une écriture intégrale, peut même être définie sur tout le plan complexe, à l'exception de 1.

Bernhard RIEMANN, 1826–1866.

Proposition 8 - 7

Constante d'EULER-MASCHERONI

On a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

où γ est une constante réelle, dite constante d'EULER ou constante d'EULER-MASCHERONI.

Démonstration. On écrit $\ln(n)$ sous forme de somme télescopique, i.e.

$$\ln(n) = \sum_{k=2}^{n} (\ln(k) - \ln(k-1)) = -\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$$

et il vient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right)$$

et on a

$$\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2} \sim \left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right) .$$

Par comparaison la série de terme général $\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right)$ (qui est une série à termes négatifs) converge (et on note sa limite $\gamma - 1$) et son reste est équivalent au reste de la série de terme général $\left(\frac{1}{2k} - \frac{1}{2(k-1)}\right)$, i.e. $-\frac{1}{2n}$. □

Propriété 8 - 7

Comparaison des intégrales de fonctions positives

Soit f et g dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R}_+)$ avec g intégrable sur I. Si $0 \leq f \leq g$, alors f est intégrable sur I et $0 \leq \int_I f \leq \int_I g$.

Démonstration. Pour tout segment J inclus dans I, on a par croissance de l'intégrale $\int_J f \leq \int_J g$ et donc l'intégrabilité de g sur I entraîne celle de f. □

Propriété 8 - 8

Comparaison et intégrabilité locale de fonctions positives

Si $f = \mathrm{O}(g)$ en une borne α de I et si g est intégrable au voisinage de α, alors f l'est aussi. En particulier si $f \sim g$ au voisinage de α, alors f et g sont simultanément intégrables au voisinage de α.

Démonstration. On dispose d'un intervalle J inclus dans I et d'une constante M réelle positive telle que, sur J, $0 \leq f \leq Mg$. L'intégrabilité de g au voisinage de α entraîne celle de Mg et donc aussi celle de f. Le cas particulier résulte du fait que $f \sim g$ entraîne $f = \mathrm{O}(g)$ et $g = \mathrm{O}(f)$. □

Théorème 8 - 9

Soit f dans $C^0_{mcx}([a;b[, \mathbf{R}_+)$ avec $-\infty < a < b \leq +\infty$ et F définie sur $[a;b[$ par $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors f est intégrable sur $[a;b[$ si et seulement si F est bornée sur $[a;b[$ ou encore si et seulement si la limite $\lim_{b^-} F$ existe.

Théorème 8 - 10

Soit f dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R}_+)$ et c dans I. On note F la fonction définie sur I par $F(x) = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Alors f est intégrable sur I si et seulement si F est bornée sur I ou encore si et seulement si F a des limites aux bornes de I.

Démonstration. On utilise la caractérisation séquentielle de la limite ou du caractère borné, ce qui permet de se ramener au cas d'une suite d'intervalles exhaustifs. □

Théorème 8 - 11

Intégration des relations de comparaison de fonctions positives

Soit f et g continues par morceaux I, b une des bornes de I et J un intervalle de longueur non nulle inclus dans I, admettant b comme borne et tel que f et g soient **positives** sur J.

On suppose g intégrable sur J. Si $f \underset{b}{\sim} g$ ou $f = \mathrm{O}_b\left(g\right)$ ou encore $f = \mathrm{o}_b\left(g\right)$, alors f est intégrable sur J. De plus on a les relations entre infiniment petits $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\sim} \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}_b\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ ou $\displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}_b\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$, respectivement.

On suppose maintenant g non intégrable sur J. Si $f \underset{b}{\sim} g$, alors f n'est pas intégrable sur J. De plus on a les relations entre infiniment grands, pour tout a dans I, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \underset{b}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$.

Toujours dans le cas g non intégrable, si $f = \mathrm{O}_b\left(g\right)$ ou $f = \mathrm{o}_b\left(g\right)$, on ne peut rien dire quant à l'intégrabilité de f en général, mais on a, pour tout a dans I, $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}_b\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$ ou $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{o}_b\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$, respectivement.

Démonstration. Le résultat sur l'intégrabilité de f résulte de ce qui précède. On traduit la comparaison entre f et g par l'existence, étant donné ε un réel strictement positif quelconque ou M un réel fixé adapté, d'un intervalle J_1 inclus dans J et admettant b comme borne, où sont vérifiées les inégalités $0 \leq (1-\varepsilon)g \leq f \leq (1+\varepsilon)g$, $0 \leq f \leq Mg$ ou $0 \leq f \leq \varepsilon g$, respectivement. Par croissance de l'intégrale, le résultat est encore vrai pour les intégrales de f et g entre x et y dans J_1. Dans le cas convergent, le résultat en découle en faisant tendre y vers b.

Dans le cas divergent, pour a dans I et y dans J_1 fixés, on dispose de J_2 inclus dans J_1 et admettant b comme borne tel que, pour x dans J_2, on ait

$$\left|\int_a^y f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \varepsilon \left|\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right|,$$

puisque le membre de droite tend vers l'infini. Plus précisément si b est la borne supérieure de I l'intégrale dans le second membre tend vers $+\infty$ et si b est la borne inférieure, elle tend vers $-\infty$. On en déduit, par relation de CHASLES et inégalité triangulaire, pour x dans J_2 : $\displaystyle\int_a^x f$ est compris entre $\displaystyle(1-2\varepsilon)\int_a^x g$ et $\displaystyle(1+2\varepsilon)\int_a^x g$, entre 0 et $\displaystyle(M+\varepsilon)\int_a^x g$ ou entre 0 et $\displaystyle 2\varepsilon\int_a^x g$, respectivement. Le signe des quantités encadrant $\displaystyle\int_a^x f$ étant constant pour x assez proche de b, à savoir positif si $b = \sup I$ et négatif sinon. L'assertion en découle. □

Propriété 8 - 9

Comparaison des variables aléatoires positives

Si $0 \leq Y \leq X$, avec X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé et X admettant une espérance, alors Y en admet une aussi et on a $0 \leq \mathbf{E}\left(Y\right) \leq \mathbf{E}\left(X\right)$.

Démonstration. Pour x et y réels, on a $\mathbf{P}\left(X = x, Y = y\right) \neq 0 \implies y \leq x$ et le théorème de TONELLI montre que $\mathbf{E}\left(X\right)$ et $\mathbf{E}\left(Y\right)$ sont respectivement les sommes dans

$\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ des familles $(x\mathbf{P}(X=x,Y=y))$ et $y\mathbf{P}(X=x,Y=y)$ (avec l'argument déjà utilisé pour la propriété 8 - 5). L'assertion en résulte par comparaison. $\square$

Proposition 8 - 8

Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire positive et si t est un réel strictement positif, alors

$$\mathbf{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{t}.$$

Andreï Markov, 1856–1922, était un élève de Pafnouti Tchebychev.

Démonstration. Soit $Y = t\mathbb{1}_{(X\geq t)}$ i.e. $Y(\omega)=t$ si $X(\omega)\geq t$ et $Y(\omega)=0$ sinon. Alors Y est une variable aléatoire car X l'est et on a $0\leq Y\leq X$ par construction. D'où $\mathbf{E}(Y) = t\mathbf{E}\left(\mathbb{1}_{(X\geq t)}\right) = t\mathbf{P}(X\geq t) \leq \mathbf{E}(X)$. $\square$

6 Critères de convergence

Par comparaison à une série géométrique, on a le critère suivant :

Proposition 8 - 9

Règle de d'Alembert

Soit $\sum a_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite (a_{n+1}/a_n) soit convergente.

1. Si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.
3. Si $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, alors on ne peut conclure.

Démonstration. Notons $\ell = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$. Si $\ell < 1$, alors à partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{1+\ell}{2}$ et donc $a_{n_0+n} \leq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n a_{n_0}$. Par comparaison avec une série géométrique de raison strictement inférieure à 1, $\sum a_n$ est convergente.

Si au contraire $\ell > 1$, à partir d'un certain rang n_0, on a $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > \dfrac{1+\ell}{2}$ et donc $a_{n_0+n} \geq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n a_{n_0}$. Par comparaison avec une série géométrique de raison strictement supérieure à 1, $\sum a_n$ est divergente.

Les séries de Riemann vérifient toutes $\ell = 1$ et ceci montre qu'en général, si $\ell = 1$, on ne peut conclure. $\square$

Danger

Ce critère n'est pas très fin, d'une part, et source de nombreuses erreurs, d'autre part. En effet il faut bien se garder de croire qu'il énonce une équivalence. En général quand une série converge on ne peut rien dire sur le comportement de la suite (a_{n+1}/a_n). Aussi peu de chose que sur la monotonie d'une suite convergente, par exemple !

Bien que non explicitement au programme, les critères suivants résultent directement des théorèmes de comparaison aux séries de RIEMANN ou aux séries géométriques.

Proposition 8 - 10

(♠) – Règle de RIEMANN

Soit $\sum a_n$ une série à termes réels positifs et α un réel. Si la suite $(n^\alpha a_n)$ admet une limite ℓ, éventuellement infinie, on a :

1. Si $\ell \in \mathbf{R}_+^*$, on a $a_n \sim \dfrac{\ell}{n^\alpha}$ et donc $\sum a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. Si $\ell = 0$, on a $a_n = \mathrm{o}\left(n^{-\alpha}\right)$ et donc, si $\alpha > 1$, alors $\sum a_n$ converge.
3. Si $\ell = +\infty$, on a $n^{-\alpha} = \mathrm{o}\left(a_n\right)$ et donc, si $\alpha \leq 1$, alors $\sum a_n$ diverge.

Proposition 8 - 11

(♠) – Règle de CAUCHY

Soit $\sum a_n$ une série à termes réels strictement positifs telle que la suite $(a_n^{1/n})$ soit convergente.

1. Si $\lim a_n^{1/n} < 1$, alors $\sum a_n$ converge.
2. Si $\lim a_n^{1/n} > 1$, alors $\sum a_n$ diverge.
3. Si $\lim a_n^{1/n} = 1$, alors on ne peut conclure.

Démonstration. On a directement la comparaison à la série géométrique. Notons $\ell = \lim a_n^{1/n}$. Si $\ell < 1$, alors à partir d'un certain rang n_0, on a $a_{n_0+n} \leq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n a_{n_0}$. Si au contraire $\ell > 1$, à partir d'un certain rang n_0, on a $a_{n_0+n} \geq \left(\dfrac{1+\ell}{2}\right)^n a_{n_0}$. On conclut comme pour la règle de D'ALEMBERT.

Les séries de RIEMANN vérifient toutes $\ell = 1$ et ceci montre qu'en général, si $\ell = 1$, on ne peut conclure. □

Pour aller plus loin

La règle de CAUCHY est en fait plus fine. Elle met en jeu les notions de limites supérieure et inférieure d'une suite et est donnée en exercice.

Proposition 8 - 12

(♠) – Règle de DUHAMEL

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ deux séries à termes réels strictement positifs telles qu'à partir d'un certain rang on ait $0 < \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$. Alors, si $\sum b_n$ converge, il en est de même de $\sum a_n$.

Démonstration. À partir d'un certain rang, on a $a_{n_0+n} \leq \dfrac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_{n_0+n}$ et donc $a_n = \mathrm{O}\left(b_n\right)$. L'assertion s'en suit. □

Pour l'intégrabilité locale, le critère le plus utile en pratique est celui de RIEMANN.

Théorème 8 - 12

Critère de Riemann

1. Si $\lim_{+\infty} x^\alpha f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, avec $\alpha > 1$, alors f est intégrable en $+\infty$.
2. Si $\lim_{+\infty} xf(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$, alors f n'est pas intégrable en $+\infty$.
3. Si $\lim_{a^+} (x-a)^\alpha f(x) = \ell \in \mathbf{R}$, avec $\alpha < 1$, alors f est intégrable en a (à droite).
4. Si $\lim_{a^+} (x-a) f(x) = \ell \in \overline{\mathbf{R}} \setminus \{0\}$, alors f n'est pas intégrable en a (à droite).

Démonstration. C'est une conséquence des critères de comparaison pour les suites à termes positifs, puisque l'intégrabilité se ramène à l'étude de suites via les intervalles exhaustifs. □

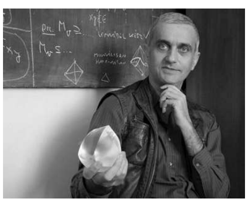
Programme

Comme souligné, la règle de Riemann pour les séries **n'est pas** au programme, tandis que son alter ego (et conséquence) pour les intégrales l'est !

Danger

Les règles et critères de ce paragraphe ne sont utilisables que pour les séries, familles et fonctions à valeurs positives !

7 Fonctions convexes



Gabor Domokos

Vladimir Igorevich Arnold a posé aux alentours de 1995 la question suivante : Existe-t-il un corps convexe homogène avec seulement deux positions d'équilibre, l'une stable, l'autre instable ?

Nous avons d'abord prouvé son existence mathématiquement, puis nous avons pu en faire réaliser deux exemplaires. C'est une forme très difficile à réaliser puisque, pour une forme d'une vingtaine de centimètres, une erreur d'un millimètre fausserait l'expérience.

À la suite de cette expérience, j'en ai déduit une classification des formes ...

Nous avons réuni avec ma femme de nombreux galets et nous avons fait des statistiques qui nous ont conduit à cette classification qui débute avec la Gömböc. En modifiant légèrement chacune des formes classées vous pouvez aboutir à la forme suivante mais vous ne pouvez pas revenir à la forme originelle. En d'autres mots, en partant de cette forme, vous pouvez prouver que d'autres formes existent, mais en partant des autres formes vous ne pouvez pas prouver que la première existe.

– Gabor Domokos (2007)

Une partie convexe, comme un disque du plan, fait partie des objets que l'on peut dessiner facilement (en tout cas plus facilement qu'un ensemble de Cantor par exemple !) en partie parce que, conformément à notre intuition sa frontière est le graphe d'une fonction, ou la juxtaposition de plusieurs tels graphes. Par exemple ceux des fonctions $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ et $x \mapsto -\sqrt{1-x^2}$. Quitte à opérer des découpages (par des demi-plans), on en vient à étudier les parties qui se trouvent au-dessus (ou au-dessous) du graphe d'une fonction. D'où la définition suivante.

Définition 8 - 7

Soit f une fonction à valeurs réelles et définie sur une partie I convexe de E (c'est-à-dire que I est un intervalle lorsque $E = \mathbf{R}$). On appelle **épigraphe** de f l'ensemble $A(f)$ des points de $E \times \mathbf{R}$ situés au-dessus du graphe de f, i.e.

$$A(f) = \{(x, y) \in I \times \mathbf{R} \mid y \geq f(x)\} .$$

Proposition 8 - 13

L'épigraphe $A(f)$ est convexe si et seulement si, pour tous x et y de I et tout z dans le segment $[x; y]_E$, le point du graphe de f correspondant à z est au-dessous du segment joignant les points du graphe de f correspondant à x et y.

Démonstration. Pour x dans I, note M_x le point du graphe de f correspondant à x, i.e. $M_x = (x; f(x))$. Supposons $A(f)$ convexe, alors pour x et y distincts dans I et z dans le segment $[x; y]_E$, on dispose de t dans $[0; 1]$ tel que $z = (1-t)x + ty$. Par conséquent $(1-t)M_x + tM_y$ appartient à $A(f)$ si et seulement s'il est « au-dessus » de M_z, i.e. M_z est au-dessous du point d'abscisse z de la corde du graphe de f joignant les points correspondant à x et y.

Réciproquement si cette propriété est satisfaite, soit A et B des points de $A(f)$ avec $A = (x, a)$ et $B = (y, b)$. Par conséquent A est au-dessus de M_x et B de M_y, i.e. $a \geq f(x)$ et $b \geq f(y)$. Soit C un point du segment $[A; B]$ et t dans $[0; 1]$ avec $C = (z, c) = (1-t)A + tB$. Alors C est au-dessus de $(1-t)M_x + tM_y$ puisque $(1-t)a + tb \geq (1-t)f(x) + tf(y)$ de par la positivité de t et $(1-t)$. Comme ce dernier est au-dessus de M_z, il en résulte que C appartient à $A(f)$, par définition de celui-ci. $\square$

Remarque 8 - 5

La propriété sur les points du graphe est équivalente à :

$$\forall (x, y) \in I^2, \quad \forall t \in [0; 1], \quad f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y) .$$

En effet, avec les notations précédentes, les ordonnées respectives de M_z et de $(1-t)M_x + tM_y$ sont respectivement données par $f(z) = f((1-t)x + ty)$ et $(1-t)f(x) + tf(y)$ et donc M_z est au-dessous de $(1-t)M_x + tM_y$ si et seulement si $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$.

D'où la définition suivante :

Définition 8 - 8

Soit I un convexe de $\mathbf{R}$, i.e. un intervalle, une fonction de I dans $\mathbf{R}$ est dite **convexe** si son graphe est sous ses cordes, i.e.

$$\forall \lambda \in [0; 1], \ \forall (x, y) \in I^2, \ f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) .$$

Autrement dit f est convexe si son épigraphe l'est.

On appelle **concave** une fonction dont l'opposée est convexe. Autrement dit si

$$\forall \lambda \in [0; 1], \ \forall (x, y) \in I^2, \ (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y) \leq f((1-\lambda)x + \lambda y) .$$

Danger

Une fonction peut tout à fait n'être ni convexe, ni concave.

Exemple 8 - 12

Toute fonction affine sur un intervalle est convexe. Elle y est aussi concave et les fonctions affines sont les seules à être à la fois convexe et concave.

En effet dans ce cas il y a égalité dans l'inégalité de définition, i.e. $f((1-\lambda)x+\lambda y)=(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$ et ceci impose que f est affine sur tout segment inclus dans I, donc sur I car deux fonctions affines qui coïncident en plus de deux points sont associées au même polynôme du premier degré.

Remarque 8 - 6

Soit f une fonction sur I et

$$C(f)=((1-t)f(x)+tf(y)-f((1-t)x+ty))_{(x,y,t)\in I\times I\times[\,0;1\,]}\,.$$

Alors f est convexe (resp. concave) si et seulement si $C(f)$ est une famille de réels positifs (resp. négatifs).

De plus l'application $f\mapsto C(f)$, définie sur $\mathbf{R}^I$ est linéaire. En particulier elle préserve les sommes, les multiples positifs et les combinaisons convexes.

Les fonctions convexes sont les fonctions les plus naturelles après les fonctions affines. Elles interviennent dans de nombreux problèmes, notamment via les exponentielles et les logarithmes. Il y a deux façons de penser que les fonctions convexes viennent « juste après » les fonctions affines : une fonction convexe s'obtient comme supremum de fonctions affines, i.e. en plaçant son graphe au-dessus des tangentes, ou en passant de $f''=0$ à $f''\geq 0$. Les deux points de vue sont essentiellement équivalents.

Dans la suite f est une fonction convexe définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$.

Proposition 8 - 14

Inégalité de Jensen discrète

Pour tous $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ dans I et tous $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ réels strictement positifs de somme 1, on a

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(x_i)\,.$$

Johan Jensen, 1859-1925.

Démonstration. Si f est convexe, son épigraphe est convexe donc stable par combinaison convexe. L'inégalité de Jensen en est la traduction en terme d'ordonnées. □

Les fonctions convexes ont de nombreuses propriétés de stabilité. Les fonctions affines sont stables par opérations algébriques, car elles sont algébriques, mais les fonctions convexes ont également des propriétés de stabilité liées à l'ordre.

Proposition 8 - 15

L'ensemble des fonctions convexes sur I est un cône convexe. En particulier toute combinaison convexe de fonctions convexes sur I est une fonction convexe sur I.

Toute limite (simple) de fonctions convexes sur I est une fonction convexe sur I. Autrement dit si f est définie par $f(x)=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$ et si les fonctions f_n sont convexes sur I, alors f l'est aussi.

Toute limite (simple) de fonctions concaves sur I est une fonction concave sur I.

Démonstration. L'application $f\mapsto C(f)$ étant linéaire, les propriétés résultent de celles de $\mathbf{R}_+$. La première assertion résulte du fait que $\mathbf{R}_+$ est un cône convexe, i.e.

stable par addition et multiplication par un scalaire positifs. La seconde résulte du fait que $\mathbf{R}_+$ est stable par passage à la limite.

L'assertion sur la concavité s'obtient en considérant $-f$. □

Exercice

Écrire des démonstrations directes, en partant des inégalités $f_i((1-\lambda)x+\lambda y) \leq (1-\lambda)f_i(x)+\lambda f_i(y)$ pour x, y dans I, λ dans $[0;1]$ et (f_i) des fonctions convexes dont on fera la somme, la multiplication ou dont on prendra la limite.

Proposition 8 - 16

Toute enveloppe supérieure de fonctions convexes sur I est une fonction convexe sur I. Autrement dit si f est définie par $f(x) = \sup\{f_a(x) \,|\, a \in A\}$ et si les fonctions $(f_a)_{a\in A}$ sont convexes sur I, alors f l'est aussi.

Toute enveloppe inférieure de fonctions concaves sur I est une fonction concave sur I.

Démonstration. On a $\forall a \in A$, $f_a((1-t)x+ty) \leq (1-t)f_a(x)+tf_a(y)$. Or, par définition de f et positivité de t et $(1-t)$, un majorant du terme de droite est $(1-t)f(x)+tf(y)$ et donc

$$\forall a \in A \quad f_a((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)\ .$$

Par passage à la borne supérieure, il en résulte $f((1-t)x+ty) \leq (1-t)f(x)+tf(y)$ et donc f est convexe sur I.

La seconde assertion s'obtient en considérant $-f$. □

Exemple 8 - 13

Toute fonction qui est enveloppe supérieure de fonctions affines est convexe.

Proposition 8 - 17

Pour r réel, on définit la fonction puissance $\varphi_r : x \mapsto x^r$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
Elle est convexe si $r \geq 1$ ou $r \leq 0$, et concave si $0 \leq r \leq 1$.
La fonction logarithme est concave sur $\mathbf{R}_+^*$.

Remarque 8 - 7

Le logarithme correspond au cas limite où $r = 0$.

Les démonstrations directes sont données en exercice, voir 8 - 34. Toutefois cette proposition résulte également de la caractérisation par les dérivées secondes qui sera vue un peu plus loin.

Corollaire 8 - 3

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbf{R}$.

Démonstration. Soit x et y dans $\mathbf{R}$ et t dans $[0;1]$. On pose $a = \exp(x)$ et $b = \exp(y)$. Par concavité du logarithme, il vient $(1-t)\ln(a)+t\ln(b) \leq \ln((1-t)a+tb)$ et donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\exp((1-t)x+ty) \leq (1-t)\exp(x)+t\exp(y)\,,$$

ce qui est l'inégalité recherchée. □

Théorème 8 - 13

Caractérisation par la fonction pente

Soit f de I dans $\mathbf{R}$. On définit, pour $x \neq y$ dans I, la fonction pente par $p(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

Alors f est convexe sur I si et seulement si la fonction pente est une fonction croissante de la variable x (à y fixé) ou de la variable y (à x fixé).

Dans ce cas on a, pour x, y et z dans I :

$$x<y<z \Longrightarrow \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}\ .$$

(Inégalité des trois pentes)

Démonstration. Soit x et z dans I tels que $x<z$. Alors $y \mapsto \dfrac{y-x}{z-x}$ est une bijection de $]x;z[$ sur $]0;1[$. En posant $t = \dfrac{y-x}{z-x}$, on a $y=(1-t)x+tz$ et

$$f(y) \leq (1-t)f(x)+tf(z) \Longleftrightarrow (z-x)f(y) \leq (z-y)f(x)+(y-x)f(z)$$

Or, puisque $z-y = z-x-(y-x)$, cette dernière expression est équivalente à

$$p(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = p(x,z)$$

ou encore, en utilisant $z-x = z-y+y-x$ et $y-x = z-x-(z-y)$, à

$$0 \leq -p(x,y)+p(z,y) \quad \text{et} \quad -p(z,y) \leq -p(x,z)$$

de sorte que f est convexe sur I si et seulement si,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq \frac{f(x)-f(z)}{x-z} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

pour tout x, y et z dans I vérifiant $x<y<z$, ou encore si et seulement si l'une des trois inégalités est vérifiée (sous les mêmes conditions).

L'inégalité entre les deux premiers termes exprime que $y \mapsto p(x,y)$ est croissante sur $I \cap]x,+\infty[$. Celle entre les deux derniers que cette fonction est croissante sur $I \cap]-\infty, x[$ (en échangeant les rôles de x et z). Et celle entre les termes extrêmes que cette fonction prend des valeurs à gauche de x qui sont inférieures à celles qu'elle prend à droite de x (en échangeant les rôles de x et y).

D'où la croissance de $y \mapsto \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ sur $I \setminus \{x\}$.

Le reste de l'assertion en découle par symétrie. □

Théorème 8 - 14

Caractérisation par un déterminant (♠)

Soit f de I dans $\mathbf{R}$. Alors f est convexe sur I si et seulement si, pour u, v et w dans I et distincts deux à deux :

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ f(u) & f(v) & f(w) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & v & w \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix}} \geq 0\ .$$

Démonstration. La formule étant invariante par permutation de u, v et w, on peut supposer $u < v < w$. En développant par rapport à la dernière ligne le numérateur et en reconnaissant un déterminant de VANDERMONDE au dénominateur, l'inéquation équivaut à

$$\frac{1}{(v-u)(w-u)}f(u) + \frac{1}{(w-u)(w-v)}f(w) \geq \frac{1}{(v-u)(w-v)}f(v)$$

i.e., par positivité des facteurs,

$$\frac{w-v}{w-u}f(u) + \frac{v-u}{w-u}f(w) \geq f(v)\,,$$

ce qui est l'inégalité de définition de la convexité car $v = \dfrac{w-v}{w-u}u + \dfrac{v-u}{w-u}w$ avec $\dfrac{w-v}{w-u} + \dfrac{v-u}{w-u} = 1$. □

♠

Le théorème de la limite monotone donne alors l'existence (dans $\overline{\mathbf{R}}$) des limites

$$\lim_{y^-} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \quad \text{et} \quad \lim_{y^+} \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

pour y dans I. De plus ces limites sont finies si $y \in \mathring{I}$ puisque les quantités étudiées sont alors respectivement majorée et minorée.

En particulier f est dérivable à gauche et à droite sauf peut-être en $\inf(I)$ et $\sup(I)$ et, pour $a < b$, on a

$$f'_g(a) \leq f'_d(a) \leq p(a,b) \leq f'_g(b) \leq f'_d(b)\ .$$

Aparté

La dérivabilité à gauche (droite) entraînant la continuité à gauche (droite), et la continuité à gauche et à droite entraînant la continuité, on en déduit que f est continue sur $\mathring{I}$.

Le graphe de f est au-dessus de toute droite passant par $(a, f(a))$ et de pente p comprise entre $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$.

En particulier f est enveloppe supérieure de fonctions affines.

Théorème 8 - 15

Caractérisation par les dérivées

Soit f dérivable sur I. Alors elle y est convexe si et seulement si f' est croissante. Et dans ce cas f est au-dessus de ses tangentes.

Si f est deux fois dérivable sur I, elle y est convexe si et seulement si f'' est positive.

Démonstration. Si f est dérivable et convexe, alors par croissance de la fonction pente, pour x et y dans I vérifiant $x < y$, on a, par monotonie de la pente,

$$f'(x) = \lim_{z\to x^+} p(x,z) \leq p(x,y) \leq \lim_{z\to y^-} p(z,y) = f'(y)$$

et donc f' est croissante. De plus $(y-x)$ et $p(x,y) - f'(x)$ sont de même signe, donc $0 \leq (y-x)(p(x,y) - f'(x)) = f(y) - (f(x) + (y-x)f'(x))$, i.e. f est au-dessus de ses tangentes.

Réciproquement soit f telle que f' soit croissante. Pour x, y et z dans I tels que $x < y < z$, on dispose, grâce au théorème de LAGRANGE, de c et d tels que $x < c < y < d < z$ et

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = p(y,x) = f'(c) \leq f'(d) = p(z,y) = \frac{f(z)-f(y)}{z-y} .$$

On a déjà vu que cela suffisait à assurer la convexité.

La dernière assertion résulte de la caractérisation des fonctions croissantes. $\square$

Exemples 8 - 14

Inégalités de convexité

1. Par concavité du logarithme et placement par rapport à la tangente en 1, $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x-1$. Cette inégalité appliquée à $1/x$ donne

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^* \qquad \frac{x-1}{x} \leq \ln(x) \leq x-1$$

ou encore

$$\forall h > -1 \qquad \frac{h}{1+h} \leq \ln(1+h) \leq h .$$

2. Par convexité de l'exponentielle et placement par rapport à la tangente en 0, pour x et $-x$, on a

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad 1+x \leq \exp(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x < 1 \quad \exp(x) \leq \frac{1}{1-x} .$$

3. Par concavité du sinus sur $[0; \pi/2]$,

$$\forall x \in [0; \pi/2], \quad \frac{2x}{\pi} \leq \sin(x) \leq x .$$

Remarques 8 - 8

La composition des fonctions ne se comporte bien avec les inégalités qu'avec des hypothèses de monotonie. On peut néanmoins remarquer les propriétés suivantes concernant $f \circ g$:

1. Si f et g sont de même concavité et f est croissante, alors $f \circ g$ a la même concavité que f et g.
2. Si f et g sont de concavités contraires et f est décroissante, alors $f \circ g$ a la même concavité que f.

Pour aller plus loin

Une notion encore plus forte est la log-convexité : f est log-convexe si elle est strictement positive et si $\ln(f)$ est convexe. Par croissance et convexité de l'exponentielle, f est alors également convexe. De plus le produit de deux fonctions log-convexes l'est aussi.

Ce qui est plus étonnant, c'est que la somme de telles fonctions l'est aussi, voire une somme infinie comme une intégrale à paramètres. Par exemple la fonction Γ est log-convexe.

8 Inégalités de convexité

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire (ou de façon moins exigente, d'une forme bilinéaire symétrique positive) permet d'utiliser une des inégalités les plus puissantes en mathématiques, à savoir l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ (Augustin-Louis CAUCHY, 1789–1857, et Hermann Amandus SCHWARZ, 1843–1921). Elle sert aussi ailleurs : elle fournit par exemple le célèbre principe d'indétermination d'HEISENBERG (Werner HEISENBERG, 1901–1976) :

Théorème 8 - 16

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels. Alors on a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ .$$

Démonstration. Il existe en fait de nombreuses façons de démontrer l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. On peut par exemple tout à fait la démontrer par récurrence sur l'entier n. Les deux premières inégalités sont évidentes et permettent de se ramener au cas positif.

On peut partir de l'inégalité de MINKOWSKI (Hermann MINKOWSKI, 1864–1909) dans le cas le plus élémentaire :

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2)\ .$$

On peut obtenir cette inégalité soit en l'interprétant comme $0 \leq (x-y)^2$, soit en partant de l'égalité de BERNOULLI $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$ et en posant $x = a-b$ et $y = a+b$. Autrement dit $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \frac{x-y}{2}$. Comme $a^2-b^2 \leq a^2+b^2$ et $a^2+b^2 = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, on retrouve bien l'inégalité de MINKOWSKI.

En la sommant, il vient

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2\ .$$

Si on suppose $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = 1$, on en déduit l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ dans ce cas particulier.

Par homogénéité c'est encore vrai pour tout couple de vecteurs de l'espace euclidien $\mathbf{R}^n$. On écrit en effet $x = \|x\|\,u$ et $y = \|y\|\,v$, avec u et v des vecteurs de norme 1. Le cas particulier précédent s'écrit $\langle u\,|\,v\rangle \leq 1$ et il vient

$$\langle x\,|\,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|\,\langle u\,|\,v\rangle \leq \|x\|\cdot\|y\|\ .$$

□

Aparté

► Dans le cas général d'un espace E préhilbertien, le même argument, en partant de $\langle x-y\,|\,x-y\rangle \geq 0$ permet d'obtenir $\langle x\,|\,y\rangle \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2$ et de conclure, comme précédemment, à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

Remarque 8 - 9

Le produit scalaire avec le vecteur de coordonnées toutes égales à 1 donne l'inégalité entre moyennes arithmétique et quadratique

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}}\ .$$

Corollaire 8 - 4

Inégalité de Minkowski

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels. Alors on a

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}\ .$$

Démonstration. Avec des notations euclidiennes, cette inégalité s'écrit $\|x+y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$ et résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz puisqu'en élévant au carré (ce qui est licite par positivité des deux membres), elle s'écrit $\|x\|_2^2 + 2\langle x \mid y\rangle + \|y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2$. □

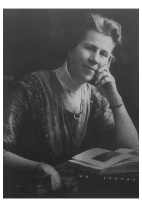
Remarque 8 - 10

► L'argument est général et est valide dans tout espace préhilbertien.

Néanmoins il existe d'autres normes, non liées à un produit scalaire. Dans ce cas l'inégalité de Minkowski exprime l'inégalité triangulaire, mais est nettement moins élémentaire à démontrer. Dans la suite (p, q) désigne un couple de réels positifs tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a donc $p > 1$ et $q = \frac{p}{p-1}$. Pour x dans $\mathbf{R}^n$ avec $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, I un segment, $I = [a; b]$, et f une fonction continue sur I à valeurs réelles, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{b-a}\int_I |f|^p\right)^{1/p}\ .$$



Grace Chisholm

On commence par un résultat préliminaire dégagé par W. Young et G. Chisolm-Young et qui n'est autre que la convexité de l'exponentielle.

Proposition 8 - 18

Inégalité de Young

Pour a et b des réels positifs, $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

William Henry Young, 1863–1942, et Grace Chisholm-Young, 1868–1944.

Démonstration. Si a ou b est nul, l'inégalité est vraie par positivité du membre de droite. On suppose donc $ab \neq 0$. On applique alors l'inégalité de convexité de l'exponentielle à $x = \ln(a^p)$ et $y = \ln(b^q)$. Il vient, puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$ab = \exp(\ln(a) + \ln(b)) = \exp\left(\frac{1}{p}x + \frac{1}{q}y\right) \leq \frac{1}{p}\exp(x) + \frac{1}{q}\exp(y) \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\ .$$

□

On en déduit l'inégalité de HÖLDER (Otto HÖLDER, 1859–1937) :

Proposition 8 - 19

Inégalité de HÖLDER

Soit I un intervalle quelconque dans $\mathbf{R}$ et f et g des fonctions dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R})$. On a $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$, i.e.

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} \left(\int_I |g|^q\right)^{1/q} .$$

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels. On a

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q .$$

Démonstration. Si $|f|^p$ ou $|g|^q$ n'est pas intégrable, le membre de droite est infini et il n'y a rien démontrer. Sinon on commence par supposer $\|f\|_p = \|q\|_q = 1$. Alors $|fg|$ est dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R}_+)$ et l'inégalité de YOUNG donne $|fg| \leq \dfrac{1}{p}|f|^p + \dfrac{1}{q}|g|^q$ sur I. Comme le membre de droite est intégrable, par comparaison $|fg|$ aussi et, par intégration, il vient

$$\int_I |fg| \leq \frac{1}{p}\|f\|_p + \frac{1}{q}\|g\|_q = 1 .$$

Le cas général s'en déduit par homogénéité en écrivant $f = \|f\|_p u$ et $g = \|g\|_q v$, et donc

$$\int_I |fg| = \|f\|_p \|g\|_q \int_I |uv| \leq \|f\|_p \|g\|_q .$$

En prenant $I = [0; n]$, $f = \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i \mathbb{1}_{]i-1;i[}$ et $g = \displaystyle\sum_{i=1}^n y_i \mathbb{1}_{]i-1;i[}$, le résultat sur les réels en découle. □

Remarques 8 - 11

On peut étendre le résultat aux fonctions à valeurs complexes.

Par ailleurs on peut démontrer le résultat sur les sommes finies directement en sommant les inégalités de YOUNG comme lors de la démonstration de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.

On en déduit l'inégalité de MINKOWSKI.

Théorème 8 - 17

Inégalité de MINKOWSKI

Soit I un intervalle quelconque dans $\mathbf{R}$ et f et g des fonctions dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R})$.

$$\left(\int_I |f+g|^p\right)^{1/p} \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int_I |g)|^p\right)^{1/p} .$$

Soit $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels. On a $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Démonstration. Frigyes RIESZ (1880–1956) a donné une démonstration de cette inégalité en utilisant l'inégalité de HÖLDER. Une démonstration directe sera vue en exercice, voir 8 - 40. Par inégalité triangulaire, il vient $|f+g|^p \leq |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$ et donc, par intégration et inégalité de HÖLDER :

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$$

$(p-1)q = p$ et $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}(p-1)$. Le cas des réels s'en déduit comme précédemment. $\square$

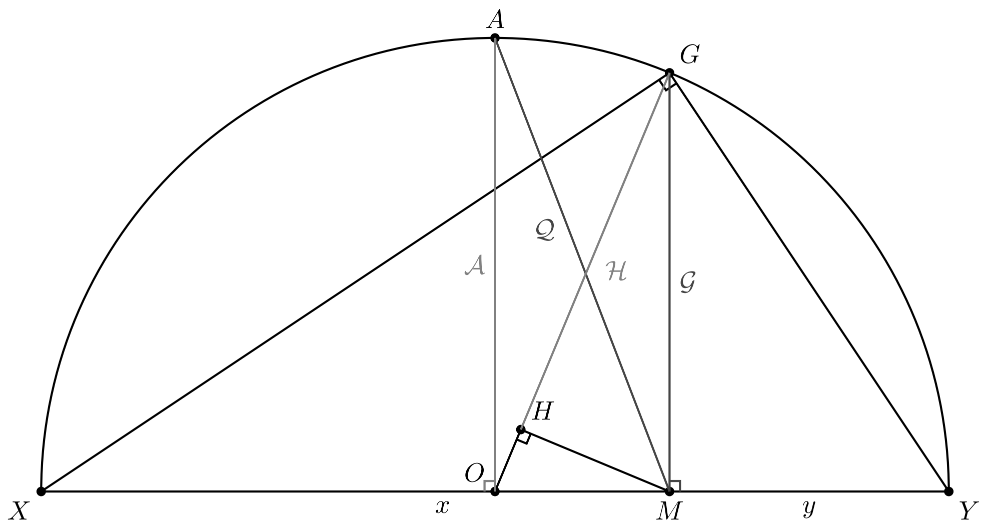
Les normes sont des cas particuliers de moyennes. On définit la moyenne d'ordre r de nombres réels positifs $(x_1, \cdots, x_n)$ par $M_r(x_1, \cdots, x_n)^r = \dfrac{x_1^r + \cdots + x_n^r}{n}$ avec la convention que pour $r = 0$, on pose $x^0 = \ln(x)$. Par convexité des fonctions puissances, M_r est une fonction croissante et convexe de r. Il n'y a égalité entre moyennes que si tous les x_i sont égaux. Voir exercice 8 - 49.

Ainsi, en particulier, pour x et y strictement positifs,

$$\frac{2xy}{x+y} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

avec égalité si et seulement si $x = y$. Autrement dit un rectangle de périmètre fixé est d'aire maximale quand c'est un carré. Si son aire est fixée, son périmètre est minimal si c'est un carré.

Voici l'interprétation géométrique de ces inégalités : sur un segment, on place les longueurs x et y, en alignant dans cet ordre X, M et Y de sorte qu'on ait $MX = x$ et $MY = y$. On place alors le milieu O du segment $[XY]$ et on trace le demi-cercle (XAY) où A est le sommet du cercle, i.e. l'intersection de la perpendiculaire à (XY) passant par O avec le demi-cercle. On trace ensuite la perpendiculaire à (XY) passant par M et on note G son point d'intersection avec le demi-cercle. Enfin H est le projeté orthogonal de M sur la droite (OG).



Puisque $x + y$ est le diamètre du cercle, son rayon est la moyenne arithmétique de x et y, et donc $OA = \mathcal{A} = \dfrac{x+y}{2}$.

Les triangles rectangles (GMX) et (YMG) sont semblables et donc

$$\frac{x}{MG} = \frac{MG}{y} .$$

Autrement dit MG est la moyenne géométrique de x et y : $MG = \mathcal{G} = \sqrt{xy}$.

Les triangles rectangles (GHM) et (GMO) sont semblables et donc on a $\dfrac{GM}{GH} =$

$\dfrac{GO}{GM}$. Or GO est un rayon, i.e. $GO = \mathcal{A}$ et il vient

$$\frac{1}{GH} = \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\mathcal{G}^2} + \frac{y}{\mathcal{G}^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{x}\right),$$

donc $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{G}^2}$ est la moyenne arithmétique des inverses de x et y. Il en résulte que GH est la moyenne harmonique de x et y : $GH = \mathcal{H} = \dfrac{2xy}{x+y}$.

Enfin le théorème de PYTHAGORE donne $AM^2 = \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{x-y}{2}\right)^2$, i.e. AM^2 est la moyenne arithmétique de x^2 et y^2, i.e. la moyenne quadratique de x et y : $AQ = \mathcal{Q} = \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{2}}$.

Comme GH est un côté d'un triangle rectangle dont GM est l'hypothénuse, $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}$. Comme GM est une hauteur du demi-cercle, il est inférieur au rayon : $\mathcal{G} \leq \mathcal{A}$. Enfin OA est un côté d'un triangle rectangle dont AM est l'hypothénuse et donc $\mathcal{A} \leq \mathcal{Q}$. Soit

$$\mathcal{H} = \frac{2xy}{x+y} \leq \mathcal{G} = \sqrt{xy} \leq \mathcal{A} = \frac{x+y}{2} \leq \mathcal{Q} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\ .$$

Géométriquement il y a égalité dans l'une de ces inégalités si et seulement il y a égalité partout et si $M = O$, ou encore $x = y$.

Exercices

Séries

8 - 1 Ⓢ ★ Comparaison des critères

Soit (a_n) une suite à valeurs strictement positives. Montrer que, si a_{n+1}/a_n converge vers ℓ, avec ℓ dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, il en est de même pour $\sqrt[n]{a_n}$.

Que penser de la réciproque ?

8 - 2 Ⓢ ★ Extraction de racine cubique

a. Montrer $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2^2}\left(1+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^8}\right)\cdots$.

b. En déduire une méthode pour calculer une approximation de la racine cubique d'un nombre en n'utilisant que des multiplications et la racine carrée, sans mémoire.

8 - 3 Ⓢ U 2018 ★ Nicole Oresme

Soit $\sum a_n$ une série telle que $\forall n \in \mathbf{N}\ 0 \leq a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$. Montrer qu'elle diverge.

8 - 4 Ⓢ ★ Somme télescopique

Soit q un entier naturel non nul. En utilisant des sommes télescopiques, montrer que $\sum \dfrac{1}{n(n+1)\cdots(n+q)}$ converge et calculer sa somme.

8 - 5 Ⓢ ★ Convergence de séries

Nature de $\sum \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n}$ et de $\sum (\ln n)^{-\ln n}$.

8 - 6 Ⓢ C 2019 ★★ Développement implicite

Soit, pour $n \geq 3$, F_n le polynôme $X^n - nX + 1$.

a. Montrer que F_n admet exactement deux racines dans $\mathbf{R}_+^*$. On les note x_n et y_n avec $x_n < y_n$.

b. Montrer que (x_n) est décroissante et $x_n \sim \dfrac{1}{n}$, puis déterminer un équivalent de $x_n - \dfrac{1}{n}$.

c. Montrer que (y_n) converge vers une limite ℓ à déterminer, puis déterminer un équivalent de $y_n - \ell$.

8 - 7 Ⓢ ★★ Méthode de Héron/Newton ♥

Soit α dans $]1;+\infty[$. On considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ récurrente, associée à la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{\alpha}{x}\right)$, avec $x_1 > \sqrt{\alpha}$.

a. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en décroissant vers $\sqrt{\alpha}$.

b. On pose, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $\varepsilon_n = x_n - \sqrt{\alpha}$. Démontrer $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{\varepsilon_n^2}{2x_n}$ et en déduire $\varepsilon_n \leq 2\sqrt{\alpha}\left(\dfrac{\varepsilon_1}{2\sqrt{\alpha}}\right)^{2^{n-1}}$.

c. Pour $\alpha = 3$ et $x_1 = 2$, montrer $\varepsilon_1/2\sqrt{\alpha} < 0,1$ et en déduire $\varepsilon_6 < 4.10^{-32}$.

d. Pour la même valeur initiale x_1, on considère la suite récurrente associée à la fonction donnée par $g(x) = \dfrac{\alpha+x}{1+x} = x + \dfrac{\alpha - x^2}{1+x}$. Montrer qu'elle converge également vers $\sqrt{\alpha}$ et comparer sa vitesse de convergence à la suite précédente.

<u>Indication</u> : *on pourra montrer que les suites des termes pairs et impairs forment deux suites adjacentes.*

e. Que dire de la suite associée à la fonction donnée par $f_p(x) = \dfrac{p-1}{p}x + \dfrac{\alpha}{p}x^{1-p}$, où p est dans $\mathbf{N}^*$?

8 - 8 Ⓢ ★★ Calcul d'une somme

Convergence et somme de $\sum \dfrac{\left[\sqrt{n+1}\right] - \left[\sqrt{n}\right]}{n}$.

8 - 9 Ⓢ ★★ Somme télescopique †

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs positives. On pose, pour n entier, $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$.

Montrer que $\sum \dfrac{u_n}{p_n}$ est convergente.

8 - 10 Ⓢ ★★ Série trigonométrique

Convergence et somme de $\sum \arctan\left(\dfrac{1}{n^2+3n+3}\right)$.

8 - 11 Ⓢ ★★ Série trigonométrique

Convergence et somme de $\sum \dfrac{\sin\left(\dfrac{1}{n(n+1)}\right)}{\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos\left(\dfrac{1}{n+1}\right)}$.

8 - 12 Ⓢ ★★ Série harmonique lacunaire

Nature de la série déduite de la série harmonique en ôtant tous les termes dont l'écriture décimale de l'indice ne comporte pas deux chiffres consécutifs identiques ?

8 - 13 Ⓢ ★★ Série harmonique lacunaire

Nature de la série déduite de la série harmonique en ôtant tous les termes dont l'écriture décimale de l'indice comporte un 9 ?

8 - 14 Ⓢ M 2013 ★★ Convergence de séries

Soit a dans $\mathbf{R}_+^*$. Pour n dans $\mathbf{N}^*$ on pose $H_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$. Étudier la convergence de la série de terme général a^{H_n}.

8 - 15 Ⓢ ★★ **Théorème de Schlömilch - 1873**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs, de terme général décroissant. Soit (a_n) une suite d'entiers strictement positifs strictement croissante et telle qu'il existe c dans $\mathbf{R}_+^*$ vérifiant, pour tout n dans $\mathbf{N}^*$, $a_{n+1} - a_n \leq c(a_n - a_{n-1})$.

a. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum (a_{n+1} - a_n) u_{a_n}$ sont de même nature.

b. En déduire le lemme de condensation de Cauchy (1821) : $\sum a_n$ et $\sum 2^n a_{2^n}$ sont de même nature.

c. Application aux séries de Riemann et de Bertrand, i.e. $\sum \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

d. Montrer que l'hypothèse de décroissance est nécessaire en exhibant des contre-exemples.

8 - 16 Ⓢ **M 2019** ★★ **Étude d'une série**

Soit a et b dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que $a < b$ et une suite définie par $\forall n \in \mathbf{N}\ u_{n+1} = \dfrac{n+a}{n+b} u_n$. Déterminer dans quel cas la série $\sum u_n$ converge.

8 - 17 Ⓢ **X 2013** ★★ **Règle de Raabe-Duhamel**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe α dans $\mathbf{R}_+^*$ tel qu'on ait $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Montrer que la série $\sum u_n$ converge si $\alpha > 1$ et qu'elle diverge si $\alpha < 1$.

Que dire de cette série si $\alpha = 1$?

8 - 18 Ⓢ ★★ **Séries convergentes**

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs convergente. On note $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} a_k$ la suite de ses restes.

a. Pour n et p entiers, montrer $\dfrac{a_n}{R_n} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{R_{n+p}} \geq 1 - \dfrac{R_{n+p}}{R_n}$ et en déduire que la série $\sum \dfrac{a_n}{R_n}$ diverge.

b. Pour n entier, montrer $\dfrac{a_n}{\sqrt{R_n}} \leq 2\left(\sqrt{R_n} - \sqrt{R_{n+1}}\right)$ et en déduire que la série $\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{R_n}}$ converge.

8 - 19 Ⓢ ★★★ **Séries divergentes**

Soit $\sum a_n$ une série à termes strictement positifs divergente. On note S_n la suite de ses sommes partielles.

a. Montrer que $\sum \dfrac{a_n}{1+a_n}$ est divergente.

b. Pour n et p entiers, montrer $\dfrac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \dfrac{a_{n+p}}{S_{n+p}} \geq 1 - \dfrac{S_n}{S_{n+p}}$ et en déduire que la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n}$ diverge.

c. Pour n entier non nul, montrer $\dfrac{a_n}{S_n^2} \leq \dfrac{1}{S_{n-1}} - \dfrac{1}{S_n}$ et en déduire que la série $\sum \dfrac{a_n}{S_n^2}$ converge.

d. Que dire des séries $\sum \dfrac{a_n}{1+na_n}$ et $\sum \dfrac{a_n}{1+n^2 a_n}$?

8 - 20 Ⓢ ★★★ **Intégration discrète**

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

a. Montrer qu'elle converge et préciser sa limite.

b. Montrer que $\sum u_n^2$ est convergente, mais que $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et $\sum u_n$ divergent.

c. Montrer que, pour n entier naturel, $u_n < \dfrac{1}{n+1}$ et que la suite $(nu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est croissante. En déduire qu'elle est convergente. On notera ℓ sa limite.

d. On pose $v_n = nu_n - \ell$. Montrer que $\sum (v_n - v_{n+1})$ est convergente et en déduire $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

8 - 21 Ⓢ **M 2019** ★★★ **Intégration discrète**

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite positive de limite nulle, telle qu'il existe λ strictement positif et α strictement supérieur à 1 tels que $a_{n+1} - a_n \sim -\lambda a_n^\alpha$. Étudier la convergence de la série $\sum a_n$.

Indication : on pourra considérer $a_{n+1}^\beta - a_n^\beta$ pour β bien choisi et utiliser l'inégalité de Lagrange (accroissements finis).

Familles sommables

8 - 22 Ⓢ ★ **Produit de Cauchy**

Convergence et somme de $\sum \dfrac{n+1}{2^n}$.

8 - 23 ★★★ **Ensembles négligeables ♠**

On dit qu'une partie bornée de $\mathbf{R}$ est négligeable si, pour tout ε strictement positif, on peut trouver un nombre fini d'intervalles la recouvrant et tels que la somme de leurs longueurs est inférieure à ε. Une partie quelconque de $\mathbf{R}$ est dite négligeable si son intersection avec tout compact de $\mathbf{R}$ est négligeable.

a. Montrer que l'ensemble des réels dont le développement décimal illimité propre ne contient pas un chiffre donné est négligeable.

b. En déduire qu'il en va de même avec ceux qui ne contiennent pas une suite de nombres donnée.

Intégrales

8 - 24 Ⓢ ★

Étudier la convergence des intégrales

a. $\displaystyle\int_0^{2021} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^3}$

b. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5}$

c. $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$

d. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{1-x^4}}$

e. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left(e-(1+x^{-1})^x\right)\mathrm{d}x$

f. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(\mathrm{th}(x))\,\mathrm{d}x$

8 - 25 Ⓢ ★

Calculer ou démontrer la divergence des intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+9}$

b. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\,|\ln(x)|}$

c. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2(x)}$

d. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^3-5x^2}$

e. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

8 - 26 Ⓢ ★★ **Comparaison série et intégrale**

Montrer que la suite $\displaystyle\left(2\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente, de limite comprise entre 1 et 2.

8 - 27 Ⓢ ★★ **Calcul d'intégrale**

Existence, pour n dans $\mathbf{N}$, et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$.

8 - 28 Ⓢ ★★ **Fonction Bêta**

a. Montrer que la fonction Bêta, définie par $B(p,q)=\displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$, est bien définie pour $p>0$ et $q>0$. La calculer pour p et q entiers naturels non nuls.

b. Exprimer l'intégrale $I_{m,n}$ donnée, pour m et n dans $\mathbf{N}$, par

$$I_{m,n}=\int_0^{\pi/2}\sin^m(x)\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$$

à l'aide de la fonction Bêta.

8 - 29 Ⓢ **X 2018** ★★★ **Médiane et moyenne d'une variable continue**

Soit f dans $C^0(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$ décroissante et vérifiant $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} f=1$. Pour x dans $\mathbf{R}_+$, on pose $g(x)=\displaystyle\int_x^{+\infty} f$.

a. Montrer l'égalité dans $\mathbf{R}_+\cup\{+\infty\}$:

$$\int_{\mathbf{R}_+} xf(x)\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbf{R}_+} g\ .$$

b. Montrer qu'il existe un unique M dans $\mathbf{R}_+$ tel que $\displaystyle\int_0^M f=\frac{1}{2}$.

c. Montrer $M\leq\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} xf(x)\,\mathrm{d}x$.

Fonctions convexes

8 - 30 Ⓢ ★ **Points fixes**

Soit f strictement convexe du segment $[a;b]$ dans lui-même. Montrer que f a au plus deux points fixes.

8 - 31 Ⓢ ★ **Convexe et borné**

a. Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbf{R}$ et bornée est constante.

b. Montrer qu'une fonction convexe sur $\mathbf{R}_+$ et bornée est décroissante.

8 - 32 Ⓢ ★★ **Asymptotes**

Soit f convexe sur $\mathbf{R}$ ayant une asymptote oblique en $+\infty$.

Montrer que la courbe de f est au-dessus de cette asymptote.

8 - 33 Ⓢ ★★ **Milieux**

a. Montrer qu'une fonction continue sur un intervalle vérifiant $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\leq\dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$ est convexe.

b. Soit A l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant, pour tous x et y réels, $f\left(\dfrac{x+y}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(f(x)+f(y))$.

i. Montrer que A contient les fonctions affines.

ii. Montrer $(f,g)\in A^2\Longrightarrow f-g\in A$.

iii. Soit f dans A et $a<b$ tels que $f(a)=f(b)=0$; montrer $f\left(a+k\dfrac{b-a}{2^n}\right)=0$ si $0\leq k\leq 2^n$. En conclure que f est nulle sur $[a;b]$, puis sur $\mathbf{R}$.

iv. Montrer que A est l'ensemble des fonctions affines.

8 - 34 Ⓢ ★★ **Fonctions puissance**

a. On note φ_r la fonction puissance d'exposant r, pour r dans $\mathbf{R}^*$. Montrer que, à r fixé et a variant, les droites d'équations $y=a^{r-1}(a+r(x-a))$ sont tangentes au graphe de la fonction φ_r.

b. Pour t dans $\mathbf{R}_+^*$, on pose $f(t) = t^{r-1}(t + r(1-t))$. Par exemple en remarquant $f(t) = rt^{r-1} - (r-1)t^r$, montrer que f admet un extremum en 1 et en préciser la nature.

c. Pour a et x dans $\mathbf{R}_+^*$, on pose $f_a(x) = a^{r-1}(a+r(x-a))$. En remarquant qu'on a $f_a(x) = x^r f_{a/x}(1) = x^r f(a/x)$, montrer que, pour $r \geq 1$ ou $r \leq 0$, on a

$$\sup_{a \in \mathbf{R}_+^*} f_a(x) = x^r \sup_{t \in \mathbf{R}_+^*} f(t) = x^r$$

et en déduire que φ_r est convexe sur $\mathbf{R}_+^*$.

d. Compléter l'étude pour $0 < r \leq 1$.

e. Déterminer la limite (simple) de $n(\varphi_{1/n} - 1)$ pour n tendant vers l'infini et en déduire que la fonction logarithme est concave.

8 - 35 Ⓢ ★★ Log-convexité

Soit f un fonction définie sur un intervalle I et à valeurs strictement positives. On dit que f est logarithmiquement convexe (ou log-convexe) si $\ln(f)$ est convexe.

a. Montrer qu'une fonction log-convexe f est convexe.

b. Montrer que le produit de deux fonctions log-convexes l'est aussi.

c. On suppose f deux fois dérivable. Montrer que f est log-convexe si et seulement si, pour tout t dans I, le trinôme $x \mapsto x^2 f(t) + 2xf'(t) + f"(t)$ ne prend que des valeurs positives sur $\mathbf{R}$.

d. En déduire que la somme de deux fonctions log-convexes deux fois dérivables l'est aussi.

8 - 36 Ⓢ ★★★ Développement limité et convexité

Soit f dans $D^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, convexe.

a. Soit a réel tel que $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \mathrm{o}\left(h^2\right)$. Démontrer que f est deux fois dérivable en a et qu'on a $f''(a) = 0$. On pourra comparer $f'(a+h)$ aux taux d'accroissement de f entre a et $a+h$, et entre $a+h$ et $a+2h$.

b. Montrer, plus généralement, que f est deux fois dérivable en a si et seulement si elle y admet un développement limité à l'ordre 2.

8 - 37 Ⓢ ★★★ Convexité ♠

Soit U un ouvert convexe de $\mathbf{R}^n$ et f une fonction de U dans $\mathbf{R}$. On dit que f est convexe lorsque : $\forall (x,y) \in U^2$, $\forall t \in [0;1]$,

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est strictement convexe si l'inégalité précédente est stricte lorsque $x \neq y$ et $0 < t < 1$.

a. On suppose que f est convexe.

i. Soit $x \in U$, $h \in \mathbf{R}^n$ et $t \in [0;1]$ avec $x - h \in U$ et $x + h \in U$. Montrer :

$$\begin{cases} (1+t)f(x) - tf(x-h) \leq f(x+th) \\ f(x+th) \leq (1-t)f(x) + tf(x+h). \end{cases}$$

ii. Montrer que f est continue (raisonner sur le cas $n = 2$ puis généraliser).

b. On suppose que f est de classe C^1. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout (x,y) dans U, on a : $f(y) \geq f(x) + \mathrm{d}f(x) \cdot (y - x)$. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité lorsque $n = 2$.

c. On suppose que f est de classe C^2.

i. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tout $x \in U$ et tout h dans $\mathbf{R}^n$, $\mathrm{d}^2 f(x) \cdot (h,h) \geq 0$.

ii. Si, pour tout $x \in U$, $\mathrm{d}^2 f(x)$ est un produit scalaire, montrer que f est strictement convexe. Montrer par un exemple que la réciproque est fausse.

Inégalités de convexité

8 - 38 Ⓢ ★ Somme de rapports

Montrer, pour $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels strictement positifs,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n\ .$$

Donner le cas d'égalité.

8 - 39 Ⓢ ★ Log-convexité et inégalité de Brunn-Minkowski

a. Montrer que $x \mapsto 1 + e^x$ est log-convexe.

b. Montrer, pour $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels strictement positifs

$$1 + \prod_{k=1}^n x_k^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (1 + x_k)^{1/n}\ .$$

c. Montrer, pour $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ et $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$ des réels strictement positifs

$$(x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n} + (y_1 y_2 \ldots y_n)^{1/n} \leq \prod_{k=1}^n (x_k + y_k)^{1/n}\ .$$

8 - 40 Ⓢ ★ Inégalité de Minkowski

a. Soit f la fonction donnée par $f(t) = (1 + t^{1/p})^p$. En calculant sa dérivée logarithmique montrer que sa dérivée est donnée par

$$f'(t) = \left(\frac{1 + t^{1/p}}{t^{1/p}}\right)^{p-1} = (1 + t^{-1/p})^{p-1}\ .$$

b. En déduire la dérivée logarithmique de f' puis que f est concave.

c. En déduire l'inégalité de MINKOWSKI dans le cas où les coordonnées de x sont toutes non nulles, puis le cas général.

8 - 41 Ⓢ ★★ **Inégalité de convexité**

Pour x, y, p et q des réels positifs vérifiant $p+q=1$, montrer
$$1+x^p y^q \leq (1+x)^p(1+y)^q\ .$$

8 - 42 Ⓢ ★★ **Inégalité de convexité**

Soit a, b, c et d des réels strictement positifs de somme 1. Montrer
$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+d}+\frac{d^2}{d+a}\geq\frac{1}{2}$$
et préciser le cas d'égalité.

8 - 43 Ⓢ ★★ **Convexité et convergence ♥**

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs convergente. Montrer que $\sum\frac{\sqrt{a_n}}{n}$ est également convergente. La réciproque est-elle vraie ?

8 - 44 Ⓢ ★★ **Permutations entières**

Soit σ une permutation de $\mathbf{N}^*$. Montrer que $\sum\frac{\sigma(n)}{n}$ est divergente et que $\sum\frac{1}{\sigma(n)n}$ est convergente.

8 - 45 Ⓢ ★★ **Concavité et convergence d'intégrales**

Existence des intégrales
$$\int_0^{+\infty}\frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^6\sin^2(t)}\quad\text{et}\quad\int_0^{+\infty}te^{-t^6\sin^2(t)}\,\mathrm{d}t\ .$$
On minorera sin par une inégalité de concavité.

8 - 46 Ⓢ ★★ **Moyenne arithmético-géométrique et lemniscate de BERNOULLI ♥**

Soit a et b, deux nombre réels positifs. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par $a_0=a$, $b_0=b$ et, pour $n\in\mathbf{N}$, $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$.

a. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante et que $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est croissante et que, pour n dans $\mathbf{N}^*$, on a $b_n\leq a_n$.

b. Montrer, pour n dans $\mathbf{N}$: $0\leq|a_n-b_n|\leq\frac{|a-b|}{2^n}$ et en déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ ont une limite commune.

c. On note la limite précédente $M(a,b)$ et, lorsque $a=1$ et $b=x$, on note $u_n(x)$ la valeur de a_n, $v_n(x)$ celle de b_n et $f(x)$ celle de $M(1,x)$.

i. Montrer que f est croissante.

ii. Démontrer que, pour $x\geq 0$, on a $\sqrt{x}\leq f(x)\leq\frac{1+x}{2}$ et en déduire que f est dérivable au point $x=1$.

iii. Étudier f en 0 : valeur, dérivabilité, tangente au graphe.

iv. ★★★ Démontrer que f est continue.

v. Démontrer que, pour $x>0$, on a $f(x)=xf(1/x)$ et étudier la branche infinie de f en $+\infty$.

vi. Calculer les valeurs à 10^{-5} près de f en les points $0,01$, $0,1$, $0,2$, $0,4$, $0,6$, $0,8$, 2, 3, 10, 100.

vii. Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[0;3]$, ainsi que les fonctions $x\mapsto\sqrt{x}$ et $x\mapsto\frac{1+x}{2}$.

viii. Donner une valeur de $M(1,\sqrt{2})$ obtenue par interpolation.

Remarque : la relation de GAUSS pour la longueur de la lemniscate de BERNOULLI est $\pi=\varpi M(1,\sqrt{2})$. Voir exercice 8 - 57

8 - 47 Ⓢ ★★★ **Inégalité de JENSEN intégrale**

a. Soit f une fonction convexe de I, intervalle ouvert, dans $\mathbf{R}$ et g une fonction continue de $[0;1]$ dans I.

i. Montrer $\forall(x,y)\in I^2$, $f(x)\geq f(y)+f'_g(y)(x-y)$.

ii. Montrer qu'il existe u dans $[0;1]$ tel que $g(u)=\int_0^1 g$ et qu'on a $\forall x\in[0;1]$, $f(g(x))\geq f(g(u))+f'_g(g(u))(g(x)-g(u))$.

iii. En déduire $\int_0^1 f\circ g\geq f\left(\int_0^1 g\right)$.

b. Soit f continue de $[a;b]$ dans $\mathbf{R}_+^*$. Montrer $\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln\circ f\leq\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f\right)$.

c. Plus généralement, soit f convexe de I dans $\mathbf{R}$, g continue par morceaux de $[a;b]$ dans I et h de $[a;b]$ dans $\mathbf{R}_+$ tel que $\int_a^b h=1$. Montrer
$$f\left(\int_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x\right)\leq\int_a^b h(x)f\circ g(x)\,\mathrm{d}x.$$

8 - 48 Ⓢ **Centrale MP 2001** ★★★ **Inégalité de WIRTINGER**

a. Soit f de classe C^1 de $[0;\pi]$ dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0)=f(\pi)=0$. Montrer que $\int_0^\pi f^2\leq\int_0^\pi(f')^2$.

Indication : on pourra considérer ff' cot et $f^2\sin^{-2}$.

b. Soit une fonction q continue sur $[0;\pi]$, à valeurs dans $]-\infty;1[$. Montrer que l'unique fonction x de classe C^2 s'annulant en 0 et en π et vérifiant l'équation différentielle $x''+q(t)x=0$ est la fonction nulle.

c. Soit f une fonction continue sur $[0;\pi]$ et deux réels a et b fixés. Montrer qu'il existe une unique solution x de classe C^2 vérifiant $x(0)=a$, $x(\pi)=b$ et $x''+q(t)x=f(t)$.

8 - 49 Ⓢ ★★★ **Inégalités entre moyennes ♥**

Soit φ une fonction de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels strictement positifs et $(\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ des réels strictement positifs de somme 1. On note λ la donnée $(x_i,\alpha_i)_{1\leq i\leq n}$ et on note, quand c'est bien défini, $\mu_\varphi(\lambda)$, la moyenne associée à φ de λ, définie par

$$\mu_\varphi(\lambda)=\varphi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\varphi(x_i)\right).$$

Dans la suite on fixe une donnée λ.

a. Montrer que la moyenne d'ordre r, c'est-à-dire la moyenne associée à $x\mapsto x^r$, est bien définie pour $r\neq 0$. On la note M_r.

b. Montrer que la moyenne d'ordre 0 ou encore moyenne géométrique, c'est-à-dire la moyenne associée au logarithme népérien, est bien définie. On la note M_0.

c. Utiliser la convexité de φ_r pour montrer $M_1(\lambda)\leq M_r(\lambda)$ pour $r\geq 1$. Plus généralement montrer que si φ est convexe croissante, alors $M_1(\lambda)\leq \mu_\varphi(\lambda)$.

d. En déduire que la fonction $r\mapsto M_r(\lambda)$ est croissante sur $\mathbf{R}_+^*$.

e. Utiliser la concavité du logarithme pour montrer $M_0(\lambda)\leq M_1(\lambda)$. Plus généralement montrer que si φ est concave croissante, alors $M_1(\lambda)\geq \mu_\varphi(\lambda)$.

f. Montrer que la fonction $r\mapsto M_r(\lambda)$ est croissante sur $\mathbf{R}$.

g. En utilisant que les fonctions convexes et concaves utilisées dans cet exercice le sont strictement, en ce sens qu'elles ne sont affines sur aucun intervalle, montrer que la croissance des moyennes est stricte sauf si les $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ sont tous égaux.

8 - 50 Ⓢ ★★★ **Inégalités entre moyennes ♥**

On reprend les notations de l'exercice 8 - 49

a. Soit f et g deux fonctions strictement monotones et continues sur I.

  i. Montrer : $\mu_f=\mu_g$ si et seulement s'il existe α et β réels tels que $g=\alpha f+\beta$. On notera que α est nécessairement non nul.

  ii. Montrer : $\mu_f\leq\mu_g$ si et seulement si ou bien g est croissante et $g\circ f^{-1}$ est convexe, ou bien g est décroissante et $g\circ f^{-1}$ est concave.

  iii. Si, dans la question précédente, la convexité ou la concavité est stricte, montrer que l'égalité $\mu_f(\lambda)=\mu_g(\lambda)$ n'a lieu que si les $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ sont tous égaux.

b. Soit f et g deux fois dérivables, de dérivées nulle part nulles. Montrer $\mu_f\leq\mu_g \Leftrightarrow \dfrac{f''}{f'}\leq\dfrac{g''}{g'}$.

c. Retrouver les résultats sur les moyennes d'ordre r à partir de ce critère.

Compléments

8 - 51 **C II 2019** ★★ **Nombre de Pile**

On effectue n lancers de pièces indépendants, et la probabilité d'obtenir pile au k^{e} lancer est notée p_k. On note X_n le nombre de piles obtenus au cours de ces n lancers. On appelle π_n la probabilité que X_n soit pair.

a. L'ensemble de cette question est à traiter à l'aide de PYTHON.

  i. Écrire une fonction $pi(n,p)$ qui donne une estimation de π_n en fonction de $p=(p_k)$. Elle doit effectuer 1000 simulations.

  ii. Représenter π_n en fonction de n dans $[\![0;100]\!]$ pour $p_k=\dfrac{1}{2(k+1)}$ et pout $p_k=\dfrac{1}{2(k+1)^2}$.

  iii. Représenter π_{100} en fonction de α dans $[0;6]$ avec $p_k=\dfrac{1}{2(n+1)^\alpha}$.

b. Exprimer π_n en fonction des p_k. On pourra considérer la suite $u_n=\pi_n-\dfrac{1}{2}$.

c. Calculer $\lim\pi_n$ quand $p_k=\dfrac{1}{2(k+1)}$ et quand $p_k=\dfrac{1}{2(k+1)^2}$. Que se passe-t-il quand une des pièces est équilibrée ?

d. On suppose que pour tout k on a $p_k<\dfrac{1}{2}$. Montrer que π_n tend vers une limite ℓ dans $\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. Montrer qu'on a $\ell=\dfrac{1}{2}$ si et seulement si la série $\sum p_n$ diverge.

8 - 52 Ⓢ ★★ **Théorème de CARATHEODORY**

Démontrer que tout vecteur de l'enveloppe convexe de N éléments de $\mathbf{R}^n$ (i.e. tout vecteur qui est une combinaison convexe de ces N éléments) est également combinaison convexe d'au plus $n+1$ de ces éléments.

8 - 53 Ⓢ ★★ **Bornes pour les racines**

Soit P dans $\mathbf{C}[X]$ non constant, avec $P=\displaystyle\sum_{k=0}^n a_kX^k$ et $a_n\neq 0$, et z une racine de P. Soit p un réel supérieur à 1 (éventuellement $p=+\infty$) et q son exposant conjugué, i.e. $q=\dfrac{p}{p-1}$ de sorte qu'on a $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ (1 et $+\infty$ sont donc conjugués).

a. On suppose $a_n=1$ et on note $A=(a_0,\dots,a_{n-1})$, $A_p=\|A\|_p$. Montrer $|z|\leq\|(1,A_p)\|_q$. On pourra s'inspirer de l'obtention de la borne de LAGRANGE. Interpréter les cas $p = 1$ et $p = +\infty$.

b. Donner une borne dans le cas général où P n'est pas nécessairement unitaire.

c. Simplifier cette borne lorsque $p = q = 2$.

8 - 54 Ⓢ ★★★ Bornes de LANDAU

Soit P dans $\mathbf{C}[X]$ non constant, avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $a_n \neq 0$, et z une racine de P. On note $(z_1, \ldots, z_n)$ les racines de P (éventuellement confondues) et

$$M(P) = |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max(1, |z_j|) \ .$$

On dit que $M(P)$ est la mesure de MAHLER de P. On admet la formule

$$\ln(M(P)) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(\left|P(e^{i\theta})\right|) \, \mathrm{d}\theta \ .$$

a. Montrer que si Q est un autre polynôme non constant, $M(PQ) = M(P)M(Q)$.

b. En utilisant l'inégalité de JENSEN intégrale, montrer $M(P) \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k|^2}$. Comparer avec la borne individuelle pour les racines trouvée à l'exercice 8 - 53.

c. En utilisant les relations de VIÈTE entre coefficients et racines, montrer

$$\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq |a_n| \prod_{j=1}^{n} (1 + |z_j|)$$

et en déduire $\sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq 2^n M(P)$.

d. On note $\|P\|_\infty = \max(|a_k|)$. Si Q est un polynôme de degré m, montrer $\|P\|_\infty \|Q\|_\infty \leq 2^{m+n}\sqrt{m+n+1}\,\|PQ\|_\infty$.

8 - 55 Ⓢ X 2019 ★★★ Suite sous-additive

a. Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $\forall (n,m) \in (\mathbf{N}^*)^2$, $x_{n+m} \leq x_n + x_m$. Montrer que $\left(\frac{x_n}{n}\right)$ tend vers $\inf_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{x_n}{n}$.

b. Soit (y_n) une suite de réels positifs bornée telle que : $\forall (n,m) \in (\mathbf{N}^*)^2$,

$$y_{n+m} \leq \frac{n^2}{(n+m)^2} y_n + \frac{m^2}{(n+m)^2} y_m + \varepsilon_{n,m}$$

où $(\varepsilon_{n,m})$ est telle que

$$\forall \tau > 0\,,, \exists A > 0\,, \forall n \geq A\,, \forall m \geq A\,, \varepsilon_{n,m} < \tau \ .$$

Montrer que (y_n) tend vers 0.

<u>Indication</u> : Pour y_n, on peut considérer les puissances de 2 et les ensembles $\left\{2^k, 2^k+1, \ldots, 2^{k+1}\right\}$.

8 - 56 L 2019 ★★★ Polygones convexes

Si E_1 et E_2 sont des sous-ensembles de $\mathbf{R}^n$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$, on note $E_1 + E_2$ l'ensemble défini par $\{p_1 + p_2 \,|\, (p_1, p_2) \in E_1 \times E_2\}$ et λE_1 l'ensemble $\{\lambda p_1 \,|\, p_1 \in E_1\}$. Soit E un polygone convexe de $\mathbf{R}^n$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. E possède un centre de symétrie.
2. E s'écrit comme somme de segments.

<u>Indication</u> : pour le sens direct, procéder par récurrence sur le nombre de côtés.

8 - 57 Ⓢ ★★★ Moyenne de GAUSS

On reprend les notations de l'exercice 8 - 46.

a. Former une relation simple entre les intégrales

$$I(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

et

$$J(a,b) = \int_0^{\sqrt{ab}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}}$$

et en déduire que, pour tout entier naturel n, $I(a,b) = I(a_n, b_n)$.

<u>Indication</u> : on pourra faire le changement de variables donné par $2ux = ab - x^2$.

b. Exprimer $M(a,b)$ en fonction de $I(a,b)$.

c. Calculer $M(1, \sqrt{2})$ avec 20 décimales. Comparer à π/ω où ω est le demi-périmètre de la lemniscate, i.e. $\omega = 2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^4}}$.