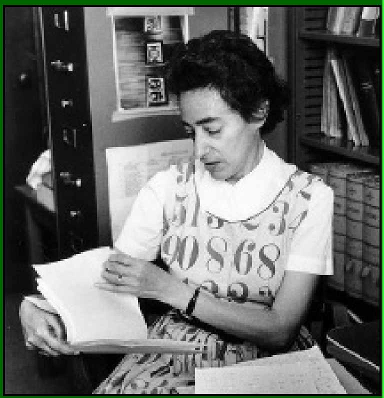
CHAPITRE 7

Réduction



Olga Taussky nait en 1906 à Olomouc en République Tchèque. Elle a étudié les systèmes algébriques avec Emmy Noether à Göttingen et participé à l'édition du premier volume des travaux de Hilbert sur la théorie des nombres. Elle travailla sur les matrices pour étudier les vibrations des avions durant la Seconde Guerre mondiale. Parmi ses objets de recherche, on peut citer les matrices à diagonale dominante (théorème de Hadamard, cercles de Gershgorin). Un très joli résultat est l'étude de la réciproque du fait élémentaire suivant : si deux matrices diagonalisables commutent alors toutes les matrices qui en sont combinaison linéaire sont également diagonalisables. La réciproque est vraie sur $\mathbf{C}$ et sur les corps finis (théorème de Motzkin-Taussky).

À son entretien d'embauche, en Angleterre, un membre du jury lui demanda « I see you have written several joint papers. Were you the senior or the junior author ? ». Godfrey Hardy intervint alors pour couper court en disant « That is a most improper question. Do not answer it ! ».

Introduction

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbf{K}$ est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

Programme

— Matrices semblables, interprétation géométrique.

— Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit. En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace F par un endomorphisme u à l'aide de la matrice de u dans une base adaptée à F.

— Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Spectre. Somme d'une famille finie de sous-espaces propres. Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.

— Deux matrices semblables ont même spectre. Si $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{K}'$ et si $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, le spectre de M dans $\mathbf{K}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbf{K}'$.

— Polynôme caractéristique. Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Coefficients de degrés 0 et $n-1$. Valeurs propres, multiplicités. La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ. Matrice triangulaire, endomorphisme induit.

— Endomorphisme diagonalisable. Cas des projecteurs, des symétries. Dans la pratique des cas numériques, on se limite à $n = 2$ ou $n = 3$. Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.

— Critères de diagonalisabilité : χ_u scindé et, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité ; polynôme minimal simplement scindé. Traduction matricielle. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit.

— Endomorphismes à polynôme minimal scindé : s'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent. Traduction matricielle.

— Endomorphisme trigonalisable. Interprétation géométrique. La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.

— Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

— Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.

1 Suites récurrentes linéaires

On s'intéresse aux suites récurrentes linéaires définies par une relation de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N}\,, \quad u_{n+p} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u_{n+k}$$

pour un certain p dans $\mathbf{N}^*$ et $(a_0, \cdots, a_{p-1})$ dans $\mathbf{K}^p$.

Pout $p = 1$ il s'agit de suites géométriques avec un petite précision : on autorise ici la raison à être nulle. Une suite géométrique de raison nulle est une suite nulle à partir du rang 1. Soit τ l'application de translation d'indice, i.e.

$$\tau((u_n)_{n\in\mathbf{N}}) = (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}\ .$$

On vérifie sans peine que c'est un endomorphisme de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et que les suites géométriques sont exactement les éléments de ses espaces propres. Plus précisément une suite géométrique de raison α est un élément de $\mathrm{Ker}(\tau - \alpha\mathrm{Id})$.

Intéressons-nous maintenant aux suites arithmético-géométriques. Soit donc α et β deux scalaires et u une suite dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = \alpha u_n + \beta\ .$$

On a donc $\tau(u) = \alpha u + \beta\mathbb{1}$, où $\mathbb{1}$ est la suite constante égale à 1. Une suite constante n'est rien d'autre qu'une suite géométrique de raison 1, et réciproquement :

$$\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{Ker}(\tau - \mathrm{Id}) = \mathbf{K}\mathbb{1}\ .$$

Les suites arithmético-géométriques considérées sont donc dans le noyau

$$\mathrm{Ker}\left((\tau - \mathrm{Id}) \circ (\tau - \alpha\mathrm{Id})\right)$$

et, plus précisément,

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = \alpha u_n + \beta \Longrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} - (\alpha+1)u_{n+1} + \alpha u_n = 0\ .$$

L'ensemble des suites récurrentes d'ordre 2 vérifiant la relation $u_{n+2} - (\alpha+1)u_{n+1} + \alpha u_n = 0$ forme un espace vectoriel de dimension 2, i.e. un plan. On note P ce plan. Supposons pour l'instant $\alpha \neq 1$. Puisque Δ et $\tau - \alpha\mathrm{Id}$ commutent, on dispose alors de deux espaces propres distints (car associés à des valeurs propres distinctes) et inclus dans ce plan : $\mathrm{Ker}(\tau - \mathrm{Id})$ et $\mathrm{Ker}(\tau - \alpha\mathrm{Id})$.

On note γ_α la suite géométrique de raison α prenant 1 comme première valeur, de sorte que γ_α est un vecteur propre de τ et une base de $\mathrm{Ker}(\tau - \alpha\mathrm{Id})$. Comme $\alpha \neq 1$, par dimension $(\gamma_1, \gamma_\alpha)$ est une base de P et dans cette base τ est diagonale, i.e. sa matrice est diagonale, et on a plus précisément

$$\mathrm{Mat}_{(\gamma_1,\gamma_\alpha)}(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\ .$$

On en déduit d'une part que tout élément de P peut s'écrire $u = x\gamma_1 + y\gamma_\alpha$, avec x et y des scalaires, et d'autre part qu'on a $\tau(u) = x\gamma_1 + \alpha y\gamma_\alpha$. Pour trouver les coordonnées on peut résoudre un système et pour ce faire, on peut passer par un pivot de Gauss. Mais à cause des propriétés de commutation, on peut penser plus efficacement :

$$(\tau - \alpha\mathrm{Id})(u) \in \mathrm{Ker}(\Delta) \qquad \text{et} \qquad \Delta(u) \in \mathrm{Ker}(\tau - \alpha\mathrm{Id})$$

(cc)(by)(nc)(sa)

et comme $(\tau-\alpha\mathrm{Id})(\gamma_1)=(1-\alpha)\gamma_1$, on a $(\tau-\alpha\mathrm{Id})(u)=x(1-\alpha)\gamma_1$ et en particulier $x=\dfrac{u_1-\alpha u_0}{1-\alpha}=\dfrac{\beta}{1-\alpha}$. De même $\Delta(u)=y(\alpha-1)\gamma_\alpha$ et $y=\dfrac{u_1-u_0}{\alpha-1}=\dfrac{(\alpha-1)u_0+\beta}{\alpha-1}=u_0+\dfrac{\beta}{\alpha-1}$ et il vient

$$u_n=u_0\alpha^n+\beta\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}\ .$$

En faisant tendre α vers 1, on trouve la formule pour $\alpha=1$:

$$\text{si } \alpha=1 \qquad u_n=u_0\lim_{\alpha\to1}\alpha^n+\beta\lim_{\alpha\to1}\frac{\alpha^n-1}{\alpha-1}=u_0+\beta n$$

ce qui montre qu'il y a une certaine forme de continuité en fonction de u_0, α et β.

Remarque 7 - 1

Pour l'obtenir plus rigoureusement on remarque que si u est une suite polynomiale, i.e. $u_n=Q(n)$ pour un certain polynôme Q, on a $\Delta(u)_n=\Delta(P)(n)$ et ainsi il y a concordance entre les opérateurs Δ définis sur les suites polynomiales et sur les polynômes. L'opérateur Δ sur $\mathbf{K}[X]$ faisant chuter le dégré on a $\mathbf{K}_p[X]\subset\mathrm{Ker}(\Delta^{p+1})$. Comme il le fait chuter d'exactement 1 (sur les poynômes non constants), on a en fait égalité. Au niveau des suites on en déduit que les suites polynomiales associées à un élément de $\mathbf{K}_p[X]$ sont dans le noyau de Δ^{p+1}, i.e. de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^{p+1-k}\binom{p+1}{k}\tau^k$. Comme une suite dans ce noyau est définie par ses termes de 0 à p, donc par $p+1$ termes, $\mathrm{Ker}(\Delta^{p+1})$ est un espace de dimension $p+1$. On a donc égalité. En particulier $\mathrm{Ker}(\Delta^2)$ est formé par les suites polynomiales de degré au plus 1, à savoir de la forme $u_n=an+b$. En identifiant il vient $b=u_0$ et $a=u_1-u_0=\beta$.

On revient au problème général, à savoir les suites vérifiant

$$\forall n\in\mathbf{N}\,,\quad u_{n+p}=\sum_{k=0}^{p-1}a_ku_{n+k}\ .$$

On note $Q=X^p-\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}a_kX^k$, de sorte qu'il revient au même d'étudier $\mathrm{Ker}(Q(\tau))$ en notant $Q(\tau)=\tau^p-\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}a_k\tau^k$. On note $E=\mathrm{Ker}(Q(\tau))$.

Pour simplifier on suppose $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ et on écrit $Q=X^{p_0}\displaystyle\prod_{i=1}^m(X-\alpha_i)^{p_i}$ la décomposition primaire de Q dans $\mathbf{C}[X]$ (avec p_0 éventuellement nul). Si A et B sont des polynômes dans $\mathbf{C}[X]$, $A(\tau)$ et $B(\tau)$ commutent, de sorte que E contient tous les noyaux de la forme $\mathrm{Ker}((\tau-\alpha_i\mathrm{Id})^{p_i})$.

On va montrer que ces noyaux sont de dimension p_i et en somme directe.

Or E est de dimension p car un de ses éléments est défini par ses p premiers termes et, réciproquement, p premiers termes arbitraires définissent une suite récurrente d'ordre p. Ainsi par dimension, puisqu'on a $p=\displaystyle\sum_{i=0}^m p_i$, on conclut

$$E=\mathrm{Ker}(Q(\tau))=\bigoplus_{i=0}^m\mathrm{Ker}((\tau-\alpha_i\mathrm{Id})^{p_i})\ .$$

On retrouve le **lemme de décomposition des noyaux** déjà obtenu lors de l'étude des équations différentielles linéaires.

Le fait que, pour α dans $\mathbf{C}$ et p dans $\mathbf{N}^*$, $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha\operatorname{Id})^p)$ est dimension p résulte du même argument que celui utilisé pour E.

Pour démontrer que la somme est directe, on va généraliser l'argument suivant pour $m=2$ et $p_1=p_2=1$: soit x et y respectivement dans $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha_1\operatorname{Id}))$ et $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha_2\operatorname{Id}))$ tels que $x+y=0$, on a $0=(\tau-\alpha_1\operatorname{Id})(x+y)=(\alpha_2-\alpha_1)y$ et donc $y=0$, puis $x=0$. Soit maintenant, pour i dans $[\![1;m]\!]$, x dans $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha_i\operatorname{Id})^{p_i})$, et

$$U(X-\alpha_i)^{p_i}+V\prod_{\substack{1\leq j\leq m\\ j\neq i}}(X-\alpha_j)^{p_j}=1$$

une relation de Bézout, ce qui est possible puisque les (α_k) sont distincts. On a donc

$$U(\tau)\circ(\tau-\alpha_i\operatorname{Id})^{p_i}+V(\tau)\circ\prod_{\substack{1\leq j\leq m\\ j\neq i}}(\tau-\alpha_j\operatorname{Id})^{p_j}=\operatorname{Id}$$

et ainsi

$$x=V(\tau)\circ\prod_{\substack{1\leq j\leq m\\ j\neq i}}(\tau-\alpha_j\operatorname{Id})^{p_j}(x)\ .$$

Par construction tout élément de $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha_j\operatorname{Id})^{p_j})$ est annulé par l'endomorphisme produit (car le produit est commutatif) et donc aussi toute somme d'éléments de ces noyaux. Il en résulte

$$\operatorname{Ker}((\tau-\alpha_i\operatorname{Id})^{p_i})\cap\left(\sum_{\substack{1\leq j\leq m\\ j\neq i}}\operatorname{Ker}((\tau-\alpha_j\operatorname{Id})^{p_j})\right)=\{0\}\ .$$

Pour conclure l'étude, il reste à décrire $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha\operatorname{Id})^p)$ pour α dans $\mathbf{C}$ et p dans $\mathbf{N}^*$. On a déjà étudié le cas $p=1$ et trouvé les suites géométriques. Une base du noyau est alors (γ_α). On a aussi étudié le cas $\alpha=1$ et p quelconque. On trouve les suites de la forme $(P(n))$ avec $P\in\mathbf{C}_{p-1}[X]$. Le cas général est la composition de ces deux études. On peut le voir en remarquant la chose suivante : pour $\alpha\neq 0$ la suite γ_α n'est jamais nulle, de sorte que la multiplication par γ_α est bijective. On note μ_α cet opérateur : $(\mu_\alpha(u))_n=\alpha^n u_n$. On a donc

$$\mu_\alpha\circ\Delta(u)_n=\alpha^n(u_{n+1}-u_n)=\alpha^{-1}(\alpha^{n+1}u_{n+1}-\alpha\alpha^n u_n)$$

ce que l'on peut écrire $\mu_\alpha\circ\Delta=\alpha^{-1}(\tau-\alpha\operatorname{Id})\circ\mu_\alpha$. On en déduit

$$\tau-\alpha\operatorname{Id}=\alpha\mu_\alpha\circ\Delta\circ\mu_\alpha^{-1}\quad\text{et donc}\quad(\tau-\alpha\operatorname{Id})^p=\alpha^p\mu_\alpha\circ\Delta^p\circ\mu_\alpha^{-1}\,,$$

par composition. D'où

$$\operatorname{Ker}((\tau-\alpha\operatorname{Id})^p)=\operatorname{Ker}(\mu_\alpha\circ\Delta^p\circ\mu_\alpha^{-1})=\mu_\alpha(\operatorname{Ker}(\Delta^p))$$

i.e. les éléments de $\operatorname{Ker}((\tau-\alpha\operatorname{Id})^p)$ sont les suites de la forme $(P(n)\alpha^n)$ pour P dans $\mathbf{C}_{p-1}[X]$. C'est bien un espace vectoriel de dimension p.

Puisque P est déterminé de sorte qu'on ait $P(k)\alpha^k=u_k$ pour $0\leq k<p$, on obtient, en utilisant les polynômes de Lagrange

$$u_n=\sum_{k=0}^{p-1}\frac{u_k}{\alpha^k}\frac{(n-p+1)\cdots(n-k-1)(n-k+1)\cdots n}{(-1)^{p-k-1}\,(p-k-1)!\,k!}\alpha^n$$

CC BY-NC-SA

puis, en reconnaissant les polynômes de HILBERT

$$T_i = \binom{X}{i} = \frac{X(X-1)\cdots(X-i+1)}{i!}$$

et la dérivée k^{e} de X^n : $(n-k+1)\cdots nX^{n-k}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^{p-k-1} u_k T_{p-k-1}(n-k-1) \frac{1}{k!} (X^n)^{(k)}(\alpha) .$$

Sous cette forme on peut passer à la limite en $\alpha = 0$: $\dfrac{1}{k!}(X^n)^k(0) = \delta_{k,n}$ en utilisant le symbole de KRONECKER. On obtient alors que pour $\alpha = 0$, les éléments de $\operatorname{Ker}(\tau^p)$ sont les suites nulles à partir du rang p, ce qui est évident directement.

On en déduit que l'ensemble des suites récurrentes linéaires satisfaisant à la relation de récurrence sont exactement celles de la forme donnée par

$$\forall n \geq p_0 \qquad u_n = P_1(n)\lambda_1^n + \cdots + P_m(n)\lambda_m^n$$

où P_1, …, P_m sont des polynômes de degrés respectifs au plus $p_1 - 1$, …, $p_m - 1$.

♥

On voit l'intérêt d'étudier un endomorphisme d'un point de vue abstrait, sans faire nécessairement appel à une représentation matricielle, et de lui associer : des polynômes d'endomorphismes, des valeurs propres, des espaces propres, etc. Il est même utile de découper l'espace ambiant en sous-espaces plus simples. On commence donc l'étude générale par celle des sous-espaces stables.

2 Sous-espaces stables

Dans tout ce chapitre E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, où $\mathbf{K}$ est un corps (que l'on pourra supposer égal à $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}$ ou à un corps fini).

La lettre u désignera un endomorphisme d'un espace vectoriel qui, sauf indication du contraire, sera supposé être E. L'objectif est de décomposer E en parties où u est plus simple à comprendre ou à expliciter.

Définition 7 - 1

Sous-espace stable

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On dit que F est stable par u, ou u-stable, si $u(F) \subset F$. Dans ce cas on peut définir la bi-restriction de u à F, i.e. $u_{|F}^{|F}$ l'endomorphisme de F induit par F : $u_{|F}^{|F} \in \operatorname{End}(F)$.

Remarque 7 - 2

Pour que u induise un endomorphisme de F, il est en fait nécessaire que F soit stable par u.

Par contre la définition ne demande pas $u(F) = F$, i.e. que $u_{|F}^{|F}$ soit surjective. On cherchera néanmoins le plus souvent à ce que cette bi-restriction soit ou bien nulle ou bien bijective ou encore nilpotente.

Remarquons néanmoins que si u est un automorphisme de E et si F est de dimension finie, alors $u_{|F}^{|F}$ est injective (puisque u l'est), donc bijective (par dimension) et donc $u(F) = F$ et F est u^{-1}-stable.

Les propriétés suivantes sont directes.

Propriétés 7 - 1

1. Soit x dans E ; alors $\mathbf{K}x$ est stable par u si et seulement s'il existe λ dans $\mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. En particulier si x est non nul, la droite $\mathbf{K}x$ est stable par u si et seulement si x est vecteur propre de u.
2. Si F et G sont u-stables, alors $F \cap G$ et $F + G$ sont u-stables.
3. Soit p un projecteur sur F, i.e. $p \circ p = p$ et $\mathrm{Im}(p) = F$, alors F est u-stable si et seulement si $p \circ u \circ p = u \circ p$ ou encore $(\mathrm{Id}_E - p) \circ u \circ p = 0$.

Démonstration. Si x est nul tout λ convient, sinon x est une base de $\mathbf{K}x$ et donc $u(\mathbf{K}x) \subset \mathbf{K}x$ si et seulement si $u(x) \in \mathbf{K}x$.

La stabilité de $F \cap G$ résulte de la définition de l'intersection. Celle de $F + G$ de la linéarité de u.

On a $\mathrm{Im}(u \circ p) = u(F)$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{Id} - p) = F$ et donc $(\mathrm{Id}_E - p) \circ u \circ p = 0$ si et seulement si $u(F) \subset F$. □

Remarque 7 - 3

Valeur propre

Un scalaire λ est valeur propre pour u si et seulement s'il existe une droite vectorielle D de E telle que D soit u-stable et $u_{|D}^{|D} = \lambda \mathrm{Id}_D$. Autrement dit si et seulement si la (bi-)**restriction de u à D se comporte comme une homothétie** (de rapport λ).

Définition 7 - 2

Spectre

On appelle spectre de u l'ensemble, noté $\mathrm{Sp}(u)$, des valeurs propres de u.

Exemples 7 - 1

1. Si $u = \lambda \mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda\}$.
2. Si u est une symétrie distincte de $\pm\mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{+1, -1\}$. On remarque au passage qu'on a $s^2 = s \circ s = \mathrm{Id}_E$ et tout élément λ du spectre de u vérifie $\lambda^2 = 1$.
3. Si u est un projecteur (i.e. $u^2 = u$) distinct de Id_E et de 0, alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0, 1\}$. Une fois encore tout élément λ du spectre de u vérifie $\lambda^2 = \lambda$.
4. Si $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ et $u(f) = f'$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathbf{R}$.

♥

Un endomorphisme de E est un endomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et donc $\mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{K}$.

Danger

Spectre et corps de base

Néanmoins si à u on associe une matrice, la question du corps de définition peut se poser. Ainsi une matrice à coefficients entiers peut-être vue comme la matrice canoniquement associée à un endomorphisme de $\mathbf{Q}^n$, de $\mathbf{R}^n$ ou de $\mathbf{C}^n$. On peut même prendre la réduction modulo un nombre premier de ces entiers et la voir comme associée à un endomorphisme de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^n$. Dans ce cas il est utile de préciser le corps de base et on note $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(u)$. Par définition, si $\mathbf{K} \subset \mathbf{K}'$, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(u) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{K}'}(u)$.

Exemple 7 - 2

Si u est la matrice de la rotation correspondant au quart de tour, i.e $u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Si $u \in \mathrm{End}(\mathbf{R}^2)$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$ puisqu'aucune droite n'est laissée stable par un quart de tour. Par contre si $u \in \mathrm{End}(\mathbf{C}^2)$, on a $\mathrm{Sp}(u) = \{i, -i\}$ puisque les droites $\mathbf{C}(e_1 + ie_2)$ et $\mathbf{C}(e_1 - ie_2)$ sont u-stables.

♠

En fait le spectre d'un endomorphisme n'est pas tout à fait ce qui est donné par la définition précédente, mais les deux notions sont identiques en dimension finie, ce qui est le cadre du programme.

Le spectre, en tout généralité, désigne l'ensemble des valeurs spectrales, i.e. des scalaires λ tels que $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif.

Proposition 7 - 1

Stabilité du noyau et de l'iamge – Caractérisation des homothéties

On a

1. $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par u.
2. u est scalaire si et seulement si tous les sous-espaces vectoriels de E sont u-stables. Autrement dit : $(u \in \mathbf{K}\mathrm{Id}) \Leftrightarrow (\forall F \subset E\,, u(F) \subset F)$.

Démonstration. Soit x dans $\mathrm{Ker}(u)$, on a $u(x) = 0$ et donc $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$. Donc $\mathrm{Ker}(u)$ est stable.

Soit y dans $\mathrm{Im}(u)$. Par définition on a $u(y) \in \mathrm{Im}(u)$. Donc $\mathrm{Im}(u)$ est stable.

Enfin pour la seconde assertion, le sens direct est immédiat. Pour la réciproque, en particulier toute droite est stable et donc, pour tout x dans E, on dispose de λ_x dans $\mathbf{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Soit alors x et y deux vecteurs non nuls de E, si $\mathbf{K}x = \mathbf{K}y$, alors $\lambda_x = \lambda_y$ puisque cette valeur commune est le scalaire λ tel que $u_{|\mathbf{K}x}^{|\mathbf{K}x} = \lambda \mathrm{Id}_{\mathbf{K}x}$. Sinon (x, y) est libre et on dispose de λ tel que $u(x+y) = \lambda(x+y)$. Par linéarité de u, il vient $\lambda_x x + \lambda_y y = \lambda x + \lambda y$ et par indépendance de (x, y), il s'ensuit $\lambda_x = \lambda_y = \lambda$. Il en résulte, puisque $u(0) = 0 = \lambda 0$ pour tout scalaire λ, que u est scalaire. □

On peut affiner le résultat précédent.

Proposition 7 - 2

Espaces stables et commutant

Soit λ un scalaire ; alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par u.

Plus précisément, soit v dans $\mathrm{End}(E)$. Alors

1. Si $[u, v] = 0$, alors $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.
2. Si $[u, v] = 0$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par v.
3. Si F est stable à la fois par u et par v, alors il est stable par $v \circ u$.

De plus, si $\lambda \in \mathbf{K}^*$, alors $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(u)$.

Démonstration. Comme $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ commute à u, l'assertion sur u résulte de celles sur u et v. Soit donc v tel que $[u, v] = 0$ et x dans E. On a $v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$ de sorte que $\mathrm{Im}(u)$ est v-stable. Si de plus $u(x) = 0$, alors $v(x) \in \mathrm{Ker}(u)$ et donc $\mathrm{Ker}(u)$ est v-stable. La seconde assertion résulte de la première puisque si $[u, v] = 0$, alors $[u - \lambda \mathrm{Id}_E, v] = 0$. La troisième assertion est directe : $v \circ u(F) \subset v(F) \subset F$ puisque $u(F) \subset F$. Enfin, si $\lambda \in \mathbf{K}^*$ et $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$, on a $x = \dfrac{1}{\lambda} u(x)$ et donc $x \in \mathrm{Im}(u)$.
□

Exemple 7 - 3

Rang 1

Si u est de rang 1, il a une valeur propre non nulle si et seulement si $u^2 \neq 0$. En effet si λ est une valeur propre non nulle, on a $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \subset \mathrm{Im}(u)$ et donc, par dimension, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}(u)$. Autrement dit $u_{|\,\mathrm{Im}(u)} = \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(u)}$ et donc $u^2 = \lambda u \neq 0$.

En fait pour x dans E on a $u(x) = \varphi(x)v$ pour une certaine forme linéaire φ et un certain v dans E (tous deux non nuls). Par conséquent $u^2 = \varphi(v)u$ et on a $u^2 \neq 0 \iff \varphi(v) \neq 0$ et cette dernière propriété est équivalente au fait que v soit vecteur propre (ce qu'il est toujours) pour une valeur propre non nulle. Dans ce cas les vecteurs propres associés à une valeur propre non nulle sont les vecteurs non nuls de $\mathbf{K}v$.

Notation

Produit tensoriel ♠

Si u est un endomorphisme donné par $u(x) = \varphi(x)v$ avec $v \in E$ et $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$, on note $u = \varphi \otimes v$ (lire « φ tenseur v »). Si φ ou v est nul, alors u aussi. Sinon $\mathrm{Im}(u) = \mathbf{K}v$ et $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Réciproquement si v' est dans $\mathrm{Im}(u)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi') = \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors il existe un scalaire λ tel que $u = \lambda\varphi' \otimes v'$. On a également les propriétés suivantes $\lambda(\varphi \otimes v) = (\lambda\varphi) \otimes v = \varphi \otimes (\lambda v)$, et ces relations sont celles qui définissent la notation $\otimes$ (lire « produit tensoriel »). Pour les vérifier il suffit d'écrire que ces trois endomorphismes, appliqués à un même vecteur x, donnent le même résultat, à savoir $\lambda\varphi(x)v$.

Afin de trouver une expression matricielle simple, on se ramène à une base adaptée aux sous-espaces stables de u.

Proposition 7 - 3

Base adaptée à un sous-espace stable

On suppose E de dimension finie et $E = F \oplus G$. Soit $\mathrm{Id}_E = p_F + p_G$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ des décompositions de l'unité en somme de projecteurs et d'une base de E en bases de F et G, adaptées à cette somme directe. Alors F est u-stable si et seulement si la matrice de u relativement à $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$.

Dans ce cas, on a $\det(u) = \det(u_{|F}^{|F}) \det((p_G \circ u)_{|G}^{|G})$.

Démonstration. C'est la traduction matricielle de $p_G \circ u \circ p_F = 0$ et la traduction de la propriété matricielle des matrices triangulaire par blocs au niveau des endomorphismes. □

Remarque 7 - 4

La propriété du déterminant par blocs peut se démontrer par récurrence (en développant par rapport à la première colonne) ou en considérant la formule algébrique et en constatant que les permutations qui ne stabilisent pas les $\dim(F)$ premiers indices contribuent à un terme nul dans la formule. On peut aussi raisonner plus algébriquement en utilisant le pivot de Gauss.

Exercice

Démontrer la formule du déterminant par blocs en utilisant la définition du déterminant des endomorphismes.

cc by nc sa

Proposition 7 - 4

Base adaptée : décomposition stable et drapeau stable
On suppose E de dimension finie. Soit $E = \oplus_{i\in I} E_i$ une décomposition en somme directe et $\mathcal{B} = \cup_{i\in I}\mathcal{B}_i$ une base adaptée. Alors on a :

1. « pour tout i dans I, E_i est u-stable » si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est diagonale par blocs, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$.
2. si $I = [\![1;p]\!]$, alors : « pour tout i dans I, $\oplus_{j\leq i} E_j$ est u-stable » si et seulement si la matrice de u dans $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} * & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}$.

De plus, en notant u_i l'endomorphisme induit sur E_i par u et la décomposition en somme directe, i.e. $u_i = (p_{E_i} \circ u)_{|E_i}^{|E_i}$, alors dans les deux cas envisagés précédemment on a $\det(u) = \prod_{i\in I} \det(u_i)$.

Démonstration. Il s'agit de simples traductions de la stabilité des espaces considérés. L'assertion sur le déterminant s'obtient par une récurrence immédiate à partir de la proposition précédente. □

Exemples 7 - 4

1. Si $u = \Delta$ et E l'ensemble des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, deux cas se présentent. Si $a^2 + 4b = 0$,
$$E = \mathbf{K}(\left(\frac{a}{2}\right)^n) \oplus \mathbf{K}((n\left(\frac{a}{2}\right)^{n-1})$$
et relativement à la base $((a/2)^n), (n(a/2)^{n-1}))$ la matrice de Δ est $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}a & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}a \end{pmatrix}$. Sinon $E = \mathbf{C}(\alpha^n) \oplus \mathbf{C}(\beta^n)$, avec $\alpha + \beta = a$ et $\alpha\beta = -b$, et la matrice complexe associée est $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.
2. Si $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$ et on a $E = \mathbf{K}e_1 \oplus \mathbf{K}e_2$. Le seul sous-espace propre de E est $\mathbf{K}e_1$.
3. Si u est nilpotent avec $\dim(E) = 2$, i.e. $u^2 = 0$, alors soit u est nul, soit on dispose de x non nul tel que $u(x) \neq 0$. Dans ce cas $(x, u(x))$ est une famille libre car, pour λ et μ deux scalaires tels que $\lambda x + \mu u(x) = 0$, on a (par application de u à cette identité) $\lambda u(x) = 0$ et donc $\lambda = 0$, puis $\mu u(x) = 0$ donc $\mu = 0$. Dans la base $(u(x), x)$, à u est associée la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Si $E = \mathbf{R}_n[X]$ et u est définie par $u(P)$ est le reste de la division euclidienne de P par $(X-1)^2$, alors dans la base $(1, X-1, \cdots, (X-1)^n)$, u est diagonale avec deux 1 suivis de $n-2$ zéros.

Pour aller plus loin

La notion importante dégagée par la seconde propriété, i.e. la décomposition de E en somme directe $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$ avec, pour tout i dans $[\![1;p]\!]$, $\oplus_{j=1}^{i} E_j$ stable, permet donc de calculer un déterminant mais elle est en fait plus profonde. On parle de drapeau adapté à u quand on a affaire à une telle configuration.

L'étude des u_i revient alors à l'étude de u sur chacun des E_i à peu de choses près. Ce peu de choses est un quotient ! En fait u_i est l'endomorphisme induit par u sur $(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_i) \,/\, (E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_{i-1})$ et cet espace est isomorphe à E_i.

Proposition 7 - 5

Cardinal du spectre

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E.

1. Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille (finie) de scalaires distincts deux à deux, alors la famille $(\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_F))_{i\in I}$ est en somme directe, i.e. l'application de $\prod_{i\in I} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_F)$ dans F donnée par $(x_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} x_i$ est injective.
2. Si E est de dimension finie, alors le cardinal de $\mathrm{Sp}(u)$ est majoré par la dimension de E, i.e. $|\mathrm{Sp}(u)| \leq \dim(E)$.

Démonstration. Le premier point a déjà été vu (proposition 4 - 1).

La dimension d'une somme directe étant la somme des dimensions de ses constituants, et pour λ dans $\mathrm{Sp}(u)$, la dimension de $\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ étant supérieure à 1, il vient $|\mathrm{Sp}(u)| \leq \dim(E)$. $\square$

3 Expression matricielle

Toute matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ peut être interprétée comme un élément de $\mathrm{End}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$ ou encore de $\mathrm{End}(\mathbf{K}^n)$. On lui associe alors, comme précédemment, valeurs propres, vecteurs propres et spectre. Néanmoins il est naturel de s'intéresser à l'ambiguïté soulevée par ces interprétations et donc à la stabilité des notions par isomorphisme.

On commence par quelques rappels relatifs au calcul matriciel.

Définition 7 - 3

Matrice de passage

Soit (e) et (e) deux bases d'un même espace de dimension finie E. On appelle matrice de passage de (e) à (e') la matrice de l'identité relativement aux bases (e') et (e) dans cet ordre. On note

$$P_{(e)}^{(e')} = \mathrm{Mat}_{(e'),(e)}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{(e)}^{(e')}(\mathrm{Id}_E)$$

et donc cette matrice correspond aux coordonnées des vecteurs de (e') dans la base (e), i.e.

$$P_{(e)}^{(e')} = (e_i^*(e'_j))_{1\leq i,j\leq n} \,.$$

La matrice de passage $P_{(e)}^{(e')}$ est inversible d'inverse $P_{(e')}^{(e)}$. Réciproquement toute matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de changement de base, à savoir de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ à la base donnée par ses vecteurs colonnes.

Les matrices de passages constituent donc l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ des matrices inversibles de taille n. En particulier elles forment un groupe multiplicatif.

Propriété 7 - 2

Changement de base

Soit x dans E et u dans $\mathrm{End}(E)$. On note X et X' les matrices associées à x relativement aux bases (e) et (e') respectivement, i.e. $X = (e_i^*(x))_{1\leq i\leq n}$ et $X = (e_i'^*(x))_{1\leq i\leq n}$, $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ et $P = P_{(e)}^{(e')}$. Alors on a

$$X = PX' \qquad A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad AX = PA'X' \ .$$

Propriété 7 - 3

Rang – Équivalence

On note J_r ou $I_{r,n}$ la matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, diagonale, dont les r premiers termes de la diagonale valent 1 et les autres sont nuls. C'est une matrice de rang r et toute matrice de r lui est équivalente, i.e.

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad \mathrm{rg}(A) = r \Longleftrightarrow \exists (P,Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2 \ A = PJ_rQ \ .$$

Le rang d'une matrice A est également le plus grand entier r pour lequel il existe une matrice extraite de A de taille r et inversible.

Propriété 7 - 4

Invariants – Similitude

Deux matrices A et B sont dite semblables si elles représentent le même endomorphisme relativement à des bases éventuellement différentes, i.e. s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Le rang, la trace et le déterminant sont invariants dans une classe de similitude. En particulier si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le rang, la trace et le déterminant de la matrice représentant u ne dépend pas de la base choisie. On les note $\mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{Tr}(u)$ et $\det(u)$.

Propriété 7 - 5

Trace

La trace est linéaire, commutative et invariante par similitude, i.e. $A \mapsto \mathrm{Tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$ et si de plus B est inversible $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}\left(B^{-1}AB\right)$.

Exemple 7 - 5

Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Remarque 7 - 5

On note indifféremment $\mathrm{tr}(A)$ ou $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A.

Propriété 7 - 6

Déterminant

Le déterminant est multiplicatif et est en particulier un morphisme de groupes entre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^*$. Le déterminant est donc commutatif et invariant par similitude.

Exemple 7 - 6

Matrice diagonale

Une matrice diagonale, notée $\mathrm{diag}(a_i)$, est la matrice dont tous les termes non diagonaux sont nuls et dont le terme d'indice (i,i) est a_i. Soit D cette matrice. On a

$$\mathrm{Tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} a_i\,, \quad \det(D) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

et D est inversible si et seulement tous les a_i sont non nuls. Dans ce cas on a $D^{-1} = \mathrm{diag}(a_i^{-1})$.

Plus généralement un produit de matrices diagonales l'est et on a $\mathrm{diag}(a_i)\mathrm{diag}(b_i) = \mathrm{diag}(a_i b_i)$.

Exemple 7 - 7

Matrice triangulaire

Un matrice T dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous ses termes d'indice (i,j) avec $i > j$ (resp. $i < j$) sont nuls. Le déterminant d'une telle matrice est le produit de ses éléments diagonaux et elle est donc inversible si et seulement si ceux-ci sont non nuls. Dans ce cas son inverse est une matrice triangulaire de même type et dont la diagonale est obtenue en inversant les termes diagonaux de T.

Plus généralement un produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les termes diagonaux sont obtenus par produit des termes diagonaux terme à terme.

Exemple 7 - 8

Blocs

Si (I_k) est une partition de $[\![1;n]\!]$, en général telle que les ensembles I_k soient formés de n_k entiers consécutifs, une décomposition d'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ par blocs est la donnée des matrices $A_{k,\ell}$ dans $\mathscr{M}_{n_k,n_\ell}(\mathbf{K})$ avec $A_{k,\ell} = (a_{ij})_{(i,j)\in I_k\times I_\ell}$.

Une matrice est dite diagonale (resp. triangulaire) par blocs si les matrices $A_{k,\ell}$ sont nulles si $k \neq \ell$ (resp. $k > \ell$ pour triangulaire supérieure, $k < \ell$ pour triangulaire inférieure).

On peut effectuer le produit par blocs. Ainsi si A et B sont décomposées en blocs, alors AB, noté C, l'est aussi est on a $C_{k,\ell} = \sum_m A_{k,m}B_{m,\ell}$.

En particulier une matrice diagonale (resp. triangulaire) par blocs est inversible si et seulement tous ses blocs diagonaux le sont. Dans ce cas son inverse admet des blocs diagonaux égaux aux inverses des blocs correspondant. Par ailleurs le déterminant d'une telle matrice est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Définition 7 - 4

Transposition

Si A est dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ avec $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$, sa transposée notée ${}^{\mathrm{t}}A$ ou A^T est la matrice donnée par

$$A^T = (a_{ij})_{(j,i)\in[\![1;q]\!]\times[\![1;p]\!]} \quad \text{i.e.} \quad E^*_{ji}(A^T) = E^*_{ij}(A)\,.$$

cc by nc sa

Propriété 7 - 7

Transposition

La transposition est une application linéaire, commutant à l'inverse et c'est un antimorphisme linéaire, i.e. si A et B sont dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ alors

$$(A^T)^T = A \qquad (AB)^T = B^T A^T \quad \text{et si } A \text{ est inversible } (A^{-1})^T = (A^T)^{-1} .$$

Enfin la transposition préserve le rang. En particulier le rang d'une matrice est le même qu'on la considère comme formée de vecteurs colonnes ou de vecteurs lignes.

Soit φ un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et un autre $\mathbf{K}$-espace vectoriel, disons E'. À tout u dans $\mathrm{End}(E)$, on associe u' dans $\mathrm{End}(E')$ défini par $u' = \varphi \circ u \circ \varphi^{-1}$ ou encore $u' \circ \varphi = \varphi \circ u$. Il en résulte que pour F et F' des sous-espaces de E et E' respectivement, on a F est u-stable si et seulement si $\varphi(F)$ est u'-stable et F' est u'-stable si et seulement si $\varphi^{-1}(F')$ est u-stable. Autrement dit φ induit un isomorphisme entre sous-espaces stables pour u et u'. En particulier il en va ainsi pour les droites propres.

Soit maintenant λ dans $\mathbf{K}$, on a $u' - \lambda \mathrm{Id}_{E'} = \varphi \circ (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ \varphi^{-1}$ et, par bijectivité de φ, $\mathrm{Ker}(u' - \lambda \mathrm{Id}_{E'}) = \varphi\left(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)\right)$. Il en résulte que les valeurs propres de u et de u' sont les mêmes et que leurs vecteurs et espaces propres se correspondent par φ :

— $\mathrm{Sp}(u') = \mathrm{Sp}(u)$;

— $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\mathrm{Ker}(u' - \lambda \mathrm{Id}_{E'}) \simeq \left(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)\right)$;

— en particulier, si ces deux espaces sont de dimension finie (par exemple si E l'est), alors ils sont de même dimension ;

— pour tout vecteur x non nul dans E, x est vecteur propre pour u si et seulement si $\varphi(x)$ est vecteur propre pour u', et dans ce cas leurs valeurs propres associées sont les mêmes.

On en déduit que quelque soit l'interprétation de la matrice qu'on se donne, les notions étudiées précédemment se correspondent par isomorphisme. Il est ainsi non ambigü de se donner comme définitions, pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$:

Définition 7 - 5

Éléments propres dans le cas matriciel

— X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est vecteur propre pour A s'il est non-nul et s'il existe λ dans $\mathbf{K}$ tel que $AX = \lambda X$. On dit alors que λ est la valeur propre (pour A) associée à X.

— λ dans $\mathbf{K}$ est valeur propre pour A s'il existe un X comme précédemment, ou encore si $A - \lambda I_n$ est non-inversible, i.e. $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

— le spectre de A, noté $\mathrm{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A

$$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbf{K} \,|\, \det(A - \lambda I_n) = 0\} \ .$$

— pour λ dans $\mathrm{Sp}(A)$, l'espace propre pour A associé à λ est $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, i.e. l'ensemble des X dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ tels que $AX = \lambda X$.

Il résulte de l'étude précédente qu'en dimension finie on peut préciser la correspondance entre endomorphismes et matrices :

Proposition 7 - 6

Spectre et vecteurs propres

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, avec $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ les formes coordonnées associées, et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. On a

1. $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$;
2. si λ est dans $\mathrm{Sp}(u)$, alors x est vecteur propre pour u associé à la valeur propre λ si et seulement si ${}^{\mathrm{t}}(e_i^*(x))_{1 \leq i \leq n}$ est vecteur propre pour A associé à la valeur propre λ.

En fait le résultat plus général peut se spécialiser aux matrices

Proposition 7 - 7

Spectre et conjugaison

Soit P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On a

1. $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(PAP^{-1})$;
2. pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Ker}(PAP^{-1} - \lambda I_n) = P.\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$;
3. en particulier, pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(A)$, $\mathrm{Ker}(PAP^{-1} - \lambda I_n) \simeq \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ et leurs dimensions sont égales.

4 Diagonalisabilité

Dans cette section E est supposé de dimension finie et on note $\dim(E) = n$.

Les matrices les plus simples, puisqu'elles ne sont finalement que l'extension la plus simple des règles de calculs sur le corps de base $\mathbf{K}$, sont les matrices diagonales. Il est donc naturel de chercher des bases dans lesquelles u est diagonale.

Définition 7 - 6

Diagonalisabilité

On dit que u est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale, i.e. s'il existe une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour u. On parle alors de base propre.

Notation

Pour λ dans $\mathrm{Sp}(u)$, on note $E_{\lambda,u} = E_\lambda = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 7 - 8

Premier critère de diagonalisabilité – Dimension des espaces propres

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$ ou encore

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) = \dim(E) \ .$$

Autrement dit u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de sous-espaces u-stables sur lesquels u induit une homothétie. On a alors

$$u = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \lambda p_{E_\lambda}$$

où p_{E_λ} est le projecteur sur E_λ parallèlement à la somme directe des autres sous-espaces propres.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que la somme $\oplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)$ est directe d'après la proposition 4 - 1 et donc qu'on a toujours

$$\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim\left(\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)\right) \leq \dim(E)\,,$$

avec égalité si et seulement si $E = \oplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)$.

Si u est diagonalisable, on dispose d'une base $\mathcal{B}$ de E formée de vecteurs propres pour u et donc $E = \oplus_{x\in\mathcal{B}}\mathbf{K}x$. Or tout tel x appartient à un espace propre, donc $\mathbf{K}x$ aussi et ainsi $E \subset \oplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)$, d'où le résultat.

Réciproquement soit $\mathcal{B}$ une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \oplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)$ ou plus généralement à une décomposition en somme directe de sous-espaces u-stables sur lesquels u induit une homothétie. Alors $\mathcal{B}$ est une base propre.

La dernière assertion est une reformulation de la décomposition en somme directe $E = \oplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)$. □

Proposition 7 - 9

Condition suffisante de diagonalisabilité

Si u possède n valeurs propres distinctes, i.e. si $|\mathrm{Sp}(u)| = \dim(E)$, alors u est diagonalisable.

Démonstration. On a en effet $E \supset \oplus_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)$ avec égalité si et seulement si $\displaystyle\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} \dim\left(\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)\right) \geq \dim(E)$. Comme, par définition, pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(u)$, $\dim\left(\mathrm{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E)\right) \geq 1$, la condition précédente est automatiquement vérifiée si $|\mathrm{Sp}(u)| = \dim(E)$. □

D'après les considérations précédentes sur la stabilité des notions par isomorphisme et particulièrement la dimension des sous-espaces propres, on a

Propriété 7 - 8

Diagonalisabilité - cas matriciel

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si sa matrice relativement à une base $\mathcal{B}$ **quelconque** de E est **diagonalisable**.

Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale, i.e. s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Remarque 7 - 6

Diagonalisabilité et classe de conjugaison

Autrement dit une matrice est diagonalisable si et seulement si sa classe de conjugaison (par automorphisme intérieur) contient une matrice diagonale et donc deux matrices semblables sont simultanément diagonalisables ou non.

Définition 7 - 7

Polynôme caractéristique

L'expression $\det(\lambda\mathrm{Id}_E - u)$ est polynomiale en λ. Le polynôme associé dans $\mathbf{K}[X]$ est appelé polynôme caractéristique de u. On le note χ_u, de sorte qu'on peut écrire $\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u) \in \mathbf{K}[X]$.

Propriétés 7 - 9

Propriétés du polynôme caractéristique

1. χ_u est de degré n et est unitaire ;
2. λ est valeur propre de u si et seulement s'il est racine de χ_u ;
3. si $\mathcal{B}$ est une base quelconque de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, alors $\chi_u = \chi_A$;
4. en particulier si A et B sont deux matrices semblables, $\chi_A = \chi_B$;
5. $\chi_u = X^n - \mathrm{Tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.

Démonstration. La première propriété se démontre directement par récurrence ou plus simplement en utilisant l'expression algébrique du déterminant comme somme, signée, de produits de termes de la matrice. L'unique produit de degré maximal étant celui obtenu par la permutation identique.

On a déjà vu que λ est valeur propre de u si et seulement si $\det(u - \lambda \mathrm{Id}_E) = 0$, ce qui se reformule en $\chi_u(\lambda) = 0$.

Le déterminant est indépendant du choix de base et la matrice de $\lambda \mathrm{Id}_E - u$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\lambda \mathrm{Id}_E - A$, d'où les deux propriétés suivantes.

On a $\chi_A(0) = \det(-A)$ et donc le terme constant de χ_u est $(-1)^n \det(u)$. Enfin pour obtenir un terme en X^{n-1} grâce à l'expression algébrique du déterminant, en posant $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$,

$$\chi_u = \chi_A = \det(X\mathrm{Id}_E - A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} (X\delta_{i,\sigma(i)} - a_{i\sigma(i)})$$

on doit avoir $\sigma(i) = i$ pour au moins $n-1$ entiers i, i.e. σ doit avoir au moins $n-1$ points fixes. C'est donc nécessairement l'identité et donc le terme de degré $n-1$ de χ_u est aussi celui de $\prod_{i=1}^{n}(X - a_{ii})$, i.e. $-\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. □

Exemple 7 - 9

Si $n = 2$, on a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et alors $\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$, i.e. $\chi_A = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det(A)$. On en déduit que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable, de valeurs propres 0 et 2, puisque les racines de χ_A sont de somme $1+1$ et de produit $1 \times 1 - 1 \times 1$.

Exercice

Avec les notations de l'exemple précédent, montrer que le discriminant de χ_A est $(a-d)^2 + 4bc$. En déduire que A est diagonalisable sur $\mathbf{R}$ dès que b et c sont de même signe et donc en particulier lorsqu'ils sont égaux.

Montrer que la plupart des matrices 2×2 sur $\mathbf{C}$ sont diagonalisables.

Définition 7 - 8

Multiplicité des valeurs propres

Soit λ dans $\mathrm{Sp}(u)$, on appelle multiplicité de la valeur propre λ, sa multiplicité en tant que racine de χ_u. On la note $m_{\lambda,u}$ ou encore m_λ et on a donc $1 \leq m_\lambda \leq n$.

Proposition 7 - 10

Trace et déterminant

Si χ_u est scindé, alors

$$\operatorname{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda \lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \lambda^{m_\lambda} = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i\,,$$

en comptant les valeurs propres avec leurs multiplicités.

Démonstration. Si χ_u est scindé, on a $\chi_u = \prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda} = \prod_{i=1}^{n}(X-\lambda_i)$. □

Proposition 7 - 11

Sous-espaces stables et polynôme caractéristique

Soit F une sous-espace vectoriel de E. Si F est u-stable, alors $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$.

Si E est somme directe $E = \oplus_{i \in I} E_i$ de sous-espaces u-stables, alors $\chi_u = \prod_{i \in I} \chi_{u_{|E_i}}$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F. D'après la proposition 7 - 3, la matrice de u est alors triangulaire par blocs et donc celle de $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ aussi, et on a $\chi_u = \chi_{u_{|F}} P$ où P est le polynôme obtenu comme déterminant du bloc inférieur droit de la matrice de $\lambda \operatorname{Id}_E - u$.

La seconde assertion résulte de la proposition 7 - 4. □

Propriétés 7 - 10

Multiplicité et dimension des espaces propres

1. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si F est u-stable, alors $m_{\lambda, u_{|F}} \leq m_{\lambda,u}$.
2. Pour λ dans $\operatorname{Sp}(u)$, on a $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$. **L'égalité est fausse en général !**
3. Pour λ dans $\operatorname{Sp}(u)$, si $m_\lambda = 1$, alors $\dim(E_\lambda) = 1$.

Démonstration. Puisque $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$, la première propriété est directe.

La seconde en résulte en prenant $F = E_\lambda$, ce qui est licite puisque E_λ est u-stable, en remarquant $\chi_{u_{|E_\lambda}} = \chi_{\lambda \operatorname{Id}_{E_\lambda}} = (X-\lambda)^{\dim(E_\lambda)}$.

La dernière résulte de $1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$. □

On peut donc conclure l'étude.

Théorème 7 - 1

Deuxième critère de diagonalisabilité – Polynôme caractéristique

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$ et, pour tout λ dans $\operatorname{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

En particulier si χ_u est simplement scindé, u est diagonalisable.

Démonstration. Par définition et puisque χ_u est de degré $\dim(E)$, on a

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim(E_\lambda) \leq \sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} m_\lambda \leq \dim(E)$$

avec égalité si et seulement si, pour la seconde inégalité, χ_u est scindé sur $\mathbf{K}$ et, pour la première inégalité, pour tout λ dans $\operatorname{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda$.

cc-by-nc-sa

Si χ_u est simplement scindé, il est scindé et, pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(u)$, $\dim(E_\lambda) = m_\lambda = 1$. Il en résulte que u est diagonalisable. $\square$

Danger

Si u est la matrice de la rotation correspondant au quart de tour, i.e $u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $\chi_u = X^2 + 1$. Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \emptyset$ et u n'est pas diagonalisable. Par contre si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, χ_u est simplement scindé et u est diagonalisable.

Exemple 7 - 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. On a $\chi_A = X^3 - X^2 - 2X$ et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 0, 2\}$. Comme χ_A est simplement scindé, A est diagonalisable.

Remarque 7 - 7

Diagonalisabilité et commutant

Si v commute à u, alors v stabilise E_λ pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(u)$. En particulier si u est diagonalisable, relativement à une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \oplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda$, la matrice de v est diagonale par blocs. Par conséquent si χ_u est simplement scindé, la matrice de v est alors diagonale. La réciproque est directe.

Autrement dit le commutant d'une matrice diagonale dont tous les éléments diagonaux sont distincts deux à deux est exactement l'ensemble des matrices diagonales. Il est donc de dimension n.

Ce n'est pas le cas en général : la dimension du commutant est souvent plus grande. Par exemple si u est l'identité, son commutant est $\mathrm{End}(E)$.

5 Polynômes minimal et caractéristique

On réinterprète les considérations précédentes en termes d'arithmétique des polynômes, i.e. à la lumière du polynôme minimal π_u.

Propriétés 7 - 11

Algèbre $\mathbf{K}[u]$

1. L'algèbre $\mathbf{K}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}(E)$. En particulier pour P et Q dans $\mathbf{K}[X]$, on a $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
2. Pour tout scalaire λ, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est stable par tout élément de $\mathbf{K}[u]$.
3. Pour tous polynômes P et Q dans $\mathbf{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont $Q(u)$-stables.

Démonstration. Le premier point a déjà été vu, les deux autres en résultent puisque tout élément de $\mathbf{K}[u]$ commute à u et, plus généralement, à tout élément de $\mathbf{K}[u]$. $\square$

Remarques 7 - 8

Spectre et polynôme d'endomorphisme

Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ et P est dans $\mathbf{K}[X]$, alors $P(\lambda) \in \mathrm{Sp}(P(u))$.

En effet, on a $u_{|E_\lambda} = \lambda \mathrm{Id}_{E_\lambda}$ et donc $P(u)_{|E_\lambda} = P(u_{|E_\lambda}) = P(\lambda)\mathrm{Id}_{E_\lambda}$.

En particulier si P est un polynôme annulateur de u et λ une valeur propre, alors $P(\lambda) = 0$, i.e. toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur. Autrement dit si P est un polynôme annulateur de u, les valeurs propres de u font partie des racines de P. **Attention !** La réciproque est fausse en général. Par exemple $X^2 + X$ annule la matrice nulle mais -1 n'en est pas valeur propre.

Théorème 7 - 2

Spectre et polynôme minimal – Inversibilité de $P(u)$

Si E est de dimension finie, le spectre de u est exactement l'ensemble des racines de π_u, i.e.

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbf{K} \mid \pi_u(\lambda) = 0\} .$$

Par ailleurs pour P dans $\mathbf{K}[X]$, $P(u)$ est inversible si et seulement si P est premier à π_u.

Démonstration. En effet on a déjà vu que toute valeur propre est racine de tout polynôme annulateur, et donc en particulier de π_u. Soit maintenant λ une racine de π_u, de sorte qu'on dispose de P dans $\mathbf{K}[X]$ tel que $\pi_u = (X - \lambda)P$ et donc aussi $0 = (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ P(u)$. Si λ n'était pas valeur propre de u, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ serait bijective, donc inversible, et on aurait $P(u) = 0$, ce qui serait contradictoire avec la minimalité de π_u.

Pour la seconde propriété si P est premier à π_u on dispose d'une relation de Bézout, i.e. de A et B dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $AP + B\pi_u = 1$ et donc $A(u)P(u) = \mathrm{Id}_E$ puisque $\pi_u(u) = 0$. Il en résulte que $P(u)$ est bijectif, d'inverse $A(u)$. Réciproquement si $R = P \wedge \pi_u$, comme $R \mid P$, on dispose de Q dans $\mathbf{K}[X]$ tel que $P = QR$ et donc $P(u) = Q(u) \circ R(u)$. Comme $P(u)$ est bijectif donc injectif, $R(u)$ est injectif et donc bijectif. Soit alors T dans $\mathbf{K}[X]$ tel que $\pi_u = TR$. Puisque $R(u)$ est bijectif et $\pi_u(u) = 0$, on a $T(u) = 0$. Par minimalité, $\deg(T) = \deg(\pi_u)$, donc $R \in \mathbf{K}[X]^\times$, i.e. P et π_u sont premiers entre eux. □

La recherche du polynôme minimal n'est pas toujours facile. Le théorème de Cayley-Hamilton permet de le chercher parmi les diviseurs du polynôme caractéristique.

Théorème 7 - 3

Cayley-Hamilton – Georg Frobenius (1878)

Si E est de dimension finie, le polynôme caractéristique est un polynôme annulateur, i.e. $\chi_u(u) = 0$ ou encore $\pi_u \mid \chi_u$. En particulier, pour toute matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on a $\chi_A(A) = 0$.

Remarque 7 - 9

Ce n'est pas surprenant puisque $\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)$ et donc on peut s'attendre à ce qu'on ait $\chi_u(u) = \det(u \circ \mathrm{Id}_E - u) = \det(0) = 0$. Mais c'est loin d'être une évidence puisque le déterminant définissant χ_u est calculé dans $\mathrm{End}(E)$, c'est-à-dire dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et on aimerait que la même formule soit valable dans $\mathscr{M}_n(\mathrm{End}(E))$ ce qui est difficile, ne serait-ce que pour définir l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathrm{End}(E))$!

Démonstration non exigible. Néanmoins, même si une démonstration peut être conduite selon les lignes précédentes, on peut l'adapter « vecteur par vecteur ». Pour montrer $\chi_u(u) = 0$, il suffit de montrer $\chi_u(u)(x) = 0$ pour tout vecteur x de E.

Soit x dans E et e_x l'évaluation en x, i.e. $e_x \in \mathscr{L}(\mathrm{End}(E), E)$ et $e_x(v) = v(x)$. On note $\varphi_{u,x} = e_x \circ \varphi_u$ et $F = \mathrm{Im}(\varphi_{u,x})$, i.e. $F = \mathrm{Vect}\left(u^k(x)\right)_{k\in\mathbf{N}}$ ou encore $F = \mathbf{K}[u](x) = \{v(x) \,|\, v \in \mathbf{K}[u]\}$.

Comme $\mathbf{K}[X]$ est stable par multiplication par X, F est u-stable : si $P \in \mathbf{K}[X]$, $u \circ P(u) = (XP)(u)$ et $u\left(\varphi_{u,x}(P)\right) = \varphi_{u,x}(XP) \in F$.

Il en résulte $\chi_{u_{|F}} \mid \chi_u$, i.e. on dispose de P dans $\mathbf{K}[X]$ tel que $\chi_u = P\chi_{u_{|F}}$, d'où $\chi_u(u) = P(u) \circ \chi_{u_{|F}}(u)$ et donc il suffit de montrer $\chi_{u_{|F}}(u_{|F})(x) = 0$.

Il en résulte également $\mathrm{Ker}(\varphi_{u_{|F}}) = \mathrm{Ker}(\varphi_{u,x})$ et donc $\pi_{u_{|F}}$ est le générateur unitaire de $\mathrm{Ker}(\varphi_{u,x})$. Donc, d'après le théorème du rang et en notant p le degré de $\pi_{u_{|F}}$, on a

$$F = \mathrm{Im}(\varphi_{u,x}) \simeq \mathbf{K}_{p-1}[X]\,,$$

l'isomorphisme étant induit par $\varphi_{u,x}$. Il en résulte que F est de dimension p et qu'une base en est donnée par $(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$. En notant $\pi_{u_{|F}} = X^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$, avec $(a_k)_{0\leq k\leq p-1} \in \mathbf{K}^p$. La matrice de $u_{|F}$ dans la base $(x, u(x), \cdots, u^{p-1}(x))$ est la compagnon

$$\begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ & & 1 & -a_{p-1} \end{pmatrix}$$

et il en résulte $\chi_{u_{|F}} = \pi_{u_{|F}}$. On en déduit $\chi_{u_{|F}}(u_{|F}) = 0$ et le théorème de Cayley-Hamilton s'ensuit. □

Remarque 7 - 10

Bien qu'attribué à Arthur Cayley et Sir William Rowan Hamilton, ce théorème n'a jamais été démontré par Cayley (il l'a par contre beaucoup utilisé) et ne l'a été qu'en dimension 2 par Hamilton.

Pour comprendre plus en détail l'endomorphisme u, il convient d'isoler chacune de ses racines. Pour cela on dispose du très important

Théorème 7 - 4

Théorème de décomposition des noyaux

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie de polynômes dans $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Alors $\mathrm{Ker}(\varphi_u(\prod_{i\in I} P_i)) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(\varphi_u(P_i))$, i.e.

$$\mathrm{Ker}\left(\prod_{i\in I} P_i(u)\right) = \oplus_{i\in I} \mathrm{Ker}(P_i(u))\,.$$

Démonstration. Afin de dégager les idées, étudions le cas d'une famille de deux polynômes, i.e. on se donne P et Q deux polynômes premiers entre eux. On dispose alors de (A, B) un couple de polynômes dans $\mathbf{K}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$, par relation de Bézout. En prenant l'image par φ_u, il vient, pour tout vecteur x de E,

$$x = A(u)\left(P(u)(x)\right) + B(u)\left(Q(u)(x)\right)$$

et par conséquent

$$P(u)(x) = Q(u)(x) = 0 \Longrightarrow x = 0\,,$$

CC BY NC SA

i.e. $\text{Ker}(P(u))$ et $\text{Ker}(Q(u))$ sont en somme directe. Par ailleurs $P \mid PQ$ et donc $\text{Ker}(P(u)) \subset \text{Ker}(PQ(u))$ et, de même, $\text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}(PQ(u))$, donc

$$\text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u)) \subset \text{Ker}(PQ(u))\ .$$

Réciproquement si, pour x dans E, $PQ(u)(x) = 0$, alors

$$Q(u)\,(AP(u)(x)) = A(u)\,(PQ(u)(x)) = 0\,,$$

et donc $A(u)\,(P(u)(x)) \in \text{Ker}(Q(u))$. Il vient de même $B(u)\,(Q(u)(x)) \in \text{Ker}(P(u))$. L'écriture $x = A(u)\,(P(u)(x)) + B(u)\,(Q(u)(x))$ permet alors de conclure

$$\text{Ker}(PQ(u)) \subset \text{Ker}(P(u)) \oplus \text{Ker}(Q(u))$$

et le résultat en découle. Une récurrence pourrait permettre de généraliser, mais on va plutôt adapter les idées afin de mieux comprendre les phénomènes.

Soit donc $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie de polynômes dans $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux. Notons alors $P = \prod_{i\in I} P_i$ et $Q_i = \prod_{j\neq i} P_j$, de sorte que $P_iQ_i = P$. En particulier $P_i \mid P$ et donc $\text{Ker}(P_i(u)) \subset \text{Ker}(P(u))$ et

$$\sum_{i\in I} \text{Ker}(P_i(u)) \subset \text{Ker}(P(u))\ .$$

Comme la famille $(Q_i)_{i\in I}$ est une famille de polynômes premiers entre eux dans leur ensemble on dispose, d'après le théorème de Bézout, de $(R_i)_{i\in I}$, d'une famille de polynômes dans $\mathbf{K}[X]$ telle que $\sum_{i\in I} R_iQ_i = 1$. Pour x dans E, il vient

$$x = \sum_{i\in I} R_i(u)\,(Q_i(u)(x))\ .$$

Or, pour x dans $\text{Ker}(P(u))$, on a $P_i(u)(R_iQ_i(u)(x)) = 0$ et donc l'écriture précédente montre

$$\sum_{i\in I} \text{Ker}(P_i(u)) = \text{Ker}(P(u))\ .$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Soit x dans $\text{Ker}(P(u))$ et $(x_i)_{i\in I}$ une famille dans $(\text{Ker}(P_i(u))_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} x_i$. Par application de $Q_i(u)$, il vient $Q_i(u)(x) = Q_i(u)(x_i)$ puisque, pour $j \neq i$, $P_j \mid Q_i$ et $x_j \in \text{Ker}(P_j(u))$. De plus, l'identité générale pour x dans E appliquée à x_i donne

$$x_i = \sum_{j\in I} R_j(u)\,(Q_j(u)(x_i)) = R_i(u)\,(Q_i(u)(x_i))$$

et donc $x_i = R_iQ_i(u)(x)$. Ceci prouve l'unicité de la décomposition et donc que la somme est directe. □

Pour aller plus loin

La démonstration donne même bien plus puisqu'on peut en déduire une expression du projecteur sur chacun des composants de la somme directe : sur $\text{Ker}(P(u))$, le projecteur sur $\text{Ker}(P_i(u))$ parallèlement à $\oplus_{j\neq i}\text{Ker}(P_j(u))$ est un polynôme en u, à savoir $R_iQ_i(u)$:

$$p_{\text{Ker}(P_i(u))}^{\oplus_{j\neq i}\text{Ker}(P_j(u))} = (R_iQ_i)(u)\ .$$

Corollaire 7 - 1

Décomposition en somme directe de noyaux

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille finie de polynômes dans $\mathbf{K}[X]$ premiers entre eux deux à deux et telle que $\prod_{i\in I} P_i$ soit un polynôme annulateur de u. Alors

$$E = \oplus_{i\in I} \operatorname{Ker}(P_i(u))$$

et cette décomposition est une décomposition en somme directe de sous-espaces u-stables.

On a bien ramené l'étude de u à des sous-espaces sur lesquels u admet comme polynôme annulateur un polynôme primaire, i.e. une puissance d'un polynôme irréductible.

Théorème 7 - 5

Troisième critère de diagonalisabilité – Polynôme minimal

Si E est de dimension finie, alors l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur simplement scindé (non nul), ou encore si et seulement si π_u est simplement scindé.

Démonstration. L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si E est somme directe des $\operatorname{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$, i.e. $E = \oplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} \operatorname{Ker}((X-\lambda)(u))$, ou encore, d'après le théorème de décomposition des noyaux et la finitude de $\mathrm{Sp}(u)$, en notant $P = \prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$: $E = \operatorname{Ker}(P(u))$. D'où le caractère nécessaire puisque P est un polynôme simplement scindé.

La réciproque résulte du corollaire précédent. Enfin comme π_u divise tout polynôme annulateur de u et que tout diviseur d'un polynôme simplement scindé l'est aussi, l'existence d'un polynôme annulateur simplement scindé équivaut à ce que le polynôme minimal le soit. □

On en déduit deux propriétés importantes

Propriétés 7 - 12

Diagonalisabilité d'une restriction et diagonalisation simultanée

On suppose E de dimension finie.

1. Si u est diagonalisable et F est u-stable, alors $u_{|F}$ est diagonalisable.
2. (♠) Si u et v sont diagonalisables et **commutent**, alors u et v sont simultanément diagonalisables, i.e. il existe une base propre à la fois pour u et pour v.

Démonstration. Comme, pour tout polynôme P, on a $P(u_{|F}) = P(u)_{|F}$, si u admet un polynôme annulateur simplement scindé, alors il en va de même pour $u_{|F}$.

Si u est diagonalisable, alors E est somme de ses sous-espaces propres. Si v commute à u, il stabilise ses sous-espaces propres. Si, de plus, v est diagonalisable alors, d'après ce qui précède, la restriction de v aux sous-espaces propres de u est diagonalisable. Autrement dit chaque sous-espace propre pour u est somme directe d'espaces sur lesquels v agit comme une homothétie :

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\,, \quad E_\lambda = \operatorname{Ker}(u - \lambda\mathrm{Id}_E) = \oplus_{\mu\in\mathrm{Sp}(v_{|E_\lambda})} \operatorname{Ker}(v_{|E_\lambda} - \mu \mathrm{Id}_{E_\lambda})$$

et donc, puisque $\mathrm{Sp}(v_{|E_\lambda}) \subset \mathrm{Sp}(v)$

$$E = \bigoplus_{(\lambda,\mu)\in\mathrm{Sp}(u)\times\mathrm{Sp}(v)} \operatorname{Ker}(u-\lambda\mathrm{Id}_E) \cap \operatorname{Ker}(v - \mu\mathrm{Id}_E)$$

(cc) BY NC SA

et cette décomposition est une décomposition en somme directe d'espaces sur lesquels u et v agissent comme des homothéties. D'où l'existence d'une base propre à la fois pour u et pour v. □

Exemple 7 - 11

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, alors χ_A est simplement scindé à racines égales à 1, 2 et 3, donc A est diagonalisable et semblable à $\operatorname{diag}(1, 2, 3)$.

Exemple 7 - 12

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors χ_A est scindé égal à $X^2(X-3)$, donc A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Ker}(A)$ est de dimension 2. Comme $\operatorname{Ker}(A)$ est le plan d'équation $x+y+z=0$, c'est le cas et A est semblable à $\operatorname{diag}(0, 0, 3)$.

6 Trigonalisation

Dans cette section E est supposé de dimension finie.

Définition 7 - 9

Trigonalisabilité

On dit que l'endomorphisme u est trigonalisable (ou triangularisable) s'il existe une base de E relativement à laquelle u admet une matrice triangulaire.

Autrement dit u est trigonalisable si et seulement s'il existe un drapeau maximal u-stable.

Définition 7 - 10

Nilpotence

On dit que l'endomorphisme u est nilpotent s'il existe k dans $\mathbf{N}$ tel que u^k soit nul.

Théorème 7 - 6

Critère de trigonalisation

L'endomorphisme u est trigonalisable si et seulement si χ_u est scindé ou encore si et seulement si π_u est scindé.

Démonstration. Si u est trigonalisable, on dispose d'une base de trigonalisation et donc la matrice de u relativement à cette base est triangulaire. Il en résulte que le polynôme caractéristique de u est scindé.

Réciproquement si u est annulé par un polynôme scindé P non nul, d'après le théorème de décomposition des noyaux, on a alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \operatorname{Ker}\left((u - \lambda \operatorname{Id}_E)^{n_\lambda}\right)$$

où n_λ est la multiplicité de λ dans P. Comme on a affaire à une décomposition en sous-espaces stables, il suffit donc de montrer que la restriction de u à ces sous-espaces stables est trigonalisable. Autrement dit on peut supposer que u est annulé par $(X-\lambda)^k$. Enfin la matrice de $u-\lambda\mathrm{Id}_E$ est triangulaire si et seulement si celle de u l'est et donc on peut supposer $\lambda=0$, i.e. u est nilpotent d'indice k (on dit aussi que son polynôme minimal est X^k).

On considère alors la suite croissante de sous-espaces

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u^k) = E\ .$$

Cette suite est formée de sous-espaces u-stables et constitue donc le drapeau cherché. Dit autrement on choisit une base de E en procédant ainsi : on se donne une base de $\mathrm{Ker}(u)$, puis on la complète en une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$, puis on la complète en une base de $\mathrm{Ker}(u^3)$ etc. jusqu'à obtenir une base de $\mathrm{Ker}(u^k)$, i.e. de E. Comme $u(\mathrm{Ker}(u^2)) \subset \mathrm{Ker}(u)$ et, plus généralement, pour tout entier naturel p, $u(\mathrm{Ker}(u^{p+1})) \subset \mathrm{Ker}(u^p)$, la matrice de u dans cette base est triangulaire par blocs.

Enfin si u est annulé par un polynôme scindé P non nul, comme $\pi_u \mid P$, π_u est scindé. □

Remarque 7 - 11

Suite croissante des noyaux

La suite

$$\{0\} \subset \mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \mathrm{Ker}(u^k) = E$$

est en fait strictement croissante puisque si, pour un entier naturel p, on a $\mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1})$, alors $\mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \mathrm{Ker}(u^{p+2})$.

Il résulte du théorème fondamental de l'algèbre :

Corollaire 7 - 2

Trigonalisation sur $\mathbf{C}$

Si E est un $\mathbf{C}$-espace de dimension finie, alors tout endomorphisme u est trigonalisable.

Théorème 7 - 7

Trigonalisation simultanée (♠)

Si u et v **commutent** et sont trigonalisables, alors u et v sont simultanément trigonalisables, i.e. il existe une base commune de trigonalisation.

Démonstration. Si u est trigonalisable, en particulier il a un espace propre. Cet espace propre est stable par v puisque v commute à u et stabilise donc ses espaces propres. La restriction de v à ce sous-espace propre étant trigonalisable, puisque v l'est, v y admet un vecteur propre x, qui est donc un vecteur propre commun à u et v. Soit alors H un supplémentaire de $\mathbf{K}x$ et u' et v' les bi-restrictions de u et v à H, i.e. $u' = p_H \circ u_{|H}$ et $v' = p_H \circ v_{|H}$ en notant p_H le projecteur sur H parallèlement à $\mathbf{K}x$.

Par construction, pour y dans H, $u(y)-u'(y)$ appartient à $\mathbf{K}x$ et donc, puisque x est vecteur propre pour v, il en va de même pour $v\circ u(y) - v\circ u'(y)$. Comme $u'(y)$ appartient à H, de même $v(u'(y))-v'(u'(y))$ appartient à $\mathbf{K}x$, et donc $v\circ u(y)-v'\circ u'(y)$ appartient aussi à $\mathbf{K}x$, en tant que somme de deux de ses éléments. Par symétrie, il en va de même pour $u\circ v(y) - u'\circ v'(y)$. Puisque u et v commutent, on en déduit que $u'\circ v'(y) - v'\circ u'(y)$ appartient à $\mathbf{K}x$. Comme c'est un élément de H, il en résulte qu'il est nul, i.e. $[u',v'] = 0$.

De plus les polynômes caractéristiques de u' et v' divisent respectivement ceux de u et v, ils sont donc scindés. On en déduit que u' et v' sont trigonalisables et commutent entre eux et on peut alors conclure par récurrence sur la dimension de E. □

La caractérisation des endomorphismes trigonalisables donne également la propriété suivante

Propriété 7 - 13

Endomorphismes nilpotents
L'endomorphisme u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = X^{\dim(E)}$ ou encore $u^{\dim(E)} = 0$ ou encore sa matrice est semblable à une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Démonstration. On note $n = \dim(E)$.

Si u est nilpotent, il est annulé par une puissance de X et donc π_u est une puissance de X. Comme $\pi_u \mid \chi_u$, $\deg(\pi_u) \leq \deg(\chi_u) = n$ et donc $u^n = 0$.

Si $u^n = 0$, alors u est annulé par un polynôme scindé, donc est trigonalisable avec uniquement 0 comme valeur propre et s'exprime donc dans une certaine base par une matrice triangulaire supérieure à diagonale nulle.

Si la matrice A de u dans une certaine base est triangulaire supérieure à diagonale nulle, son polynôme caractéristique est X^n puisque $XI_n - A$ est alors triangulaire supérieure.

Enfin si $\chi_u = X^n$ alors, puisque χ_u est un polynôme annulateur, u est nilpotent. □

7 Formes réduites

7 1 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

Comme $\mathrm{Tr}(A) = 2$ et $\det(A) = 1$, on a $\chi_A = (X-1)^2$. Il en résulte que A est trigonalisable. La recherche d'un vecteur propre pour la valeur propre 1 donne $e_1 + e_2$ et on peut donc prendre $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ par exemple, de sorte que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut même affiner pour obtenir une forme « normale ». Pour cela il suffit de multiplier par -3 le premier vecteur de base, i.e. de poser $Q = P\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. On a alors $Q^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\boxed{Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$

7 2 $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-4} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \end{pmatrix}$

Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{Tr}(A) = 0$, on a $\chi_A = X^3$. Il en résulte que A est trigonalisable et semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ puisqu'elle est de rang 1 (donc le noyau est de dimension 2).

Plus précisément le noyau admet pour équation $x-2y-3z=0$ et on peut par exemple prendre $P=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$ et il suffit donc de calculer la matrice correspondante dans la base représentée par P pour obtenir $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On pourrait obtenir une forme « normale », à savoir $\boxed{\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}}$ en prenant comme second vecteur un vecteur hors du noyau, comme premier vecteur son image par u et enfin comme troisième vecteur un vecteur du noyau indépendant du premier, par exemple $Q=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$.

7 3 $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&-3&4\end{pmatrix}}$

Puisque A est triangulaire par blocs, on obtient χ_A par produit : $\chi_A=(X-1)(X^2-3X+2)$, i.e. $\chi_A=(X-1)^2(X-2)$. Puisque $A-I_3$ est de rang 2, $\mathrm{Ker}(A-I_3)$ est de dimension 1 et donc A n'est pas diagonalisable. Elle est donc semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}1&*&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. On écrit $A-I_3$ et on constate que e_2+e_3 a pour image $2e_1$ par $A-I_3$, donc e_2+e_3 est dans $\mathrm{Ker}((A-I_3)^2)$. On choisit donc $P=\begin{pmatrix}1&0&5\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$ et il vient $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. La forme « normale », à savoir $\boxed{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}}$ est obtenue avec $Q=\begin{pmatrix}2&0&5\\0&1&2\\0&1&3\end{pmatrix}$.

7 4 $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&0&2\\1&2&0\end{pmatrix}}$

Comme $\mathrm{Tr}(A)=3$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{com}(A))=-1-4-1=-6$ et $\det(A)=2-2\times(6-1)=-8$, on a $\chi_A=X^3-3X^2-6X+8$, puisque le terme de degré 1 s'obtient en faisant la somme des mineurs principaux. Comme 1 est racine évidente, on factorise et il vient $\mathrm{Sp}(A)=$

$\{1,4,-2\}$. Pour trouver les vecteurs propres, on utilise le théorème de décomposition des noyaux. On calcule par exemple $u=(A+2I_3)e_1$ et $v=(A-I_3)u$, à savoir $u=(5,1,1)$ et $v=(12,6,6)$, et on a $v\in \mathrm{Ker}(A-4I_3)$, ce qui permet d'obtenir $(2,1,1)$ comme vecteur propre associé à 4. On trouve de même $(-1,1,1)$ associé à 1. En fait $(A-4I_3)e_1$ est déjà dans $\mathrm{Ker}(A-I_3)$ et on ne peut utiliser e_1 pour trouver un vecteur propre associé à -2. On prend donc e_2 et on trouve $u=(A-I_3)e_2=(1,-1,2)$ et $(A-4I_3)u=(0,9,-9)$, donc $(0,1,-1)$ est associé à -2. On prend $P=\begin{pmatrix}-1&0&5\\1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ et il vient $\boxed{P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}}$.

7 5 $\boldsymbol{A=\begin{pmatrix}-2&-1&2\\-15&-6&11\\-14&-6&11\end{pmatrix}}$

On a $\chi_A=\begin{vmatrix}X+2&1&-2\\15&X+6&-11\\14&6&X-11\end{vmatrix}$ et donc, après calculs, $\chi_A=(X-1)^3$. D'où $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$.

On a $A-I_3=\begin{pmatrix}-3&-1&2\\-15&-7&11\\-14&-6&10\end{pmatrix}$ et donc, puisque $\begin{vmatrix}-3&-1\\-15&-7\end{vmatrix}=21-15=6\neq 0$, $A-I_3$ est de rang 2. De plus $\mathrm{Ker}(A-I_3)$ est engendré par $e_1+e_2+2e_3$. On calcule alors

$$(A-I_3)^2=\begin{pmatrix}-4&-2&3\\-4&-2&3\\-8&-4&6\end{pmatrix}$$

et donc $\mathrm{Ker}((A-I_3)^2)$ est le plan d'équation $-4x-2y+3z=0$. Tout vecteur u hors de ce plan sera tel que $(u,(A-I_3)u,(A-I_3)^2u)$ est libre. On choisit $u=e_2-e_3$, de sorte que $(A-I_3)^2u=e_1+e_2+2e_3$. On a alors $Au=e_1+5e_2+5e_3=u+e_1+4e_2+4e_3$ et on pose $v=e_1+4e_2+4e_3$, de sorte que $Au=u+v$. On a enfin $Av=2e_1+5e_2+6e_3=v+e_1+e_2+2e_3$ et on pose $w=e_1+e_2+2e_3$, de sorte que $Av=v+w$ et $Aw=w$. On choisit donc $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&4&1\\2&4&-1\end{pmatrix}$ et il vient $\boxed{P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}}$.

🅭🅯🄏🄎

8 Exemples et applications

8 1 Endomorphismes de rang 1

Si u est de rang 1, on peut l'écrire $\varphi \otimes v$ avec $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$ et $v \in E$ tous deux non nuls, i.e. $u(x) = \varphi(x)v$. En prenant une base de E contenant une base de $\operatorname{Ker}(\varphi)$, il vient $\chi_u = X^{n-1}(X - \operatorname{Tr}(u))$. En prenant v comme premier vecteur de base et en complétant, on obtient $\operatorname{Tr}(u) = \varphi(v)$. Comme $\operatorname{Sp}(u) = \{0, \varphi(v)\}$ et $\dim(\operatorname{Ker}(u)) = n-1$, u est diagonalisable si et seulement si $\varphi(v) \neq 0$ ou encore si seulement si $E = \operatorname{Im}(u) \oplus \operatorname{Ker}(u)$. Dans ce cas une base de diagonalisation est donnée par une base de $\operatorname{Ker}(u)$ et v. Sinon u est trigonalisable (nilpotente d'indice 2) et semblable par exemple à $E_{2,1}$. Remarquons également qu'on a $\pi_u = X(X - \operatorname{Tr}(u))$.

8 2 Suites homographiques

On s'intéresse aux suites homographiques, i.e. vérifiant une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} = \frac{\alpha u_n + \beta}{\gamma u_n + \delta}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbf{C}^4$. On se restreint tout d'abord au cas où la suite ne prend jamais de valeur telle que $\gamma u_n + \delta = 0$.

On note, pour $x \in \mathbf{C}$, D_x la droite engendrée par $xe_1 + e_2$. Comme, pour n dans $\mathbf{N}$, $(u_{n+1}, 1)$ est proportionnel à $(\alpha u_n + \beta, \gamma u_n + \delta)$, on a $D_{u_{n+1}} = AD_{u_n}$ en notant A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$.

Supposons maintenant que A soit diagonalisable. On se donne P telle que $PAP^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda, \mu)$ avec $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a alors $D_{P(u_{n+1})} = P(D_{u_{n+1}}) = PAP^{-1}P(D_{u_n}) = \operatorname{diag}(\lambda, \mu) D_{P(u_n)}$. Autrement dit, si on pose $x_n = au_n + b$ et $y_n = cu_n + d$, alors $\mathbf{C}(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{C}(\lambda x_n, \mu y_n)$. En supposant encore une fois que tout est bien défini, il vient, en posant $t_n = x_n/y_n$, $t_{n+1} = \dfrac{\lambda}{\mu} t_n$ et on peut donc en déduire le comportement de (t_n).

Par exemple si $|\lambda| < |\mu|$, alors (t_n) tend vers 0. On en déduit que (x_n) tend vers 0 et donc (u_n) tend vers $-b/a$ (car a ne saurait être nul).

Si A n'est pas diagonalisable, P peut-être choisie de sorte que PAP^{-1} soit égale à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec λ dans $\mathbf{C}$. La suite (t_n) est alors arithmétique de raison $\dfrac{1}{\lambda}$.

Pour traiter tous les cas, il faut être plus soigneux et étudier la nullité de certaines expressions. Le point le plus important est de noter que $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ admet une fonction réciproque si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et alors sa fonction réciproque est aussi homographique : la première est définie de $\mathbf{C} \setminus \{-d/c\}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{a/c\}$, du moins si $c \neq 0$ car dans ce dernier cas on a affaire à des applications affines bijectives.

Programme

L'étude des suites homographiques n'est pas un attendu du programme, mais elle n'est pas *stricto sensu* hors-programme. De facto ces suites apparaissent souvent en problème ou en exercice, à l'écrit comme à l'oral.

8 3 Réduction, somme de projecteurs et polynômes de Lagrange

Soit $(x_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbf{K}^{n+1}$ une famille de scalaires tous distincts. On introduit l'application linéaire u de $\mathbf{K}[X]$ dans $\mathbf{K}^{n+1}$ donnée par l'évaluation simultanée en les x_k, i.e. $u(P) = (P(x_k))_{0\leq k\leq n}$. Par définition d'un produit cartésien

$$\mathrm{Ker}(u) = \bigcap_{k=0}^{n} \mathrm{Ker}(p_k \circ u) .$$

Or $\mathrm{Ker}(p_k \circ u) = (X - x_k)\mathbf{K}[X]$ et donc, puisque les polynômes $X - x_k$ sont premiers entre eux, $\mathrm{Ker}(u) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X - x_k)\mathbf{K}[X]$.

Exemple 7 - 13

Polynômes interpolateurs de Lagrange

Il en résulte que $\mathbf{K}_n[X]$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ et donc que $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension $n+1$, comme $\mathbf{K}_n[X]$. C'est donc que u est surjective. Les polynômes interpolateurs de Lagrange sont, par définition, les images réciproques de la base canonique de $\mathbf{K}^{n+1}$, i.e. c'est la famille $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ donnée par $L_k(x_j) = \delta_{jk}$. De façon plus concrète, on a

$$L_k = \frac{\prod_{j\neq k}(X - x_j)}{\prod_{j\neq k}(x_k - x_j)} .$$

Si u est diagonalisable, on peut l'écrire sous la forme $u = \displaystyle\sum_i \lambda_i\pi_i$ où (π_i) est une famille de projecteurs. De plus on a $u^k = \displaystyle\sum_i \lambda_i^k\pi_i$ pour k dans $\mathbf{N}$.

Réciproquement si on a une écriture de la forme $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i\pi_i$ telle que, pour tout k dans $[\![0;p]\!]$, $u^k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i^k\pi_i$, alors u est diagonalisable et les (π_i) sont les projecteurs sur les espaces propres. En effet sous les hypothèses précédentes, $P(u) = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} P(\lambda_i)\pi_i$, pour P polynôme de degré inférieur à p. En particulier pour $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{p}(X - \lambda_i)$, on a $P(u) = 0$ et donc u est diagonalisable puisque P est un polynôme simplement scindé annulateur de u.

Soit (L_i) les polynômes de Lagrange tels que $L_i(\lambda_j) = \delta_{ij}$. On a donc $\pi_i = L_i(u)$. Comme $L_i^2(\lambda_j) = L_i(\lambda_j)$, il vient $\pi_i^2 = \pi_i$ et comme $L_iL_j(\lambda_k) = 0$ si $i \neq j$, il vient $\pi_i\pi_j = 0$ si $i \neq j$. Enfin puisque $\sum_j L_j(\lambda_i) = 1$, on a $\sum_j \pi_j = \mathrm{Id}$ et (π_i) est donc une famille de projecteurs telle que $E = \oplus_i \mathrm{Im}(\pi_i)$.

Enfin comme $L_j \times (X - \lambda_j)(u) = 0$, $\mathrm{Im}(\pi_j) \subset \mathrm{Ker}(u - \lambda_j\mathrm{Id})$. Comme $E = \oplus_i \mathrm{Im}(\pi_i) = \oplus_i \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{Id})$, il vient $\mathrm{Im}(\pi_i) = \mathrm{Ker}(u - \lambda_i\mathrm{Id})$ et π_i est le projecteur sur E_{λ_i} parallèlement à $\oplus_{j\neq i}E_{\lambda_j}$.

8 4 Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Soit α et β deux complexes distincts et $P = \mathrm{Ker}(d^2 - (\alpha+\beta)d + \alpha\beta\mathrm{Id})$. Une base de P en est $(\gamma_\alpha, \gamma_\beta)$, i.e. les exponentielles d'exposant α et β.

CC BY NC SA

Remarque 7 - 12

Dans la base de P choisie, l'opérateur d admet pour matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$. En particulier $d - \alpha \mathrm{Id}_P$ a donc pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta - \alpha \end{pmatrix}$ et ainsi $\dfrac{1}{\beta - \alpha}(d - \alpha \mathrm{Id}_P)$ est le projecteur sur la droite engendrée par γ_α. Ceci n'est pas sans rapport avec le polynôme de LAGRANGE : si $Q = \dfrac{X - \alpha}{\beta - \alpha}$, alors $Q(\alpha) = 0$ et $Q(\beta) = 1$, i.e. Q est un des deux polynômes naturellement associés à (α, β). De plus $Q(d)$ est le projecteur précédent :

— puisque α est racine de Q, $X - \alpha$ divise Q et donc

$$\mathrm{Ker}(d - \alpha \mathrm{Id}_P) \subset \mathrm{Ker}(Q(d)) \ ;$$

— Q^2 et Q coïncident sur (α, β) et donc $(X - \alpha)(X - \beta)$ divise $Q^2 - Q$, de sorte que $(Q^2 - Q)(d)$ s'annule sur P, i.e. $Q^2_{|P} = Q_{|P}$;

— enfin $1 - Q$ s'annule en β et donc $\mathrm{Ker}(d - \beta \mathrm{Id}_P) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_P - Q(d))$, ce qui revient à $\mathrm{Ker}(d - \beta \mathrm{Id}_P) \subset \mathrm{Im}(Q(d))$ puisqu'on a affaire à un projecteur.

Puisque P est de dimension 2 et que γ_α et γ_β engendrent chacun une droite, on a

$$\mathrm{Ker}(d - \beta \mathrm{Id}_P) = \mathrm{Im}(Q(d)) = \mathrm{Im}(d - \alpha \mathrm{Id}_P) \ .$$

On peut utiliser cette remarque pour résoudre le problème oscillatoire suivant :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = E \sin(\alpha t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \ . \end{cases}$$

On suppose $\alpha \neq \omega$ et on recherche donc y tel que $y'' + \omega^2 y$ est solution de $x'' + \alpha^2 x = 0$ et ainsi y est solution de $y^{(4)} + (\alpha^2 + \omega^2)y'' + \alpha^2\omega^2 y = 0$. L'espace des solutions de cette équation d'ordre 4 est engendré par $\gamma_{i\alpha}$, $\gamma_{-i\alpha}$, $\gamma_{i\omega}$ et $\gamma_{-i\omega}$ et y est donc de la forme

$$y = a\gamma_{i\alpha} + b\gamma_{-i\alpha} + c\gamma_{i\omega} + d\gamma_{-i\omega} \ .$$

On s'intéresse au polynôme de LAGRANGE $\dfrac{(X^2 + \omega^2)(X + i\alpha)}{(\omega^2 - \alpha^2)2i\alpha}$, noté $Q_{i\alpha}$. On calcule $u(y)$ avec $u = Q_{i\alpha}$ et il vient $u(y) = a\gamma_{i\alpha}$ par définition de y et Q, mais aussi $u(y) = \dfrac{1}{2i\alpha(\omega^2 - \alpha^2)} E\alpha\gamma_{i\alpha}$ en partant de $y'' + \omega^2 y = E\sin(\alpha t)$. Par conséquent $a = \dfrac{E}{2i(\omega^2 - \alpha^2)}$. De même on a $b = \dfrac{E}{-2i(\omega^2 - \alpha^2)}$ et on a trouvé la solution particulière $\dfrac{E\sin(\alpha t)}{\omega^2 - \alpha^2}$. Pour calculer c, on peut bien sûr résoudre un système mais on peut aussi calculer $z(0)$ avec $z = v(y)$, $v = Q(d)$ et $Q = Q_{i\omega} = \dfrac{(X^2 + \alpha^2)(X + i\omega)}{(\alpha^2 - \omega^2)2i\omega}$. Comme on a

$$Q = \frac{(X^2 + \omega^2)(X + i\omega)}{(\alpha^2 - \omega^2)2i\omega} + \frac{(X + i\omega)}{2i\omega}$$

il vient, puisque $y'' + \omega^2 y = E\sin(\alpha t)$,

$$z = \frac{E(\alpha\cos(\alpha t) + i\omega\sin(\alpha t))}{(\alpha^2-\omega^2)2i\omega} + \frac{(y' + i\omega y)}{2i\omega}$$

et donc

$$c = \frac{E\alpha}{(\alpha^2-\omega^2)2i\omega} + \frac{1}{2i\omega} = \frac{E\alpha + \alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2-\omega^2)2i\omega}$$

et de même $d = -c$, de sorte que la solution recherchée est donnée par

$$y(t) = \frac{E\alpha + \alpha^2 - \omega^2}{(\alpha^2-\omega^2)\omega}\sin(\omega t) + \frac{E}{\omega^2-\alpha^2}\sin(\alpha t)$$

comme on peut le vérifier en évaluant en 0 la fonction et sa dérivée.

9 Compléments

9 1 Codimension

Définition 7 - 11

On dit qu'un sous-espace de E est de codimension finie s'il admet un supplémentaire de dimension finie.

Puisque les supplémentaires d'un même sous-espace sont isomorphes, on en déduit

Propriété 7 - 14

Si F est de codimension finie dans E, alors la dimension de ses supplémentaires ne dépend pas du choix de ce supplémentaire. On l'appelle la codimension de F et on la note $\operatorname{codim}(F)$.

Si F est à la fois de dimension finie et de codimension finie ou bien (ce qui revient au même) si E est de dimension finie, on a

$$\dim(E) = \dim(F) + \operatorname{codim}(F)\ .$$

Définition 7 - 12

Soit u dans $\mathscr{L}(E,F)$. Si F est de dimension finie (ou plus généralement si $\operatorname{Im}(u)$ l'est), on dit que u est de rang fini et on définit son rang par $\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$.

Dans ce cas $\operatorname{Ker}(u)$ est de codimension finie et

$$\operatorname{codim}(\operatorname{Ker}(u)) = \dim(\operatorname{Im}(u)) = \operatorname{rg}(u)\ .$$

Un espace de codimension 1 est appelé hyperplan de E. Une équation d'un hyperplan H est la donnée d'une équation $\varphi(x) = 0$ avec $H = \operatorname{Ker}(\varphi)$.

Proposition 7 - 12

Soit u dans $\mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. Alors u est de rang fini et on a

$$\operatorname{rg}(u) + \dim(\operatorname{Ker}(u)) = \dim(E)\ .$$

9 2 Dualité

Dans ce paragraphe E est de dimension finie.

Définition 7 - 13

On appelle dual de E l'espace vectoriel noté E^* et donné par $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbf{K})$. Pour φ dans E^* et x dans E on note indifféremment $\varphi(x)$ ou $\langle \varphi \,|\, x \rangle$.

Définition 7 - 14

Soit $\mathcal{B}$ une base de E, avec $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$, alors on note $(e_i^*)_{i \in I}$ la famille définie par

$$\forall x \in E\,, x = \sum_{i \in I} e_i^*(x) e_i\,,$$

i.e. les e_i^* sont les formes coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$. Alors $(e_i^*)_{i \in I}$ est une base de E^*, notée $\mathcal{B}^*$ et appelée base duale de la base $\mathcal{B}$. L'application $x \mapsto (e_i^*(x))_{i \in I}$ est la bijection réciproque de l'isomorphisme de $\mathbf{K}^I$ sur E donné par la base $\mathcal{B}$.

Les éléments de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ satisfont aux relations d'orthogonalité de KRONECKER, à savoir : $\langle e_i^* \,|\, e_j \rangle = \delta_{ij}$.

On en déduit directement

Théorème 7 - 8

Les espaces E et E^* sont isomorphes et ont donc même dimension.

Danger

Cette assertion n'est vraie qu'en dimension finie : en dimension infinie les espaces E et E^* ne sont jamais isomorphes.

Remarque 7 - 13

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}^*$ sont deux bases duales. Pour x dans E et φ dans E^*, on a $\langle \varphi \,|\, x \rangle = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}(\varphi)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

Proposition 7 - 13

Pour tout vecteur non nul de E, il existe (au moins) une forme linéaire sur E qui prend la valeur 1 sur ce vecteur.

Démonstration. On peut par exemple compléter ce vecteur en une base de E grâce au théorème de la base incomplète et prendre pour forme linéaire la forme coordonnée associée. □

Exemple 7 - 14

Soit $E = \mathbf{K}_n[X]$ et $\mathcal{B} = ((X-a)^k)_{0 \leq k \leq n}$, alors $\mathcal{B}^* = (e_k)_{0 \leq k \leq n}$ avec, pour P dans $\mathbf{K}_n[X]$, $e_k(P) = \dfrac{P^{(k)}(a)}{k!}$.

Proposition 7 - 14

Toute base de E^* est la base duale d'une unique base de E appelée base anté-duale ou pré-duale de la base considérée.

Démonstration. Soit $(\varphi_k)_{1 \leq k \leq n}$ une base de E^*, alors on a $E \simeq \mathbf{K}^n$ via l'isomorphisme $x \mapsto (\varphi_k(x))_{1 \leq k \leq n}$. En effet l'application considérée est bien linéaire et son noyau est formé des vecteurs dont l'image par tous les φ_k est nulle, donc son image par E^* est nulle et en particulier par des formes coordonnées (dans une base quelconque de E), i.e. cette application est injective. Par égalité des dimensions entre E et E^* et puisque cette dimension est finie, il en résulte qu'on a bien affaire à un isomorphisme.

La base anté-duale cherchée est l'image réciproque de la base canonique de $\mathbf{K}^n$. $\square$

Théorème 7 - 9

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension p de E, avec E de dimension n. L'ensemble F^0 des formes linéaires s'annulant sur F, i.e. $F^0 = \{\varphi \in E^* \,|\, F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)\}$, est un sous-espace vectoriel de E^* de dimension $n - p$.

Réciproquement si G est un sous-espace vectoriel de dimension p de E^*, alors F défini par

$$F = \bigcap_{g \in G} \mathrm{Ker}(g)$$

est de dimension $n - p$. De plus, pour φ dans E^*, $F \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ si et seulement si $\varphi \in G$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E adaptée à F et $\mathcal{B}^*$ sa base duale. Alors

$$F^0 = \mathrm{Vect}\,(e_i^*)_{e_i \notin F} \ .$$

En effet si $e_i \notin F$, alors pour e_j dans F, on a $e_i^*(e_j) = 0$ et donc $F \subset \mathrm{Ker}(e_i^*)$. Réciproquement si φ est dans E^* et $\varphi = \sum_i \lambda_i e_i^*$ pour des scalaires (λ_i), alors $\varphi(e_j) = \lambda_j$ de sorte que $\mathrm{Ker}(F) \subset \varphi$ impose $\lambda_j = 0$ dès que $e_j \in F$, d'où l'inclusion réciproque.

Soit $\mathcal{B}^*$ une base de E^* adaptée à G et $\mathcal{B}$ sa base anté-duale. On a alors $F = \bigcap_{e_i^* \in G} \mathrm{Ker}(e_i^*)$ et donc $F = \mathrm{Vect}\,(e_j)_{e_j^* \notin G}$ par un raisonnement similaire à ce qui précède.
$\square$

Pour aller plus loin

On peut introduire le bi-dual $(E^*)^*$ de E, i.e. le dual de E^*. Par égalité des dimensions on a $E \simeq (E^*)^*$, mais ce qui est plus fort, c'est que cet isomorphisme est canonique, i.e. ne dépend pas d'un choix de base : si x est dans E, on peut le voir comme l'élément $\varphi \mapsto \langle \varphi \,|\, x \rangle$ de $(E^*)^*$. Cette application est l'isomorphisme canonique cherché.

Dans cet isomorphisme une base $\mathcal{B}$ s'envoie sur une bae $(\mathcal{B}^*)^*$ de $(E^*)^*$ qui se trouve être la base duale de $\mathcal{B}^*$. Autrement dit la base anté-duale de $\mathcal{B}^*$ est aussi sa base duale en identifiant E et $(E^*)^*$.

9 3 Réductions de Dunford et Jordan

On peut préciser la remarque 7 - 11. Si $\chi_u = \prod_i (X - \lambda_i)^{\alpha_i}$, on note $E_{u,\lambda_i,\alpha_i} = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{\alpha_i})$, appelé sous-espace caractéristique. On a alors

$$E = \bigoplus_i E_{u,\lambda_i,\alpha_i} \ .$$

Plus précisément si $\pi_u = \prod_i (X - \lambda_i)^{m_i}$, on a

$$E_{u,\lambda_i,\alpha_i} = \mathrm{Ker}((u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)^{m_i}) \quad \text{et} \quad \dim(E_{u,\lambda_i,\alpha_i}) = \alpha_i \ .$$

En fait $u - \lambda_i \mathrm{Id}$ est nilpotent quand on le restreint à E_{u,λ_i,α_i} et un automorphisme quand on le restreint à E_{u,λ_j,α_j}, pour $j \neq i$.

On définit alors d comme égal à $\lambda_i \mathrm{Id}$ sur chacun des E_{u,λ_i,α_i} et $n = u - d$. Alors n est nilpotent, d est diagonalisable et $[d, n] = 0$. L'écriture $u = d + n$ avec les conditions précédentes est appelée réduction de DUNFORD. Cette écriture est unique.

On peut également remarquer que d et n sont des polynômes en u : si on note $P_i = (X - \lambda_i)^{m_i}$ et $Q_i = \prod_{j \neq i} P_j$, alors les (Q_i) sont premiers entre eux dans leur ensemble et on peut écrire une relation de BÉZOUT, à savoir $\sum_i U_i Q_i = 1$. Alors on peut montrer que le projecteur sur E_{u,λ_i,α_i} est égal à $U_i Q_i(u)$ et est donc un polynôme en u. Il en va alors de même pour d qui est une combinaison linéaire de ces projecteurs et de n qui est $u - d$.

La réduction de JORDAN consiste à donner une forme « normale » à la matrice de n, essentiellement composée de 0 sauf avec des 1 sur la sur-diagonale (et on peut être très précis sur où ces 1 apparaissent). Elle a une interprétation géométrique provenant de la remarque 7 - 11.

9 4 Facteurs irréductibles de π_u et χ_u

Les polynômes π_u et χ_u ont mêmes facteurs irréductibles et donc $\pi_u \mid \chi_u \mid \pi_u^{\dim(E)}$. Dans un sens c'est direct puisque si P, irréductible dans $\mathbf{K}[X]$, divise π_u, il divise χ_u. La réciproque est facile dans le cas algébriquement clos ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$ par exemple) puisque P est alors de la forme $X - \lambda$ avec $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. Or on a vu que le spectre de u est formé des racines de π_u.

Un argument permet alors de s'en sortir sur un corps quelconque : les polynômes π_A et χ_A ne dépendent pas du corps sur lequel la matrice A est étudiée (pour peu qu'il contienne les coefficients). Par exemple si A est réelle, on peut la voir comme matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On peut alors en conclure que les facteurs irréductibles sont identiques en s'intéressant au polynôme de $\mathbf{K}[X]$ de degré minimal annulant un élément du plus grand corps (par exemple pour i vis-à-vis de $\mathbf{R}[X]$, il s'agit de $X^2 + 1$: si i est racine de P dans $\mathbf{R}[X]$, alors $X^2 + 1$ divise P).

Un argument plus direct consiste à reprendre la démonstration du théorème de CAYLEY-HAMILTON et la remarque suivante : si A est triangulaire par blocs avec $(M_k)_{1 \leq k \leq p}$ comme blocs diagonaux et si Q est dans $\mathbf{K}[X]$, alors $Q(A)$ est triangulaire par blocs avec $(Q(M_k))_{1 \leq k \leq p}$ comme blocs diagonaux, on en déduit que π_A est un multiple de chacun des π_{M_k} donc de leur ppcm. De plus on a déjà vu $\chi_A = \prod_{k=1}^{p} \chi_{M_k}$. Si x est un vecteur quelconque non nul de E et $F = \mathbf{K}[u](x)$. On complète une base de F en une base de E et la matrice de u dans cette base est triangulaire par blocs : l'un formé d'une matrice compagnon, disons associée à un polynôme Q, le second noté M. Par conséquent $\chi_u = Q\chi_M$ et $Q \vee \pi_M \mid \pi_u$. On conclut par récurrence sur la dimension de E puisque M représente un endomorphisme de G puisque, par le lemme de GAUSS, P est un facteur de Q ou de χ_M, donc Q ou de π_M, donc de π_u.

🅭🅯🄏🄎

Exercices

Projecteurs

7 - 1 Ⓢ ★ Somme de deux projecteurs

Soit p et q deux projecteurs de E, de dimension finie, tels que $p+q$ soit aussi un projecteur. En déterminer l'image et le noyau. Que valent $p \circ q$ et $q \circ p$?

7 - 2 Ⓢ ★★ Projecteurs

Soit p et q deux projecteurs de E, de dimension finie, tels que $p \circ q = 0$. Montrer que $p + q - q \circ p$ est un projecteur et en déterminer l'image et le noyau.

7 - 3 Ⓢ ★★ Factorisation

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie.

a. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme u tels que $f = u \circ p$.

b. Montrer qu'il existe un projecteur q et un automorphisme v tels que $f = q \circ v$.

c. Ces propositions sont-elles encore vraies si E n'est plus de dimension finie ?

7 - 4 Ⓢ ★★ Caractères

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$. On suppose $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle et $\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g$ est nul.

Indication : On pourra montrer que c'est presque un projecteur.

7 - 5 Ⓢ ★★★ Somme de projecteurs ♥

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p_1, \ldots, p_n$ des projecteurs de E. Établir que $\sum_{i=1}^{n} p_i$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$, $p_i \circ p_j = \delta_{i,j} p_i$.

7 - 6 Ⓢ ★★★ Endomorphismes unipotents

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $u^q = \mathrm{Id}_E$ pour un certain entier naturel non nul q. Montrer

$$\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)) = \frac{1}{q} \sum_{k=1}^{q} \mathrm{Tr}(u^k)$$

et en déduire la dimension des sous-espaces propres de u.

Matrices et applications linéaires

7 - 7 Ⓢ ★ Commutant

Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ des scalaires tous distincts et $A = \mathrm{diag}(a_i)$. Trouver toutes les matrices M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles qu'il existe P dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $M = [A, P] = AP - PA$.

7 - 8 Ⓢ ★ Commutant

Soit T l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ avec a et b réels et c dans $\mathbf{R}^*$. Montrer que c'est un groupe pour la multiplication et, pour N dans T déterminer le commutant de N dans T, i.e. $\{A \in T \mid AN = NA\}$.

7 - 9 Ⓢ ★★ Endomorphisme de trace nulle ♥

Soit u un endomorphisme non nul de E, espace vectoriel de dimension finie n, et de trace nulle. Montrer qu'il existe une base de E sur laquelle la matrice de u est de diagonale nulle.

7 - 10 Ⓢ ★★ Décomposition de Choleski

Caractériser les matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telles qu'il existe quatre réels a, b, x et y vérifiant

$$M = {}^{\mathrm{t}}T(y) D(a,b) T(x)$$

avec $D(a,b) = \mathrm{diag}(a,b)$ et $T(x)$ la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Que dire si on impose de plus $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$? $x = y$?

Rang d'une matrice

7 - 11 Ⓢ ★ Rang

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,j} = 1 + \delta_{i,j}\alpha_i$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$. Déterminer le rang de A.

7 - 12 Ⓢ ★ Matrices nilpotentes

Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{K})$ qui vérifient $M^2 = 0$.

7 - 13 Ⓢ ★ Caractérisation du rang ♥

Soit A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, non nulle. Montrer que A est de rang r si et seulement s'il existe une famille $(X_1, \ldots, X_r)$ libre dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et une famille $(Y_1, \cdots, Y_r)$ libre dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ telles que $A = \sum_{k=1}^{r} X_k \, {}^{\mathrm{t}}Y_k$.

7 - 14 Ⓢ **C 2018** ★★ **Rang 1**

Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

a. Trouver le rang de la comatrice de M.

b. On suppose que M est de rang 1. Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.

7 - 15 Ⓢ ★★ **Comatrice**

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Calculer $\mathrm{com}(\mathrm{com}(A))$.

7 - 16 Ⓢ ★★ **Inversibilité** †

Soit f une application non constante de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ qui vérifie $f(0) = 0$ et, pour X et Y dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $f(XY) = f(X)f(Y)$. Établir l'équivalence :
X inversible $\iff f(X) \neq 0$.

7 - 17 Ⓢ ★★ **Théorème de Hadamard** ♥

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ à diagonale dominante, i.e. pour tout i dans $[\![1;n]\!]$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}| \ ;$$

montrer que A est inversible.

7 - 18 Ⓢ **X 2013** ★★★ $\mathrm{Ker}(A^2)$

Soit A une matrice complexe, non inversible.

a. Montrer $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.

b. Montrer que ces propositions sont équivalentes :

- **a.** $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$
- **b.** $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(A)$
- **c.** $A(\mathrm{Ker}(A^2)) = \ker(A)$
- **d.** $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} A & \mathrm{Id} \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$.

Calcul de l'inverse

7 - 19 Ⓢ ★ **Inverse**

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ définie par $a_{i,j} = \delta_{i,j}a + \delta_{i,n+1-j}b$ avec $(a,b) \in \mathbf{K}^2$.

À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

7 - 20 Ⓢ ★ **Inverse**

Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

s'il existe, avec a, b et c dans $\mathbf{K}$.

7 - 21 Ⓢ ★★ **Primitives**

Soit α un réel non nul. On pose $M = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

a. Expliciter M^{-1} et M^{-2}.

b. La fonction φ_α donnée sur $\mathbf{R}$ par

$$\varphi_\alpha(x) = e^{\alpha x}(a\sin(x) + b\cos(x) + c)$$

admet une primitive de la forme Φ_α donnée par

$$\Phi_\alpha(x) = e^{\alpha x}(A\sin(x) + B\cos(x) + C)\ .$$

Vérifier $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

c. On suppose ici $\alpha > 0$. En déduire l'existence d'une primitive de $x \mapsto x\varphi_\alpha(x)$ qui admet une limite nulle en $-\infty$ et montrer qu'on peut la mettre sous la forme

$$x \mapsto e^{\alpha x}\big((xA - A')\sin(x) + (xB - B')\cos(x) + xC - C'\big)$$

puis exprimer A', B' et C' à l'aide de a, b, c et M^{-2}.

Déterminants

7 - 22 Ⓢ ★ **Rang 1**

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de rang 1. Montrer

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{Tr}(A)\ .$$

7 - 23 Ⓢ ★★ **Trace de la comatrice**

Soit M et H dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer $\lim_{\lambda\to 0} \dfrac{\det(M+\lambda H) - \det(M)}{\lambda} = \mathrm{Tr}({}^{t}\mathrm{com}(M)H)$.

En déduire une expression du coefficient de degré 1 du polynôme caractéristique de M.

7 - 24 Ⓢ ★★ **Conjugaison stable** ♥

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

7 - 25 Ⓢ ★★ **Déterminants positifs** †

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer $\det\left(A^2 + I_n\right) \geq 0$ et, si A et B commutent, $\det(A^2 + B^2) \geq 0$.

7 - 26 Ⓢ **C 1993** ★★

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On définit φ dans $\mathrm{End}\left(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})\right)$ par $\varphi(X) = AXB$. Calculer $\det(\varphi)$.

7 - 27 Ⓢ **Lyon 1993** ★★★ **Comatrice**

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On note $\mathrm{com}(A)$ la comatrice de A. Montrer $\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A)\,\mathrm{com}(B)$.

Réduction

7 - 28 Ⓢ ★ Transposée de la comatrice

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et $B = {}^t\mathrm{com}(A)$.

a. Montrer que tout vecteur propre pour A l'est pour B.

<u>*Indication*</u> *: On pourra distinguer suivant le rang de A : n, $n-1$ ou inférieur à $n-2$.*

b. On suppose que A possède n valeurs propres distinctes, dont une nulle. Déterminer les valeurs propres de B.

7 - 29 Ⓢ M 2019 ★ Spectre d'une composée

Soit f et g dans $\mathrm{End}(E)$, avec E de dimension finie, f diagonalisable et $f \circ g = f + g$.

a. Montrer que g et $f \circ g$ sont diagonalisables.

b. Donner les éléments du spectre de g et $f \circ g$ en fonction des éléments du spectre de f.

c. Montrer $\mathrm{Sp}(f \circ g) \subset \mathbf{R}_- \cup [4; +\infty[$.

<u>*Indication*</u> *: On pourra considérer $(f - \mathrm{Id}) \circ (g - \mathrm{Id})$.* (Exercice couplé avec 324.)

7 - 30 Ⓢ MT 2019 ★ Sous-espaces propres

On considère $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$.

a. Déterminer les valeurs et vecteurs propres de M.

b. Étudier la dimension des sous-espaces propres. Sont-ils en somme directe ? Leur somme est-elle égale à $\mathbf{R}^3$?

7 - 31 Ⓢ CCP 2019 ★ Commutant

On considère la matrice donné par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que A est diagonalisable et donner ses éléments propres.

b. **i.** Soit

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer l'ensemble des matrices N qui commutent avec D.

ii. En déduire l'ensemble $C(A)$ des matrices qui commutent avec A.

c. Montrer $C(A) = \mathrm{Vect}\left(I_3, A, A^2\right)$.

7 - 32 Ⓢ ★ Diagonalisabilité

Soit A dans $\mathscr{M}_{2p}(\mathbf{K})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \diagdown & 0 & 0 & \diagup & 0 \\ \vdots & & \alpha_p & \alpha_p & & \vdots \\ \vdots & & \alpha_{p+1} & \alpha_{p+1} & & \vdots \\ 0 & \diagup & 0 & 0 & \diagdown & 0 \\ \alpha_{2p} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha_{2p} \end{pmatrix}.$$

À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle diagonalisable ?

7 - 33 Ⓢ ★ Rang pair

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que A est de rang pair.

7 - 34 Ⓢ ★★ Matrices circulantes

a. Déterminer les valeurs propres complexes de la matrice de permutation J donnée par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer les valeurs propres et le déterminant, puis diagonaliser la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & & a_{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & & & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

7 - 35 Ⓢ ★★ Diagonalisabilité

a. Déterminer les éléments propres de $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b. Étudier la diagonalisabilité dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

🅭🅯🄏🄎

avec $(a_i)_{1\leq i\leq n-1}$ et $(b_i)_{1\leq i\leq n-1}$ non nuls dans $\mathbf{R}^{n-1}$.

7 - 36 Ⓢ ★★ Sous-espaces vectoriels stables

Déterminer les sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^3$ stables par la matrice A dans les deux cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

7 - 37 Ⓢ C 2019 ★★ Indice de nilpotence

a. Soit u un endomorphisme nilpotent d'indice égal à la dimension de E. Montrer qu'il peut être représenté par la matrice $J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

b. Montrer qu'il a un nombre fini de sous-espaces stables.

c. Réciproquement, que dire d'un endomorphisme nilpotent ayant un nombre fini de sous-espaces stables ?

7 - 38 Ⓢ M 2019 ★★ Racine de matrice

a. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Établir l'équivalence entre M non diagonalisable et $M = D + T$ avec D scalaire et T nilpotente non nulle.

b. Étudier les matrices X de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$ telles que $X^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $n \geq 2$.

7 - 39 Ⓢ ★★ Spectre continu

Soit $E = C_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$, l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$, à valeurs réelles et de limite nulle en $+\infty$.

On définit T dans $\mathscr{L}(E)$ par $T(f)(x) = f(x+1)$.

Montrer que les valeurs propres de T sont les réels de $]-1;1[$ et trouver les vecteurs propres associés.

7 - 40 Ⓢ ★★ Diagonalisabilité

Soit A non nul dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et u dans $\mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbf{R}))$ défini par $u(M) = M + \operatorname{Tr}(M)A$.

a. Donner les sous-espaces propres de u.

b. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable.

7 - 41 Ⓢ ★★ Polynôme caractéristique ♥♥

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, E)$ où E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.

a. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

b. On se place dans le cas $E = F$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont les mêmes valeurs propres, et que si f ou g est inversible, ils ont le même polynôme caractéristique.

c. On se place dans le cas $E = F$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ ont le même polynôme caractéristique.

d. Cas général.

i. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$. Comparer les produits matriciels par blocs $\begin{pmatrix} XI_n - AB & A \\ 0_{p,n} & XI_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} I_n & 0_{n,p} \\ B & I_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XI_n & A \\ 0_{p,n} & XI_p - BA \end{pmatrix}$.

ii. Comparer les polynômes caractéristiques de $f \circ g$ et $g \circ f$.

7 - 42 Ⓢ ★★ Rang 1

Soit f et g dans $\mathscr{L}(E)$, avec E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et g de rang 1. Déterminer λ dans $\mathbf{C}$ tel que $f - \lambda g$ ne soit pas inversible. On distinguera selon le rang de f (n, $n-1$ ou inférieur à $n-2$).

7 - 43 Ⓢ ★★ Diagonalisabilité

a. Soit u dans $\mathscr{L}(E)$ et $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille de sous-espaces u-stables tels que $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$. Établir l'équivalence : u est diagonalisable $\iff \forall i \in [\![1;p]\!]$, $u_{|E_i}$ est diagonalisable.

b. À quelle condition nécessaire et suffisante la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ \vdots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \vdots \\ \alpha_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est-elle diagonalisable ?

7 - 44 Ⓢ M 2019 ★★ Projecteurs

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et p un projecteur de E. Soit F de $\mathscr{L}(E)$ dans lui-même donné par $F(f) = \dfrac{1}{2}(f \circ p + p \circ f)$.

a. Est-il linéaire ?

b. Est-il diagonalisable ?

c. Quelles sont les dimensions des sous-espaces propres ?

7 - 45 Ⓢ ★★★ Entrelacement

Soit A, B et M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que $AM = MB$. Montrer que A et B ont au moins $\operatorname{rg}(M)$ valeurs propres communes (comptées avec multiplicité).

7 - 46 Ⓢ **C 2019** ★★★ **Valeurs propres dans un compact**

Soit K un compact de $\mathbf{C}$. Montrer que les matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ dont toutes les valeurs propres sont dans K forment une partie fermée de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

7 - 47 Ⓢ **X 2010 - Maths B** ★★★ **Involutions** ♥

Soit G un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$, avec E de dimension finie, composé d'involutions. Montrer que G est fini.

Indication : on pourra montrer que G est abélien et en déduire que ses éléments sont co-diagonalisables.

Polynômes d'endomorphismes

7 - 48 Ⓢ **M 2012** ★ **Racines réelles**

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $A^3 = A + I_n$. Montrer $\det(A) > 0$.

7 - 49 Ⓢ **M 2016** ★ **Diagonalisabilité**

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ tel que $A^3 + A = I_n$. Est-ce que A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$? sur $\mathbf{R}$?

7 - 50 Ⓢ ★ **Racine simple**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et u dans $\mathscr{L}(E)$ annulé par un polynôme ayant 0 comme racine simple. Montrer $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

7 - 51 Ⓢ ★ **Racine simple**

Soit u dans $\mathscr{L}(E)$ admettant π_u comme polynôme minimal et λ dans $\mathbf{K}$. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Im}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$
2. λ n'est pas racine multiple de π_u.

7 - 52 Ⓢ ★★ **Puissances entières** †

Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers et $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ des complexes tels que $P = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

Montrer que $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i^k)$ est à coefficients entiers, pour tout entier naturel k.

Indication : on pourra considérer la matrice compagnon associée à P.

7 - 53 Ⓢ ★★ **Comatrice**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

a. Déterminer $\chi_{\mathrm{com}(A)}$ en fonction χ_A.

b. En déduire le coefficient de X dans χ_A.

7 - 54 Ⓢ ★★ **Équation matricielle**

Trouver toutes les matrices M dans $\mathscr{M}_5(\mathbf{R})$ telles que $M^5 = -I_5$.

7 - 55 Ⓢ ★★ **Commutation et cube**

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ avec B diagonalisable. Montrer $[A, B^3] = 0 \Longrightarrow [A, B] = 0$.

7 - 56 Ⓢ ★★ **Unipotent entier** †

Soit A dans $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$, i.e. une matrice 2×2 à coefficients entiers et de déterminant 1. On suppose A unipotente (i.e. $\exists n \in \mathbf{N}^* \ A^n = I_2$). Montrer $A^{12} = I_2$.

7 - 57 Ⓢ ★★ **Critère de diagonalisabilité**

Soit f dans $\mathscr{L}(E)$, avec E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Établir l'équivalence des deux propriétés suivantes :

1. f est diagonalisable
2. χ_f est scindé et tout sous-espace stable admet un supplémentaire stable.

7 - 58 Ⓢ ★★★ **Topologie**

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_2(\mathbf{C})$. Déterminer son adhérence et son intérieur.

7 - 59 Ⓢ ★★★ **Polynômes minimal et caractéristique**

Soit f l'application de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par $f(M) = (\mathrm{Tr}(M^k))_{1 \leq k \leq n}$.

a. Montrer que f est différentiable et calculer $\mathrm{d}f$.

b. Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer $\mathrm{rg}(\mathrm{d}f(M)) = \deg(\pi_M)$.

c. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les polynômes minimal et caractéristique sont égaux, est ouvert.

7 - 60 Ⓢ ★★★ **Endomorphismes cycliques**

Soit u un endomorphisme de E espace vectoriel sur $\mathbf{K}$ de dimension finie n. On veut établir l'équivalence entre les propositions

1. π_u le polynôme minimal de u est de degré n
2. u est un endomorphisme cyclique, i.e. il existe x dans E tel que $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.

a. Établir que la condition est suffisante.

b. On suppose $\deg \pi_u = n$. Établir que la condition est nécessaire dans les cas suivants :

- **i.** Le polynôme minimal de u est du type P^α avec P irréductible et $\alpha \in \mathbf{N}^*$.

  Indication : Pour $x \notin \mathrm{Ker}\, P^{\alpha-1}(u)$, introduire $\mathcal{I}_x = \{Q \in \mathbf{K}[X] \mid Q(u)(x) = 0\}$ et montrer que c'est un idéal de générateur normalisé P^α, puis montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une famille libre.

- **ii.** u quelconque tel que $\deg \pi_u = n$.

🅭🅯🄏🄎

7 - 61 Ⓢ **M 2017** ★★★ **Endomorphismes cycliques**

On pose la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -a_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$,

avec a_0, a_1, …, a_{n-1} réels.

a. Trouver le polynôme caractéristique de A.

b. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si χ_A est simplement scindé.

c. Trouver les matrices qui commutent avec A.

7 - 62 Ⓢ **C 2013** ★★★ **Décomposition de Dunford et critère de Klarès**

Soit V un sous-espace vectoriel E avec $E = \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On définit $V^0 = \{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \,|\, \forall Y \in V\,, \mathrm{Tr}(XY) = 0\}$ et $\overline{V} = \left\{X \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C}) \,\middle|\, \overline{X} \in V\right\}$. Pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, soit ad_A dans $\mathrm{End}(\mathscr{M}_n(\mathbf{C}))$ donné par $\mathrm{ad}_A(M) = AM - MA$,

a. Montrer que $\overline{V}$ et V^0 sont des espaces vectoriels de dimensions respectives $\dim(V)$ et $\mathrm{codim}(V)$.

b. Les sous-espaces $\overline{V}$ et V^0 sont-ils supplémentaires ?

c. Montrer $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_A)^0 = \mathrm{Im}(\mathrm{ad}_A)$.

d. Si A est nilpotente, montrer qu'il existe B vérifiant $A = AB - BA$.

e. En général montrer que A s'écrit $D + N$ avec D diagonalisable et N nilpotente et $DN = ND$.

f. Généraliser la question **d.**.

g. Montrer que si $\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_A^2) = \mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_A)$, alors A est diagonalisable.

7 - 63 Ⓢ ★★★ **Sommes de Newton** ♠

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On pose $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$ (avec $a_0 = 1$).

a. Montrer, si x n'est pas valeur propre de A, $\mathrm{Tr}\left[(xI_n - A)^{-1}\right] = \dfrac{\chi_A'(x)}{\chi_A(x)}$.

b. On pose $B_j = \sum_{i=0}^{j} a_i A^{j-i}$ et $Q = \sum_{j=0}^{n-1} B_j X^{n-j-1}$ (polynôme à coefficients matriciels).

i. Montrer, pour x dans $\mathbf{C}$,

$$(xI_n - A)Q(x) = \chi_A(x) I_n \,.$$

ii. En déduire $\mathrm{Tr}(Q(x)) = \chi_A'(x)$.

iii. Retrouver les relations entre les sommes de Newton (S_k) données par $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$, pour $0 \leq k \leq n$, et les fonctions symétriques élémentaires des racines $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de χ_A.

7 - 64 Ⓢ **ENS 2012** ★★★ **Corps finis**

Soit p un nombre premier. Est-ce que toute matrice carrée à coefficients dans $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ est trigonalisable ?

Endomorphismes nilpotents

7 - 65 Ⓢ **Magistère 2017** ★ **Équation matricielle**

Résoudre l'équation matricielle

$$A^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

7 - 66 Ⓢ ★★ **Similarité**

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ nilpotente d'indice n, i.e. $A^n = 0$ mais $A^{n-1} \neq 0$. Montrer que A est semblable à $2A$.

Plus généralement trouver toutes les matrices M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telles que M et $2M$ soient semblables.

7 - 67 Ⓢ **M 2017** ★★ **Topologie** ♥

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer que A est nilpotente si et seulement s'il existe une suite de matrices semblables à A convergeant vers la matrice nulle.

7 - 68 Ⓢ **Magistère 2017-2019** ★★ **Traces**

Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie n, avec $n > 0$, et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u^2) = \cdots = \mathrm{Tr}(u^n) = 0 \,.$$

Montrer que u est nilpotent.

7 - 69 Ⓢ **Magistère 2018** ★★ **Trace nulle** ♥

Montrer qu'une matrice est de trace nulle si, et seulement si, elle est combinaison linéaire de matrices nilpotentes.

7 - 70 Ⓢ **X 1993** ★★ **Produit de nilpotents**

a. Soit u dans $\mathscr{L}(E)$ nilpotent et stabilisant un sous-espace F de E, avec E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F \neq \{0\}$. Montrer $\dim(u(F)) < \dim(F)$.

b. Soit u_1, …, u_n des endomorphismes nilpotents de E, $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, commutant deux à deux. Montrer $u_n \circ \cdots \circ u_1 = 0$.

7 - 71 Ⓢ ★★ **Déterminant**

Soit u et v deux endomorphismes de E, $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que u et v commutent et que v est nilpotent. Montrer $\det(u + v) = \det(u)$.

Indication : commencer par le cas $u = Id_E$ puis u inversible.

7 - 72 Ⓢ **M 2013** ★★ **Polynôme caractéristique**

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

a. On suppose que, pour toute matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, on a $\chi_{AM+B} = \chi_{AM}$.

i. Montrer que B est nilpotente.

ii. Montrer : $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, $\operatorname{Tr}(AMB) = 0$ et en déduire $BA = 0$.

b. Réciproquement, on suppose B nilpotente et qu'on a $BA = 0$. Montrer que pour toute matrice M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, les polynômes caractéristiques de $AM + B$ et de AM sont égaux.

7 - 73 Ⓢ Magistère 2017 ★ Crochet †

Soit f et g dans $\mathscr{L}(E)$ avec E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie réalisant $f \circ g - g \circ f = \alpha f$ avec $\alpha \in \mathbf{K}^*$. Montrer que f est nilpotent.

Indication : calculer $f^k \circ g - g \circ f^k$.

7 - 74 Ⓢ ★★★ Combinaisons linéaires

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telles qu'il existe $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ distincts dans $\mathbf{R}^{n+1}$ vérifiant, pour $0 \leq i \leq n$, $A + \lambda_i B$ est nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

7 - 75 Ⓢ ★★★ Racine carrée

a. Soit N une matrice nilpotente dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ et λ dans $\mathbf{C}^*$. En notant $A = \lambda I_n + N$, montrer qu'il existe un polynôme P dans $\mathbf{C}[X]$ tel que $A = P(A)^2$.

Indication : On pourra commencer par le cas $\lambda = 1$ et utiliser un développement limité de $\sqrt{1+x}$.

b. Plus généralement, si A est inversible, montrer que le résultat précédent subsiste.

Compléments

7 - 76 Ⓢ ★ Centre de $\mathscr{L}(E)$

Soit u dans $\mathscr{L}(E)$ avec E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$. On suppose que u est central, i.e. qu'il commute avec tout endomorphisme de E.

a. Montrer que pour tout projecteur p dans $\mathscr{L}(E)$, on a $up = pup$ et en déduire que u stabilise tout sous-espace vectoriel de E.

b. Montrer que la matrice de u dans toute base est diagonale et que cette matrice est invariante par changement de base. En conclure que u est une homothétie.

c. Que se passe-t-il si E n'est plus supposé de dimension finie ou que $\mathbf{K}$ n'est pas un sous-corps de $\mathbf{C}$?

7 - 77 Ⓢ M 2019 ★ Hyperplan et inversibles

a. Montrer que pour toute forme linéaire φ de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans $\mathbf{R}$, il existe A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que pour toute matrice M de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, on ait $\varphi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.

b. Soit H un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que H rencontre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$.

7 - 78 Ⓢ ★ Trigonalisation sur C

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. On définit u^* dans $\operatorname{End}(E^*)$ par $u^*(\varphi) = \varphi \circ u$.

a. Montrer que u^* admet un vecteur propre et en déduire que u admet un hyperplan stable.

b. En déduire que u admet un drapeau maximal stable et qu'il est trigonalisable.

7 - 79 Ⓢ ★ Théorème de Cayley-Hamilton

Soit u un endomorphisme de E, espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{C}$. D'après l'exercice 7 - 78, on dispose d'une base de trigonalisation de u, notée (e_i) et on note (λ_i) les éléments de $\operatorname{Sp}(u)$, numérotés de sorte que E_i, avec $E_i = \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_i)$, soit stable et $u(e_i) - \lambda_i e_i \in E_{i-1}$.

a. Montrer que $(u - \lambda_1 \mathrm{Id}_E) \circ \cdots \circ (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$ est nul sur E_i.

b. Conclure que le théorème de Cayley-Hamilton est vrai sur $\mathbf{R}$ et même sur tout sous-corps $\mathbf{K}$ de $\mathbf{C}$.

7 - 80 M 2019 ★★ Inverse de Vandermonde

a. Redémontrer l'expression factorisée du déterminant de Vandermonde.

b. Déterminer l'inverse de la matrice de Vandermonde. Interpréter en tant que matrice de passage dans l'espace vectoriel des polynômes.

7 - 81 Ⓢ ★★ Commutant ♥

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $c(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) \mid [u, v] = 0\}$.

a. Montrer que $c(u)$ est un espace vectoriel et en déterminer la dimension quand u est diagonalisable.

b. Comparer $c(u)$ et $\mathbf{K}[u]$

c. Étudier le cas où u est nilpotent.

7 - 82 ★★ Formules de Cardan

On étudie une équation de degré 3 de la forme $X^3 + pX + q = 0$.

a. Montrer qu'on peut écrire $X^3 + pX + q = \lambda(X + u)^3 + \mu(X + v)^3$, avec λ, μ, u et v des scalaires, si et seulement si $(1, 0, p/3, q)$ sont les quatre premiers termes d'une suite récurrente linéaire d'ordre 1 ou 2.

b. Montrer qu'en général $u + v = \dfrac{3q}{p}$ et $uv = -3p$ et en déduire les formules de Cardan dans ce cas.

c. Traiter les cas particuliers $p = 0$ et $4p^3 + 27q^2 = 0$.

7 - 83 C 2019 ★★★ Isomorphismes de groupes linéaires

Soit n et p deux entiers distincts. Existe-t'il un isomorphisme de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathrm{GL}_p(\mathbf{K})$?

Indication : Trouver quelque chose d'invariant par cet isomorphisme.

CC BY-NC-SA

7 - 84 Ⓢ ★★★ Irréductibilité

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 2$. Établir l'équivalence : χ_u est irréductible sur $\mathbf{K}[X] \iff \{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces stables par u.

7 - 85 C II 2019 ★★★ Algorithme de Faddeev-Le Verrier

a. Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On pose $\tau_0 = 0$ et $B_0 = I_n$. On définit ensuite, pour k entre 1 et n, $\tau_k = -\dfrac{1}{k}\operatorname{Tr}(AB_{k-1})$ et $B_k = AB_{k-1} + \tau_k I_n$. On pose finalement $C = -\dfrac{1}{\tau_n}B_{n-1}$ et $P = X^n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \tau_k X^{n-k}$.

Écrire une fonction en Python qui prend une matrice A en argument et renvoie P et C.

b. Tester la fonction précédente sur une matrice aléatoire, donner $P(A)$ et AC, et faire une conjecture.

c. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, p un entier naturel non nul, G une forme p-linéaire sur E et $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ des fonctions dérivables de $\mathbf{R}$ dans E. Donner la dérivée de $t \mapsto G(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_p(t))$.

d. On note pour x dans $\mathbf{K}$, $H(x) = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(xI_n - A)$ et χ_A le polynôme caractéristique de A. Montrer $\chi_A'(x) = \operatorname{Tr}(H(x))$.

e. On se donne n matrices carrées $R_0, \ldots, R_{n-1}$ telles que $H(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} R_{n-1-k}x^k$.

- **i.** Justifier l'existence de telles matrices.
- **ii.** Rappeler ce que vaut $(xI_n - A)H(x)$, exprimer χ_A en fonction de $R_0, \ldots, R_{n-1}$ et finalement trouver une relation de récurrence sur les R_k.
- **iii.** Montrer finalement $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $R_k = B_k$.

f. Conclure finalement $P = \chi_A$ et $C = A^{-1}$.

g. Question supplémentaire posée à l'oral à la fin : quel est l'intérêt de la méthode ?

7 - 86 Ⓢ ENS P 2017 ★★★ Décomposition de Bruhat

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'il existe une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbf{C}^n$ et σ dans S_n tels que $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ soit une base de triangularisation de A et $(e_{\sigma(i)})_{1\leq i\leq n}$ en soit une de B.

7 - 87 ★★★ Racines d'un endomorphisme ♥

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. On cherche les solutions X dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ de l'équation (E) : $X^2 = A$.

a. On suppose que A est diagonalisable.

- **i.** Montrer que (E) possède des solutions.
- **ii.** Dans le cas où les valeurs propres sont toutes simples, combien (E) possède-telle exactement de solutions ?
- **iii.** Dans le cas où l'une des valeurs propres λ de A est multiple, montrer que (E) admet une infinité de solutions.
- **iv.** Que peut-on dire dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$?

b. On suppose A nilpotente d'indice p.

- **i.** Montrer que si (E) admet une solution X, celle-ci est nilpotente d'indice q avec $q \in \{2p-1, 2p\}$. Qu'en déduire pour l'indice de nilpotence de A ?
- **ii.** On suppose $2p \leq n+1$. L'équation (E) admet-elle toujours des solutions ?

c. ★★★★ Cas général ?