

Géométrie différentielle



Olga Alexandrovna LADYZHENSKAYA est née le 7 mars 1922 à Kologriv, au nord de la Russie, et décédée le 12 janvier 2004, à Saint-Petersbourg. Son père Alexander Ivanovich, professeur de mathématiques, s'occupe lui-même de la formation mathématique de ses trois filles. En octobre 1937, il est arrêté puis abattu par le NKVD comme de nombreux autres professeurs d'ascendance noble.

Brillamment reçue aux examens de l'Université de Leningrad en 1939, Olga ne peut s'y inscrire, son père étant alors considéré comme traître à la Nation jusqu'au discours de KHROUCHTCHEV en 1956. À la fin de la guerre, elle parvient à s'inscrire à l'Université de Moscou, puis rejoint Leningrad, où elle soutient sa thèse et commence sa carrière académique.

Ses principaux résultats concernent la théorie des équations aux dérivées partielles, en particulier la régularité des solutions selon la régularité des coefficients. Ses résultats encyclopédiques, notamment avec Nina URALCEVA, font toujours autorité. Elle s'est intéressée aux fluides visqueux incompressibles et a démontré l'unicité et analysé la régularité des solutions sous certaines conditions pour des écoulements bi-dimensionnels. Jean LERAY a démontré l'existence de solutions dans les années 30, mais la question de l'unicité se révèle très ardue et fait l'objet d'un prix de l'Institut Clay.

Responsable du laboratoire de physique mathématique du célèbre Institut Steklov de l'Académie des sciences de l'URSS, présidente de la St Petersburg Mathematical Society, Olga LADYZHENSKAYA a son nom sculpté sur un grand bureau en marbre dans la salle d'exposition Mathématiques du Science Museum de Boston, parmi les mathématiciens influents du XX^e siècle.

Introduction

Programme

- Barycentre. Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres.
- Chemin continu. Composantes connexes par arcs. Parties connexes par arcs (convexes, étoilées, cas de \mathbf{R}), image continue.
- Arc paramétré de classe C^1 . Paramètre régulier. Interprétation géométrique de la dérivée. Exemples simples d'arcs paramétrés plans. Les étudiant(e)s doivent savoir déterminer la tangente et la normale à un arc paramétré plan en un point associé à un paramètre régulier.
- Dérivée selon un vecteur v , $D_v f$; dérivées partielles, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ou $\partial_i f$. Lorsqu'une base est fixée, identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$.
- Différentiabilité en un point, notation $o(h)$, développement limité à l'ordre 1. Lien avec la continuité et la dérivabilité selon tout vecteur. Différentielle (application linéaire tangente), $df(a)$, relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.
- Différentiabilité sur un ouvert. Application constante, restriction d'une application linéaire. Lien entre différentielle et dérivées partielles. Matrice de $df(a)$, matrice jacobienne, cas des fonctions d'une variable.
- Différentielle d'une combinaison linéaire, de $B(f, g)$ où B est bilinéaire, d'une composée. Dérivée le long d'un arc, interprétation géométrique en termes de tangentes. Cas particulier fondamental : arc affine. Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$. Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables. Règle de la chaîne.
- Gradient, expression en base orthonormée, $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique. Point critique. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local. Exemples de recherche d'extrema globaux.
- Vecteurs tangents à une partie. Cas du graphe d'une fonction différentiable sur un ouvert de \mathbf{R}^2 à valeurs dans \mathbf{R}^3 . Plan affine tangent à une surface d'équation $z = f(x, y)$: équation cartésienne. Orthogonalité du gradient et des vecteurs tangents à une ligne de niveau. Le théorème des fonctions implicites est hors programme.
- Applications de classe C^1 . Caractérisation par les dérivées partielles (démonstration non exigible). Opérations algébriques sur les applications de classe C^1 , $f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$. Caractérisation des fonctions constantes sur une partie connexe par arcs (démonstration dans le cas convexe).
- Applications de classe C^k , dérivées partielles d'ordre k . La notion de différentielle seconde est hors programme. Théorème de SCHWARZ, opérations algébriques, composition (démonstrations non exigibles).
- Exemples d'équations aux dérivées partielles du premier et du second ordre. Les étudiant(e)s doivent être capables d'utiliser un changement de variables dans les deux cas suivants : transformation affine, passage en coordonnées polaires. L'utilisation de tout autre changement de variables suppose une indication. La notion de difféomorphisme étant hors-programme, l'expression des solutions en fonction des variables initiales n'est pas un attendu.

1 Barycentres, convexes

Soit E un espace vectoriel réel. Il peut être utile de le voir comme un ensemble de points et de pouvoir alors changer d'origine, autrement dit de dissocier l'ensemble des points et l'ensemble des vecteurs. Les vecteurs peuvent agir sur les points (par translation) et en fixant une origine, on retrouve toutes les propriétés d'un espace vectoriel. La différence est qu'on peut changer d'origine comme on veut. Le prototype de cette situation s'obtient en dessinant une droite dans le plan, mais ne passant pas par l'origine. Ce n'est pas un espace vectoriel : une combinaison linéaire arbitraire de points de la droite n'est pas sur la droite (et en fait deux de ses points, s'ils sont distincts, engendrent le plan), mais il existe certaines combinaisons qui la laisse stable, les combinaisons barycentriques.

On appelle **barycentre** de deux points de E , une combinaison linéaire de ces points avec des coefficients de somme 1.

Plus généralement on dit que x est barycentre des points $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ affectés des poids $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ si $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ et $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$. Le membre de droite est appelé **combinaison barycentrique** des points $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$. Si de plus les coefficients sont tous positifs, on parle de **combinaison convexe**.

On peut également considérer les points massiques (a_i, α_i) . Dans ce cas, on dira que le point massique (x, α) est barycentre des points massiques $(a_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq n}$ si $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbf{R}^n$, $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$, $\alpha = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ et $\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\right) x = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$.

Définition 6 - 1

Exemple 6 - 1

Les barycentres de deux points distincts, A et B , forment la droite (AB) .

Définition 6 - 2

Soit x et y deux points distincts de E . Le **segment** $[x; y]_E$ est l'ensemble des combinaisons convexes de x et y , i.e.

$$[x; y]_E = \{tx + (1 - t)y \mid t \in [0; 1]\} .$$

Remarque 6 - 1

Cette définition est cohérente avec la notion de segment dans le cas $E = \mathbf{R}$.

Définition 6 - 3

Une partie C de E est dite **convexe** si, pour tout couple de points distincts de C , C contient le segment les reliant.

Associativité du barycentre

Soit $(a_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq m+n}$ des points massiques. On suppose que les trois quantités $\sum_{i=1}^m \alpha_i$, $\sum_{i=m+1}^{m+n} \alpha_i$ et $\sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i$ sont non nulles et on note respectivement (x, α) , (y, β) et (z, γ) les barycentres des points massiques $(a_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq m}$, $(a_i, \alpha_i)_{m+1 \leq i \leq m+n}$ et $(a_i, \alpha_i)_{1 \leq i \leq m+n}$. Alors (z, γ) est barycentre des points massiques (x, α) et (y, β) .

Proposition 6 - 1

Démonstration. Cela résulte de l'associativité dans un espace vectoriel puisque

$$\gamma z = \sum_{i=1}^{m+n} \alpha_i a_i = \sum_{i=1}^m \alpha_i a_i + \sum_{i=m+1}^{m+n} \alpha_i a_i = \alpha x + \beta y .$$

□

Proposition 6 - 2

Une partie C de E est convexe si et seulement si elle est stable par combinaison convexe.

Démonstration. Le sens réciproque est immédiat car un segment est constitué de barycentres à coefficients positifs.

Quant au sens direct, on montre par récurrence sur n dans $\llbracket 2; +\infty \rrbracket$ que C est stable par barycentration à coefficients positifs pour n points. Pour $n = 2$ c'est la définition. Pour démontrer l'hérédité, il suffit d'utiliser l'associativité du barycentre pour exhiber un barycentre à coefficients strictement positifs de $n + 1$ points comme barycentre à coefficients strictement positifs d'un des $n + 1$ points et d'un barycentre à coefficients strictement positifs des n autres. □

Une propriété importante des boules est qu'elles sont convexes.

Proposition 6 - 3

Une boule (ouverte ou fermée) d'un espace vectoriel normé E est convexe.

Démonstration. Soit a, x et y dans E et t dans $[0; 1]$, on a

$$tx + (1 - t)y - a = t(x - a) + (1 - t)(y - a)$$

et donc en prenant les normes et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|tx + (1 - t)y - a\| \leq t\|x - a\| + (1 - t)\|y - a\|$$

et la propriété cherchée en découle. □

Convergence au sens d'EULER

Soit (u_n) une suite réelle convergente. On note $\ell = \lim u_n$. Alors, en posant

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k, \text{ on a } \lim v_n = \ell.$$

Corollaire 6 - 1

Démonstration. Comme (u_n) converge, on dispose d'un réel positif M tel que cette suite prenne ses valeurs dans B_M , la boule de centre ℓ et de rayon M . On se donne un ε strictement positif, inférieur à M . On dispose alors de n_0 tel que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ soit à valeurs dans B_ε , la boule de centre ℓ et de rayon ε . On a $2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ et en coupant

la somme en n_0 on en déduit, par associativité du barycentre et convexité des boules, que v_n est barycentre de x_ε dans B_ε et x_M dans B_M . On note $\varepsilon_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n_0-1} \binom{n}{k}$

et il vient $v_n = x_\varepsilon + \varepsilon_n(x_M - x_\varepsilon)$. Comme on a $\binom{n}{k} \leq n^{n_0}$ pour $k < n_0$, il vient $\varepsilon_n = O(n_0 n^{n_0} 2^{-n}) = o(1)$. On dispose alors d'un rang n_1 à partir duquel v_n est somme d'un élément de B_ℓ et de ε fois un vecteur obtenu comme différence de deux éléments de B_M . Ce dernier vecteur étant de norme inférieure à $2M$ par inégalité triangulaire, on en déduit que v_n est alors dans la boule de centre ℓ et de rayon $(1 + 2M)\varepsilon$, ce qui permet de conclure. □

2

Connexité par arcs

À partir de ce paragraphe E est supposé normé de dimension finie. La notion d'intervalle réel peut s'y étendre par celles de convexité ou de connexité (par arcs).

Définition 6 - 4

Soit a et b deux points de E . On appelle **chemin continu** joignant a et b toute fonction continue f de $[0; 1]$ dans E vérifiant $f(0) = a$ et $f(1) = b$.

Plus généralement, si f est à valeurs dans une partie A , on dit que c 'est un chemin continu dans A joignant a à b .

Proposition 6 - 4

La relation binaire définie par $a\mathcal{R}b \equiv$ il existe un chemin continu joignant a à b , est une relation d'équivalence sur E .

Si A est une partie de E , il en va de même pour la relation donnée par les chemins continus dans A . Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées **composantes connexes par arcs** de A .

Démonstration. On traite directement le cas d'une partie A de E .

Soit f de $[0; 1]$ dans E constante égale à a . Une fonction constante étant continue, la relation \mathcal{R} est réflexive.

Soit f un chemin continu dans A joignant a à b . La composée de deux fonctions continues étant continue, la fonction $t \mapsto f(1 - t)$ est un chemin continu dans A de b à a et donc \mathcal{R} est symétrique.

Enfin si f et g sont des chemins continus dans A joignant respectivement a à b et b à c , alors la concaténation des deux définie par $t \mapsto f(2t)$ sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ et $t \mapsto g(2t - 1)$ sur $\left]\frac{1}{2}; 1\right]$ est un chemin continu dans A joignant a à c . La continuité en $\frac{1}{2}$ résultant du fait qu'on a $f(1) = g(0)$.

La relation \mathcal{R} est donc transitive et est une relation d'équivalence. \square

Définition 6 - 5

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . On dit que A est **connexe par arcs** si, pour tout couple (a, b) de points de A , il existe un chemin continu dans A joignant a à b , i.e. si A est l'unique composante connexe par arcs de A .

Exemple 6 - 2

Le graphe d'une fonction continue est connexe par arcs. Les chemins continus étant donnés par la fonction, à changement de variable affine près.

Définition 6 - 6

On appelle partie **étoilée** par rapport à a une partie qui contient tout segment joignant a à l'un de ses points.

Exemple 6 - 3

Un ensemble de demi-droites de même origine est étoilé par rapport à cette origine.

Proposition 6 - 5

Tout convexe est étoilé par rapport à n'importe lequel de ses points.
Toute partie étoilée est connexe par arcs.

Démonstration. La première partie résulte de la définition d'un convexe.

Pour la seconde, soit x un point par rapport auquel A est étoilé. En particulier x peut être joint dans A à tout point de A . Il appartient donc à toutes les composantes connexes par arcs de A , qui de ce fait n'en a qu'une, i.e. A est connexe par arcs. \square

Théorème 6 - 1

Bolzano

L'image continue d'un connexe par arcs est connexe par arcs.

Démonstration. Soit f une application continue de A dans B , avec A connexe par arcs, et c et d deux points de $f(A)$. On dispose de a et b dans A vérifiant $f(a) = c$ et $f(b) = d$, et donc aussi d'un chemin g continu dans A de a à b . Alors $f \circ g$ est un chemin continu dans B joignant $f(a)$ à $f(b)$. \square

Proposition 6 - 6

Dans \mathbf{R} il y a identité entre les intervalles, les parties connexes par arcs, les parties étoilées et les parties convexes.

Démonstration. Un convexe étant étoilé, un étoilé étant connexe par arcs et un intervalle étant convexe, il suffit de montrer que les connexes par arcs sont des intervalles.

Soit A un connexe par arcs inclus dans \mathbf{R} et a et b dans A . Soit f un chemin continu dans A joignant a à b . D'après le théorème de BOLZANO dans \mathbf{R} , dit des valeurs intermédiaires, l'image de f contient $[a; b]$ et donc A aussi.

Il en résulte que A contient $] \inf A; \sup A [$ (avec la convention $\inf A = -\infty$ si A n'est pas minoré et $\sup A = +\infty$ si A n'est pas majoré). En effet si c et d vérifient $\inf A < c \leq d < \sup A$, on dispose de a et b dans A tels que $a < c \leq d < b$ et, comme $[a; b] \subset A$, c et d sont dans A .

On en déduit $] \inf A; \sup A [\subset A \subset [\inf A; \sup A]$ et donc A est un intervalle. \square

Proposition 6 - 7

Soit A une partie connexe par arcs et f une application continue de A dans $\{0, 1\}$ ou plus généralement dans un espace discret (i.e. dont tous les points sont isolés). Alors f est constante.

Démonstration. D'après le théorème de BOLZANO, l'image par f de A est connexe par arcs. Mais un connexe par arcs dont tous les points sont isolés est un singleton. \square

3

Arcs paramétrés



Maria Gaetana AGNESI (1718-1799) est née à Milan. À neuf ans, devant une assemblée réunie pour l'entendre, elle présente de mémoire un discours d'une heure, en latin, sur le sujet du droit des femmes à l'éducation. Son œuvre principale, les *Institutions analytiques*, paraît en 1748. Écrites en italien, « à l'usage de la jeunesse italienne », elles présentent un exposé méthodique, uniforme et clair, réarrangeant l'ordre des matières et apportant des améliorations personnelles. En particulier elle unifie les notations de LEIBNIZ et de NEWTON.

L'accueil fait à l'ouvrage est excellent. Le pape BENOÎT XIV lui écrit qu'il voit ce que son œuvre peut apporter à la reconnaissance de l'Italie et de l'Académie de Bologne. Il a lu quelques-uns de ses chapitres sur l'algèbre élémentaire et la nomme immédiatement lectrice honoraire à l'université de Bologne (qui fait alors partie des

États pontificaux). Il demande qu'on lui confère une chaire de mathématiques et, sa nomination faite, l'en informe le 26 septembre 1750, soulignant que ce sont ses seuls mérites qui lui donnent droit à cette chaire. Son nom demeurera durant quarante-cinq ans dans les registres de l'université, mais elle n'ira jamais à Bologne.

La courbe d'équation $(x^2 + a^2)y = a^3$ est une courbe en cloche étudiée par AGNESI (et d'autres). En 1703, le mathématicien Guido GRANDI la nomme versoria. C'est une métaphore : le mot désigne une corde attachée à l'extrémité d'une voile. Maria AGNESI l'appelle versiera. Puis John COLSON, en traduisant en anglais le manuel de Maria AGNESI, nomme cette courbe Witch of AGNESI, du vieil italien *avverseria*, qui signifie l'adversaire et désigne la sorcière, la diablesse. Et c'est toujours sous ce nom que cette courbe est connue aujourd'hui : la Sorcière d'AGNESI.



Le programme se restreint explicitement au cas $k = 1$, mais pour l'étude de la convexité, il est utile de savoir utiliser la dérivée seconde.

Définition 6 - 7

On appelle **courbe** de classe C^k dans E (pour $k \in \mathbf{N}^*$), tout sous-ensemble Γ de points E tel qu'il existe un intervalle ouvert non vide I de \mathbf{R} et une application γ de classe C^k de I dans E , dont l'image est Γ .

On dit que le couple (I, γ) est un **arc paramétré** de support Γ et que γ est une représentation paramétrique de la courbe Γ . On dit qu'un réel t de I est un paramètre et qu'un point M de Γ admet t pour paramètre si $M = \gamma(t)$.

Le point M est dit **régulier** pour la représentation paramétrique γ si $\gamma'(t) \neq 0$. Sinon on dit que M est un point **critique** (ou **stationnaire**).



On dit qu'un paramètre t est bi-régulier si $k \geq 2$ et si $(\gamma'(t), \gamma''(t))$ est une famille libre.

Proposition 6 - 8

Soit f dans $D^1(I, J)$ avec J un intervalle réel, et γ dans $D^1(J, E)$. Alors $\gamma \circ f$ est dans $D^1(I, E)$ et sa dérivée est donnée par $\gamma' \circ f \cdot f'$.

Pour n dans \mathbf{N}^* , si de plus f et γ sont n -fois (continûment) dérivables, alors il en est de même pour $\gamma \circ f$.

Démonstration. On écrit, pour x et a dans I et y dans J , $f(x) = f(a) + (x - a)\varphi_f(x)$ et $\gamma(y) = \gamma(f(a)) + (y - f(a))\varphi_\gamma(y)$, avec φ_f continue en a et φ_γ continue en $f(a)$. Il vient $\gamma \circ f(x) = \gamma \circ f(a) + (x - a)\varphi_f(x)\varphi_\gamma(f(x))$ et, par continuité en a de $\varphi_f \times \varphi_\gamma \circ f$, le résultat en découle.

Le résultat général s'obtient directement par récurrence. □

Dans la suite (I, γ) est un arc paramétré de classe C^k , avec $k \geq 1$.

Pour aller plus loin

Un changement de paramétrage C^k -admissible pour (I, γ) est une bijection φ de classe C^k de J sur I , de bijection réciproque de classe C^k . L'arc $(J, \gamma \circ \varphi)$ est alors un paramétrage admissible de (I, γ) .

Si φ est strictement croissante, on dit que (I, γ) et $(J, \gamma \circ \varphi)$ sont parcourus dans le même sens. Sinon φ est strictement décroissante et on dit que (I, γ) et $(J, \gamma \circ \varphi)$ sont parcourus en sens opposé.

Ainsi il y a deux sens de parcours possibles pour un arc (I, γ) .

Définition 6 - 8

Si le vecteur $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}$ admet une limite quand t tend vers t_0 par valeurs supérieures (respectivement inférieures), on dit que l'arc (I, γ) admet une **demi-tangente** en $\gamma(t_0)$ et cette demi-tangente est la droite passant par $\gamma(t_0)$ et dirigée par cette limite.

On dit qu'il admet une **tangente** si les deux demi-tangentes existent et sont égales, i.e. si les limites à droite et à gauche sont (non nulles et) égales ou opposées.

Proposition 6 - 9

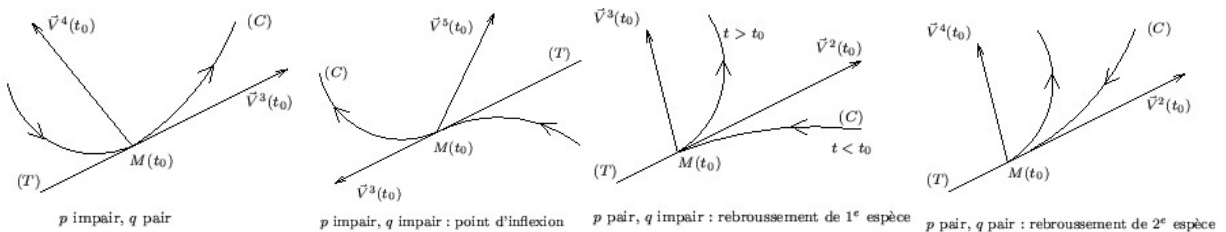
Si (I, γ) est un arc de classe C^1 et si, pour t_0 dans I , $\gamma'(t_0) \neq 0$, alors (I, γ) admet une tangente en t_0 , dirigée par $\gamma'(t_0) \neq 0$.

Démonstration. On écrit $\gamma(t) - \gamma(t_0) = (t - t_0)\varphi_\gamma(t)$. Comme $\gamma'(t_0) = \varphi_\gamma(t_0)$ et que ce vecteur est non nul, on dispose d'un voisinage de t_0 où φ_γ ne s'annule pas. Sur ce voisinage, on a

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|} = \operatorname{sgn}(t - t_0) \frac{\varphi_\gamma(t)}{\|\varphi_\gamma(t)\|}$$

et la quantité $\frac{\varphi_\gamma(t)}{\|\varphi_\gamma(t)\|}$ tend vers $\frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$ par continuité de la norme. En notant T ce vecteur, on en déduit que $\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}$ admet une limite quand t tend vers t_0 par valeurs supérieures égale à T , et par valeurs inférieures égale à $-T$.

L'assertion s'ensuit. □



Pour aller plus loin

En fait l'allure de Γ au voisinage de $\gamma(t_0)$ peut-être précisée si on dispose de deux entiers p et q tels que $\gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $\det(\gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)) \neq 0$, en choisissant p et q minimaux pour ces propriétés. On obtient

- un point ordinaire si p est impair et q pair (méplat si $q \geq 4$) : seule la tangente ne traverse pas la courbe (parmi les droites passant par $\gamma(t_0)$), au moins localement.
- un point d'inflexion si p et q sont impairs : toutes les droites traversent la courbe.
- un point de rebroussement de première espèce si p est pair et q impair : seule la tangente traverse la courbe.
- un point de rebroussement de seconde espèce si p et q sont pairs : aucune droite ne traverse la courbe.

Propriétés 6 - 1

Soit M un point régulier de Γ , avec $M = \gamma(t)$. La droite passant par M et dirigée par $\gamma'(t)$ est tangente à Γ et est la position limite des sécantes (MN) à Γ passant par M lorsque N tend vers M ou, plus précisément, lorsque s tend vers t , avec $N = \gamma(s)$.

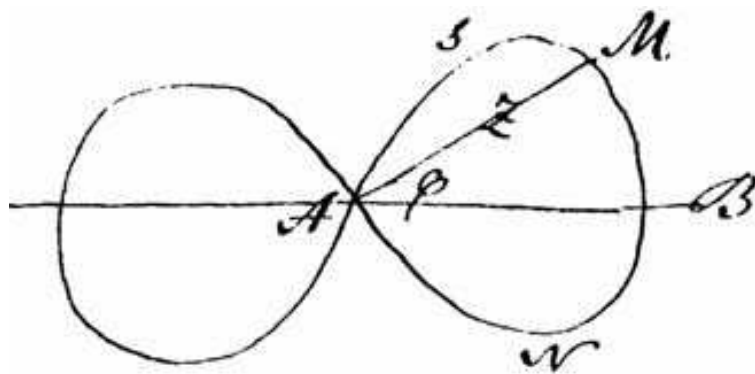
Si on rapporte le plan à un repère orthonormé et si $\gamma = (x, y)$, un point N appartient à la tangente en M à Γ si et seulement si $\det(\overrightarrow{MN}, \gamma'(t)) = 0$, i.e.

$$y'(t)(X - x(t)) = x'(t)(Y - y(t))$$

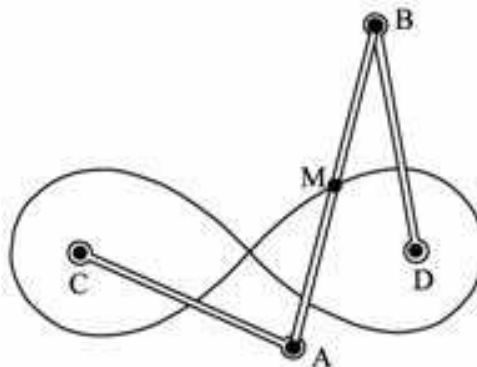
en notant $N = (X, Y)$. Par ailleurs N appartient à la normale en M à Γ si et seulement si $\langle \overrightarrow{MN} \mid \gamma'(t) \rangle = 0$, i.e.

$$x'(t)(X - x(t)) + y'(t)(Y - y(t)) = 0.$$

En 1694 Jakob BERNOULLI publia dans *Acta Eruditorum* une courbe qu'il appela lemniscate, du grec *lêmniskos* et latin *lemniscatus* qui signifient ruban. Ses recherches sur la courbe élastique l'ont amené à définir cette courbe dont le calcul de la longueur d'un arc conduit plus tard à l'introduction des fonctions elliptiques. La lemniscate de BERNOULLI est l'ensemble des points du plan dont le produit des distances à deux points fixes F et F' , les foyers de la lemniscate, est constant.



Une équation cartésienne de la lemniscate est donc $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Le mécanisme pour la tracer, donné par Arthur CAYLEY (1821–1895) est constitué d'un parallélogramme (croisé) articulé ABCD de côtés $AC = BD = a$ et $AB = CD = a^2$. Les points C et D sont fixés au plan ; quand les points A et B décrivent respectivement les cercles de centres C et D et de rayon a , le milieu M de $[A; B]$ décrit la lemniscate de foyers C et D.



La longueur d'un arc de cette courbe (pour $a = 1$) mène à l'intégrale $\int_0^t \frac{du}{\sqrt[4]{1-u^4}}$, autrement dit à la recherche d'une primitive à la fonction $u \mapsto 1/\sqrt[4]{1-u^4}$. Par analogie avec la relation $\arcsin'(u) = 1/\sqrt{1-u^2}$, on note la longueur de la lemniscate 2ϖ avec

$$\varpi = 2 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt[4]{1-u^4}} = 2,6220575542921198104648395 \dots$$



Le 30 mai 1799 Carl Friedrich GAUSS se rend compte qu'il a déjà calculé un nombre qui a les mêmes décimales que π/ϖ , à savoir la moyenne arithmético-géométrique de 1 et $\sqrt{2}$. Il entreprend alors, avec succès, de démontrer cette relation !

Exemple 6 - 4

La lemniscate de BERNOULLI est définie par $\gamma(t) = \left(\frac{t}{t^4+1}, \frac{t^3}{t^4+1} \right)$.

Le paramétrage est défini sur \mathbf{R} , de classe C^∞ et on a

$$\gamma'(t) = \frac{1}{(1+t^4)^2} (1-3t^4, t^2(3-t^4)).$$

Il en résulte que tous les points sont réguliers et que la tangente en $\gamma(t)$ est dirigée par $(1-3t^4, t^2(t^4-3))$. Une équation en est donc

$$t^2(t^4-3)x - (1-3t^4)y = \frac{t^3(3-t^4)}{t^4+1} - \frac{(1-3t^4)t^3}{t^4+1} = 2t^3.$$

Exemple 6 - 5

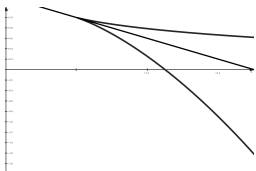
Soit la courbe plane définie par $\gamma(t) = \left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{2t-1}{t^2} \right)$.

On prend $I = \mathbf{R}_+^*$. En tant que fraction rationnelle définie sur \mathbf{R}^* , γ est de classe C^∞ sur I et on a, pour t dans I ,

$$\gamma'(t) = \left(\frac{t^2-1}{2t^2}, \frac{2(1-t)}{t^3} \right).$$

Il en résulte que 1 est un paramètre singulier, tandis que tous les autres sont réguliers. En les points réguliers la tangente est dirigée par $(t(1+t), -4)$ et donc la tangente forme un angle avec la direction horizontale dont la tangente est égale à $-\frac{4}{t(1+t)}$.

On peut également étudier le point stationnaire. Comme on peut le pressentir avec la formule précédente, la tangente y est dirigée par le vecteur $(2, -4)$. En effet on a $\gamma''(t) = \frac{1}{t^4}(t, 2(2t-3))$ et donc $\gamma''(1) = (1, -2)$.



Le folium de DESCARTES (René DESCARTES, 1596–1650) est défini par $\gamma(t) = \left(\frac{t}{t^3+1}, \frac{t^2}{t^3+1} \right)$.

Le paramétrage est défini sur $] -\infty; -1[$ et $] -1; +\infty[$, de classe C^∞ et on a

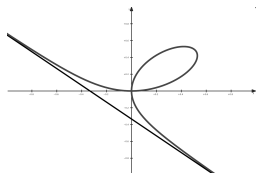
$$\gamma'(t) = \frac{1}{(1+t^3)^2} (1-2t^3, t(2-t^3)).$$

Exemple 6 - 6

Il en résulte que tous les points sont réguliers. On peut étudier le comportement quand t s'approche de -1 . On constate $\gamma(t) \sim \frac{1}{3(t+1)}(-1, 1)$ et on s'intéresse donc à

$$\gamma - \frac{1}{3(t+1)}(-1, 1) = \frac{1}{3(t^3+1)}((1+t)^2, (2t-1)(t+1)) = \frac{1}{3(t^2-t+1)}(1+t, 2t-1)$$

et donc le folium admet une parallèle à la seconde bissectrice comme asymptote (d'équation $3(x+y)+1=0$).



4 Fonctions de plusieurs variables

On note U un ouvert de \mathbf{R}^n ou, plus généralement, d'un espace vectoriel normé de dimension finie E , et $f : U \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction à valeurs réelles, ou plus généralement dans \mathbf{R}^m ou dans un espace vectoriel normé de dimension finie F .

Dans le cas $U \subset \mathbf{R}^n$, on peut considérer f comme une fonction d'une seule variable en fixant les $n-1$ autres. Par exemple, si $n=2$, on s'intéresse à $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$ et $x_2 \mapsto f(a_1, x_2)$ afin d'étudier f au voisinage de (a_1, a_2) . Cette étude est a priori insuffisante, ne serait-ce que parce que la continuité des applications partielles n'entraîne pas celle de la fonction.

On peut tout de même définir les dérivées partielles comme les limites des taux d'accroissement de ces fonctions partielles (si elle existent) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1+h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2+h) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

On note parfois $f_{x_1}(a_1, a_2)$, $D_1 f(a_1, a_2)$ ou $\partial_1 f(a_1, a_2)$ au lieu de $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$, et de même pour les autres dérivées partielles.

Dérivée directionnelle

Soit f une application de U dans F et a un point de U . Pour tout vecteur u de E , la dérivée directionnelle de f au point a selon le vecteur u , notée $D_u f(a)$, est donnée par la formule

$$D_u f(a) = \partial_u f(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a+hu) - f(a))$$

sous réserve d'existence. L'application dérivée de f selon le vecteur u est notée $D_u f$.

Définition 6 - 9

Dérivée directionnelle en coordonnées

Avec les mêmes notations que précédemment, si une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ de E est fixée, on note, pour x dans U avec $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ et $D_i f(a)$,

$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$ la quantité $D_{e_i} f(a)$.

Définition 6 - 10

Danger

La notion de dérivée directionnelle ne dépend pas de la base choisie, mais x_i en dépend et donc la notation $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ peut se révéler inadaptée.

Géométriquement la courbe d'équation $y = f(x_1, a_2)$ est l'intersection de la surface d'équation $y = f(x_1, x_2)$ avec le plan d'équation $x_2 = a_2$. La pente de sa tangente en (a_1, a_2) est donnée par la dérivée partielle par rapport à x_1 en (a_1, a_2) , i.e. par $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)$. On a donc un des vecteurs tangents à la surface d'équation $y = f(x_1, x_2)$ au point (a_1, a_2) . Comme un plan vectoriel est déterminé par deux vecteurs indépendants, i.e. par deux tangentes à la surface, on en déduit que si la surface admet un plan tangent, c'est nécessairement le plan d'équation

$$y = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \cdot (x_2 - a_2)$$

puisqu'il admet comme vecteur normal un vecteur perpendiculaire à la fois à

$$\left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)\right) \quad \text{et à} \quad \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)\right).$$

Néanmoins la quantité $f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \cdot (x_2 - a_2)$ n'est pas nécessairement une bonne approximation de $f(x_1, x_2)$ au voisinage de (a_1, a_2) . En particulier si $D_u f(a)$ existe, la question se pose de savoir si l'approximation précédente est cohérente avec la définition de $D_u f(a)$ comme limite, autrement dit si, dans le cas $E = \mathbf{R}^2$, $\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y - f(a_1, a_2)}{h}$ où y représente l'approximation linéaire en $(a_1, a_2) + hu$, i.e. en $(a_1 + hu_1, a_2 + hu_2)$ si $u = (u_1, u_2)$, ce qui s'écrit

$$\frac{\partial f}{\partial u}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \cdot u_2.$$

Par exemple si $f(x) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) = \begin{pmatrix} \sqrt{2}x_1 + \sin(x_1 + x_2) \\ \sqrt{2}x_2 + \cos(x_1 - x_2) \end{pmatrix}$, alors au voisinage de $(0, 0)$ on peut écrire

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sqrt{2} + 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

puisque $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i, j \leq 2}$ est donné par $\begin{pmatrix} \sqrt{2} + \cos(x_1 + x_2) & \cos(x_1 + x_2) \\ -\sin(x_1 - x_2) & \sqrt{2} + \sin(x_1 - x_2) \end{pmatrix}$. Au final on voit que l'approximation linéaire d'une fonction de plusieurs variables fait apparaître des applications linéaires.

5

Différentiabilité

Dans la suite de ce chapitre U désigne un ouvert de E et a un point de U . La notion de différentiabilité a été formalisée par Otto STOLZ (1842–1905) et Maurice FRÉCHET (1878–1973). Ce dernier fut, entre autres, professeur en mathématiques spéciales au lycée Clemenceau à Nantes.

Otto STOLZ 1887 - Maurice FRÉCHET 1906

Une fonction f de U dans F est différentiable en un point a de U s'il existe une application linéaire $f'(a)$, ou plus souvent notée df_a ou $df(a)$, de E dans F et une fonction r de U dans F , continue et nulle en a telles que

$$\forall x \in U, \quad f(x) = f(a) + df(a) \cdot (x - a) + r(x) \|x - a\|,$$

i.e.

$$f(a + h) = f(a) + df(a) \cdot h + o(\|h\|)$$

au voisinage de a .

L'application linéaire $df(a)$ est appelée différentielle de f en a , ou encore application linéaire tangente à f en a .

La fonction affine $h \mapsto f(a) + df(a) \cdot h$ est appelée application affine tangente à f en a ou encore (avec un abus de langage) développement limité à l'ordre 1 de f en a .

Définition 6 - 11

Le programme suggère d'utiliser la notation $df(a)$ pour la différentielle en a . Comme c'est une application linéaire et donc une fonction, il faut pouvoir l'évaluer en un vecteur de E . Comme il n'est pas commode d'utiliser deux parenthèses successives, le programme utilise la notation $df(a) \cdot u$ pour désigner la différentielle en a appliquée au vecteur u .

D'autres notations existent comme : $df_a(u)$ ou $f'(a) \cdot u$.

On note $o(h)$ au lieu de $o(\|h\|)$ car, par équivalence des normes, cette notion ne dépend pas de la norme choisie sur E .

Notation

Si $E = \mathbf{R}$, alors on a $df(a) \cdot 1 = f'(a)$ (au sens habituel de nombre ou de vecteur dérivé) ou encore $df(a) : h \mapsto hf'(a)$. Et donc noter $f'(a)$ la différentielle de f en a est un abus de notation puisqu'on identifie le nombre ou le vecteur $f'(a)$ avec l'application donnée par la multiplication par $f'(a)$, à moins que ce ne soit le contraire!

Remarque 6 - 2

Formulation de CARATHÉODORY

La fonction f est différentiable en a si et seulement s'il existe φ de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ continue en a telle que

$$\forall x \in U, \quad f(x) = f(a) + \varphi(x) \cdot (x - a)$$

et on a alors $df(a) = \varphi(a)$.

Proposition 6 - 10



Ce résultat est hors-programme.

Démonstration. Si φ est donnée, on pose $df(a) = \varphi(a)$, $r(a) = 0$ et $r(x) = (\varphi(x) - \varphi(a)) \cdot \left(\frac{x-a}{\|x-a\|} \right)$ si $x \neq a$. Par continuité de φ en a , $\|\varphi(x) - \varphi(a)\|$ tend vers 0 quand x tend vers a pour toute norme sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{L}(E, F)$. En choisissant la norme subordonnée donnée par la formule $\|u\| = \sup \{\|u(x)\| \mid x \in E, \|x\| = 1\}$, on en déduit que la valeur de $\varphi(x) - \varphi(a)$ en un vecteur de norme 1 est un vecteur dont la norme tend vers 0. Autrement dit r est continue et nulle en a .

Réciproquement on utilise le théorème de HAHN-BANACH (voir exercice 3 - 18) pour construire une forme linéaire ℓ sur E valant $\|x - a\|$ en $x - a$ et de norme 1. On pose alors $\varphi(a) = df(a)$ et, si $x \neq a$, $\varphi(x) = df(a) + \ell \otimes r(x)$ où $\ell \otimes r(x)$ est défini par $v \mapsto \ell(v)r(x)$. Alors $\|\varphi(x) - df(a)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \|r(x)\|_F$ pour la norme précédemment utilisée, et donc φ est continue en a . \square

Le théorème de HAHN-BANACH peut se démontrer par récurrence sur la dimension de E . Cette approche marche encore en dimension infinie si on suppose les formes linéaires continues et si on admet le lemme de ZORN, i.e. les récurrences transfinites.

On suppose avoir une forme linéaire φ sur E' , avec $E' \subsetneq E$, de norme 1 et on veut l'étendre à E . On se donne y dans $E \setminus E'$ et α dans \mathbf{R} . On étend φ en posant $\varphi(y) = \alpha$ ou encore $\varphi(x + ty) = \varphi(x) + t\alpha$ pour (x, t) dans $E' \times \mathbf{R}$. Il s'agit alors de vérifier $\varphi(x + ty) \leq \|x + ty\|$ pour tout (x, t) dans $E' \times \mathbf{R}$ car alors la même inégalité sera vraie en passant à la valeur absolue (par linéarité de φ et parité de la norme). En divisant par la valeur absolue de t , s'il est non nul, par stabilité de E' , on doit donc simplement vérifier l'inégalité pour $t = \pm 1$, i.e. $\varphi(x) \pm \alpha \leq \|x \pm y\|$. Autrement dit on doit vérifier qu'il est possible de trouver α tel que

$$\sup_{x \in E'} (\varphi(x) - \|x - y\|) \leq \alpha \leq \inf_{x \in E'} (\|x + y\| - \varphi(x)).$$

Or, pour x et x' dans E' , on a

$$\varphi(x) + \varphi(x') = \varphi(x + x') \leq \|x + x'\| \leq \|x - y\| + \|x' - y\|$$

et donc le supremum précédent est bien inférieur à l'infimum. Pour un tel α , l'extension de φ est bien de norme 1 et, en procédant par récurrence, φ peut être étendue à E .

Aparté

On notera que la norme ne joue aucun rôle en dehors du fait qu'elle est multiplicative pour un scalaire positif et sous-additive. En fait on peut remplacer la norme par une fonction convexe.

Une forme plus géométrique du théorème de HAHN-BANACH est la suivante : si on se donne deux convexes (non vides) disjoints dont l'un est ouvert, alors il existe un hyperplan (fermé) les séparant, i.e. tel que chacun des convexes est situé dans un demi-espace fermé différent.

Si on suppose l'un fermé et l'autre compact, alors on peut même séparer les deux convexes de façon stricte, i.e. les placer dans des demi-espaces ouverts différents, et même dans des demi-espaces fermés d'intersection vide.

Pour aller plus loin

Comme $df(a)$ est linéaire, elle est continue sur E et donc en 0. Il en résulte que si f est différentiable en a , alors elle y est continue. De plus, pour tout u non nul dans E , et h dans \mathbf{R} , on a $f(a + hu) = f(a) + h df(a) \cdot u + o(h)$ et donc

$$D_u f(a) = df(a) \cdot u .$$

Propriétés 6 - 2

Il en résulte que si f est différentiable en a , elle admet des dérivées partielles selon toutes les directions. De plus sa différentielle est unique et est donnée par la formule

$$df(a) \cdot \left(\sum_{i=1}^n h_i e_i \right) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i .$$

Exemples 6 - 7

1. Si f est affine de partie linéaire ℓ , i.e. si $f(x) = a + \ell(x)$, alors f est différentiable en tout point de U , de différentielle constante égale à $\ell : df(x) = \ell$.
2. Si f est le carré d'une norme euclidienne, associée à un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$, alors f est différentiable sur E et on a $df(a) \cdot h = 2 \langle a | h \rangle$ car $\|a + h\|^2 = \|a\|^2 + 2 \langle a | h \rangle + \|h\|^2$ et $\|h\|^2 = o(h)$.

Définition 6 - 12

Si f est différentiable en tout point de U , on dit qu'elle est différentiable sur U et l'application df de U dans $\mathcal{L}(E, F)$, donnée par $a \mapsto df(a)$, est appelée différentielle de f sur U .

On prendra garde au problème que soulève ce dernier exemple (étudié par Otto STOLZ) :

Danger

On pose $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. Alors f est différentiable sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0, 0)$. Pourtant, pour a réel et t non nul, on a $f(t, at^2) = \frac{a}{1 + a^2}$, de sorte que f n'est pas continue en $(0, 0)$ puisqu'elle prend toutes les valeurs entre $-1/2$ et $1/2$ dans tout voisinage de l'origine !

Définition 6 - 13

On appelle matrice jacobienne de f en a relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' la matrice $\text{Jac}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}(a)$ donnée par

$$\text{Jac}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}(a) = \text{Mat}(df(a) ; \mathcal{B}, \mathcal{B}') .$$

Si $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, on écrit $\text{Jac}_{f; \mathcal{B}}(a)$ et on parle de la matrice jacobienne de f en a relativement à \mathcal{B} . Son déterminant et sa trace sont alors indépendants de \mathcal{B} . On les appelle (déterminant) jacobien et divergence de f en a . On note

$$J_f(a) = \det(\text{Jac}_{f; \mathcal{B}}(a)) \quad \text{et} \quad \text{div } f(a) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(a) = \text{Tr}(\text{Jac}_{f; \mathcal{B}}(a)) .$$

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont des bases de E et F , disons $\mathcal{B} = (u_1, \dots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, \dots, v_m)$. On peut écrire $f = (f_1, \dots, f_m)$ avec $f_i = v_i^* \circ f$, de sorte qu'on a $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) = v_i^* \circ df(a) \cdot u_j$.

Autrement dit

$$\text{Mat}(df(a) ; \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Ainsi

1. Pour la transformation polaire, on a

$$\text{Jac}_{\varphi; (can), (can)}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J_{\varphi}(r, \theta) = r.$$

On notera que relativement à la base (u_{θ}, v_{θ}) la matrice jacobienne est diagonale, de diagonale $(1, r)$.

2. Pour la transformation cylindrique, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & r \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le jacobien est donc égal à r .

3. Pour la transformation sphérique, on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & 0 & r \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le jacobien est donc égal à $r^2 \cos(\theta)$.

Quand $F = \mathbf{R}$, la matrice jacobienne est appelée gradient et est notée ∇f , i.e.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Si E est euclidien, on peut donner une interprétation géométrique de ce gradient, en suivant William Rowan HAMILTON (1853) : comme on a

$$f(a + tu) = f(a) + t \nabla f(a) \cdot u + o(t)$$

on peut interpréter le vecteur ligne (i.e. la matrice de forme linéaire) $\nabla f(a)$ comme un vecteur colonne et le produit du vecteur ligne $\nabla f(a)$ avec le vecteur colonne u comme le produit scalaire des deux vecteurs $\nabla f(a)$ et u .

On peut alors tracer les courbes de niveau de f , i.e. les ensembles $f^{-1}(b)$ pour b variant dans \mathbf{R} et placer le vecteur $\nabla f(a)$ au point a . On déduit de l'expression locale précédente que :

- le vecteur $\nabla f(a)$ est orthogonal à la courbe de niveau passant par a ,
- les valeurs de f croissent dans les directions où $\langle \nabla f(a) | u \rangle$ est positif, et décroissent dans les directions où $\langle \nabla f(a) | u \rangle$ est négatif,
- le maximum de croissance est atteint dans la direction $\nabla f(a)$, et la plus grande pente négative est dans la direction $-\nabla f(a)$,
- enfin une condition nécessaire pour f ait un extremum local en a est $\nabla f(a) = 0$.

Danger

L'identification entre vecteur ligne et vecteur colonne nécessite de faire attention aux bases choisies et l'interprétation comme un produit scalaire se fait en supposant que ces bases sont orthonormées. C'est l'objet du théorème de FRIGYES RIESZ (1880–1956) que de permettre de représenter toute forme linéaire comme le produit scalaire avec un vecteur, cette identification étant canonique une fois le produit scalaire donné, i.e. elle ne dépend que de la structure euclidienne.

Théorème 6 - 2

Théorème de représentation de RIESZ

Les espaces vectoriels E et E^* sont isomorphes. Lorsque E est euclidien, la donnée du produit scalaire permet de rendre cet isomorphisme canonique via $a \mapsto \varphi_a$ avec φ_a dans E^* donnée par $\varphi_a(x) = \langle a | x \rangle$.

Démonstration. L'application φ_a est linéaire par bilinéarité du produit scalaire, tout comme l'application $a \mapsto \varphi_a$. Elle est injective car si $\varphi_a = 0$, alors en particulier $\varphi_a(a) = 0$ et donc $\|a\|^2 = 0$, soit $a = 0$. Par dimension on a l'isomorphisme voulu. \square

Remarque 6 - 3

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ sa base duale, i.e. telle que $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$. L'isomorphisme précédent permet d'identifier $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ avec une base de E . Alors $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est orthonormée si et seulement si elle coïncide avec $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$, i.e. si et seulement si elle est auto-duale.

Pour aller plus loin

Ce théorème est encore vrai en dimension infinie moyennant une hypothèse de complétude, i.e. il est vrai dans les espaces de HILBERT. Il repose sur le fait qu'un sous-espace vectoriel *fermé* d'un espace de HILBERT admet un supplémentaire orthogonal, puisque la projection orthogonale est alors donnée par la formule habituelle dans une base hilbertienne.

Définition 6 - 14

Soit f une application de U dans \mathbf{R} , différentiable en a . Si E est euclidien, l'unique vecteur v de E tel que, pour tout u dans E , on ait $df(a) \cdot u = \langle v | u \rangle$ est appelé gradient de f en a et noté $\nabla f(a)$.

Propriété 6 - 3

Si $F = \mathbf{R}$ et si \mathcal{B} est une base orthonormée de E , alors $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) e_i$.

Puisque, pour tout u dans U , la dérivée de $t \mapsto f(a + tu)$ en 0 est $\nabla f(a) \cdot u$, ou $\langle \nabla f(a) | u \rangle$ si E est euclidien, il vient

Propriété 6 - 4

Si $F = \mathbf{R}$ et si f admet un extremum en a , alors $\nabla f(a) = 0$.

Définition 6 - 15

On suppose $F = \mathbf{R}$. Un point d'annulation du gradient est appelé point critique de f . La valeur de f en un point critique est appelée valeur critique.

Aparté

En général un point critique est un point où la différentielle de f n'est pas de rang maximal, i.e. de rang égal à $\min(m, n)$. Les autres points sont dits réguliers.

6

Opérations algébriques

Proposition 6 - 11

Si f et g sont deux applications de U dans F différentiables en a , alors toute combinaison linéaire de f et g est différentiable en a et, pour tous scalaires α et β , on a $d(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha df(a) + \beta dg(a)$.

Démonstration. Puisque $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathfrak{o}(h)$ sont des espaces vectoriels, on a directement, pour h dans U ,

$$(\alpha f + \beta g)(a + h) = (\alpha f + \beta g)(a) + (\alpha df(a) + \beta dg(a)) \cdot h + \mathfrak{o}(h),$$

d'où l'assertion. □

Proposition 6 - 12

Si f et g sont deux applications de U dans respectivement F et G et si B est une application bilinéaire de $F \times G$ dans H , avec f et g différentiables en a , alors $B(f, g)$ l'est également, en notant $B(f, g)$ l'application φ donnée par $\varphi(x) = B(f(x), g(x))$. De plus, pour tout u dans E , on a

$$d\varphi(a) \cdot u = B(df(a) \cdot u, g(a)) + B(f(a), dg(a) \cdot u)$$

i.e. $dB(f, g) = B(df, g) + B(f, dg)$.

Démonstration. Soit x dans U . On note $h = \Delta x = x - a$, $\Delta f = f(x) - f(a)$ et $\Delta g = g(x) - g(a)$. Il vient, par bilinéarité de B ,

$$\begin{aligned} B(f(x), g(x)) &= B(f(a) + \Delta f, g(a) + \Delta g) \\ &= B(f(a), g(a)) + B(\Delta f, g(a)) + B(f(a), \Delta g) + B(\Delta f, \Delta g). \end{aligned}$$

Puisque tous les espaces considérés sont de dimensions finies, B est continue et on dispose d'un réel K tel que, pour y dans F et z dans G , on a $\|B(y, z)\| \leq K \|y\| \cdot \|z\|$ et donc $B(\mathfrak{o}(h), z) = \mathfrak{o}(h)$, $B(y, \mathfrak{o}(h)) = \mathfrak{o}(h)$ et $B(\mathfrak{o}(h), \mathfrak{o}(h)) = \mathfrak{o}(h)$. Or, par différentiabilité de f et g en a , on a $\Delta f = df(a) \cdot h + \mathfrak{o}(h)$ et $\Delta g = dg(a) \cdot h + \mathfrak{o}(h)$ et donc, toujours par bilinéarité de B :

$$B(f(x), g(x)) = B(f(a), g(a)) + B(df(a) \cdot h, g(a)) + B(f(a), dg(a) \cdot h) + \mathfrak{o}(h),$$

d'où l'assertion. □

Exercice

Écrire la démonstration en utilisant la formulation de CARATHÉODORY.

Théorème 6 - 3

Soit f de U dans F et g de V dans G , où V est un ouvert de F contenant $f(U)$. Si f est différentiable en a et g l'est en $f(a)$, alors $g \circ f$ l'est en a et on a $d(g \circ f) = dg \circ df$, i.e. pour tout u dans E , on a

$$d(g \circ f)(a) \cdot u = dg(f(a)) \cdot df(a) \cdot u.$$

Démonstration. On utilise la formulation de CARATHÉODORY. On écrit pour x dans U et y dans V

$$f(x) = f(a) + \varphi_f(x) \cdot (x - a) \quad \text{et} \quad g(y) = g(f(a)) + \varphi_g(y) \cdot (y - f(a))$$

et il vient

$$g \circ f(x) = g(f(a)) + \varphi_g(f(x)) \cdot (\varphi_f(x) \cdot (x - a))$$

d'où le résultat puisque l'application $x \mapsto \varphi_g(f(x)) \circ \varphi_f(x)$ est à valeurs dans $\mathcal{L}(E, G)$ et est continue en a en tant que composée de telles applications. \square

La norme euclidienne est différentiable sur $E \setminus \{0\}$ et, pour x non nul dans E , la différentielle en x est donnée par $h \mapsto \left\langle \frac{x}{\|x\|} \mid h \right\rangle$.

En effet la norme est la composée de l'application f qui à x associe (x, x) , de l'application g qui à (u, v) associe $\langle u \mid v \rangle$ et de $\sqrt{\cdot}$. Comme f est linéaire, sa différentielle est elle-même, i.e. pour tout x la différentielle $df(x) = f$ et donc $df(x) \cdot h = f(h) = (h, h)$.

Comme g est bilinéaire, sa différentielle en (u, v) est $(h, k) \mapsto g(u, k) + g(h, v)$, i.e. $dg(u, v) \cdot (h, k) = \langle u \mid k \rangle + \langle h \mid v \rangle$. Pour $(u, v) = f(x) = (x, x)$ et $(h, k) = f(h) = (h, h)$, i.e. $u = v = x$ et $h = k$, on obtient $2 \langle x \mid h \rangle$. D'où $d(g \circ f)(x) \cdot h = dg(f(x)) \cdot (df(x) \cdot h) = 2 \langle x \mid h \rangle$.

Enfin la différentielle de $\sqrt{\cdot}$ en a est l'application $h \mapsto \frac{h}{2\sqrt{a}}$ et donc pour $a = \langle x \mid x \rangle$ et $h = 2 \langle x \mid h \rangle$, on obtient $\frac{2 \langle x \mid h \rangle}{2\sqrt{\|x\|^2}}$, ce qui est le résultat annoncé :

$$d\sqrt{g \circ f}(x) \cdot h = d\sqrt{(g(f(x)))} \cdot (dg(f(x)) \cdot (df(x) \cdot h)) = \frac{\langle x \mid h \rangle}{\|x\|} .$$

Exemple 6 - 8

Règle de la chaîne – Formule de LEIBNIZ

On reprend les notations du théorème précédent et on munit E, F et G de bases $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F$ et \mathcal{B}_G respectivement avec $\mathcal{B}_E = (u_k)_{1 \leq k \leq n}$, $\mathcal{B}_F = (v_j)_{1 \leq j \leq m}$ et $\mathcal{B}_G = (w_i)_{1 \leq i \leq p}$. Alors, pour $1 \leq k \leq n$ et $1 \leq i \leq p$,

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}$$

en notant $y = f(x)$ et $z = g(y) = g \circ f(x)$, autrement dit

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_k}(a) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial y_j}(f(a)) \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)$$

en notant $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$, $g(y) = g(y_1, \dots, y_m) = (g_1(y), \dots, g_p(y))$ et $g \circ f(x) = g \circ f(x_1, \dots, x_n) = ((g \circ f)_1(x), \dots, (g \circ f)_p(x))$.

Démonstration. On déduit du théorème précédent

$$\text{Jac}_{g \circ f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G}(a) = \text{Jac}_{g; \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G}(f(a)) \times \text{Jac}_{f; \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(a)$$

et la reformulation en découle. \square

Si γ est un chemin de classe C^1 de I dans U et f est de classe C^1 de U dans F , alors $f \circ \gamma$ est de classe C^1 sur I et, pour t dans I , on a

$$(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) .$$

Exemple 6 - 9

Autrement dit la tangente à l'arc paramétré par $f \circ \gamma$ en t est dirigée par l'image de la tangente en t à l'arc paramétré par γ , par l'application linéaire tangente à f en $\gamma(t)$.

Exemples 6 - 10

1. En particulier si γ paramétrise une droite, i.e. $\gamma(t) = x + th$, alors on obtient $(f \circ \gamma)'(t) = df(x + th) \cdot h$.
2. Si $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ et f est à valeurs réelles, alors $(f \circ \gamma)'(t) = \sum_{i=1}^n x'_i(t) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t))$.

Aparté

1. Étant donné une courbe en polaire, i.e. $t \mapsto (r(t), \theta(t))$, on cherche le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes. Il vient

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \dot{r} \cos(\theta) - r \dot{\theta} \sin(\theta)$$

et, de même, $\dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) + r \dot{\theta} \cos(\theta)$. En particulier l'énergie cinétique est donnée par $E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$.

2. Pour passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires, on a les formules

$$r \frac{\partial}{\partial r} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

7

Fonctions de classe C^1

Définition 6 - 16

Une application f de U dans F est dite de classe C^1 sur U si elle y est différentiable et si df est continu sur U (au sens d'une norme quelconque sur $\mathcal{L}(E, F)$).

Théorème fondamental du calcul différentiel

L'application f est de classe C^1 de U dans F si et seulement si ses dérivées partielles relativement à une base (e_1, \dots, e_n) de E existent en tout point de U et sont des fonctions continues sur U . On a alors

Théorème 6 - 5

1. Pour tout a dans U , f est différentiable en a et $df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) \cdot e_i^*$.
2. Pour tout u dans E , non nul, la dérivée directionnelle de f existe et est continue sur U . De plus $\frac{\partial f}{\partial u} = \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial f}{\partial e_i}$, en notant $u_i = e_i^*(u)$.

Démonstration (non exigible). Si f est de classe C^1 sur U , alors elle est différentiable sur U et donc y admet des dérivées partielles. De plus on a, pour tout a dans U , $\frac{\partial f}{\partial e_i}(a) = df(a) \cdot e_i$ et donc, par continuité de $a \mapsto df(a)$ et de $(\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$ de

$\mathcal{L}(E, F) \times E$ dans F , cette dernière continuité résultant de la linéarité, les dérivées partielles sont continues sur U .

Pour la réciproque, on effectue la démonstration dans le cas $n = 2$ et $F = \mathbf{R}$, elle s'étend sans difficulté au cas général. Pour $a = (a_1, a_2)$ et (x_1, x_2) dans un voisinage pour $\|\cdot\|_\infty$ de a dans U , on écrit grâce au théorème de LAGRANGE pour $t \mapsto f(t, x_2)$ et $t \mapsto f(a_1, t)$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) - f(a_1, a_2) &= f(x_1, x_2) - f(a_1, x_2) + f(a_1, x_2) - f(a_1, a_2) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2) \cdot (x_1 - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2) \cdot (x_2 - a_2) \end{aligned}$$

pour un certain ξ_1 dans $]a_1; x_1[$ et un certain ξ_2 dans $]a_2; x_2[$. On définit alors φ par $\varphi(a_1, a_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \right)$ et, si $(x_1, x_2) \neq (a_1, a_2)$,

$$\varphi(x_1, x_2) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, \xi_2) \right)$$

où, on le rappelle, ξ_1 et ξ_2 dépendent en fait de x_1 et x_2 .

Lorsque (x_1, x_2) tend vers a , ξ_1 tend vers a_1 et ξ_2 tend vers a_2 et donc, par continuité des dérivées partielles, φ est continue en a et donc f y est différentiable, d'après la formulation de CARATHÉODORY. Par définition de $\varphi(a_1, a_2)$, il vient $df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_i}(a) \cdot e_i^*$ et on en déduit que df est continu en tant que somme d'applications continues.

La formule pour $df(a) \cdot u$ en découle. □

Exemples 6 - 11

Si f est polynomiale, i.e. combinaison linéaire de monômes $x \mapsto \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ (avec α_i des entiers naturels), alors elle est de classe C^1 (et on verra qu'elle est même de classe C^∞) sur \mathbf{R}^n .

Plus généralement si f est une fonction rationnelle, i.e. un quotient de deux fonctions polynomiales (à dénominateur non nul), elle est de classe C^1 (et même C^∞) sur l'ouvert de \mathbf{R}^n où elle est définie.

Notation

L'application constante égale à e_i^* se note dx_i : en effet c'est la différentielle en tout point de l'application e_i^* , i.e. de $x \mapsto x_i$. On a donc $df(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) dx_i$.

Par exemple, pour $\theta : (x, y) \mapsto 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$ (défini sur $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}_- \times \{0\}$), on a $d\theta(x, y) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

On notera, dans cet exemple, que si $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$, alors la formule précédente exprime $\tan(\theta/2)$ en fonction de x et y , pour (x, y) dans le plan privé de la demi-droite réelle négative. On pourrait aussi définir, pour $x > 0$, θ par $\arctan(y/x)$. On vérifie plus facilement que pour la formule précédente qu'on a aussi $d\theta(x, y) = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$.

Remarque 6 - 4

L'application différentielle, de $C^1(U, F)$ dans $C^0(U, \mathcal{L}(E, F))$ est linéaire.

Dans le cas de la dimension 1, le théorème de LAGRANGE peut s'écrire comme une égalité ou une inégalité, dite des accroissements finis. Dans le cas de la dimension supérieure, l'égalité ne se généralise pas directement. Par exemple $t \mapsto e^{it}$ n'est pas injective de \mathbf{R} dans \mathbf{C} et pourtant sa dérivée ne s'annule pas.

Toutefois, comme on peut toujours tracer une droite joignant deux points de l'espace, on peut appliquer le théorème de LAGRANGE à la fonction d'une seule variable obtenue par restriction à cette droite. On en déduit

Inégalité des accroissements finis

Soit f de U dans F , de classe C^1 sur U et a et b dans U tels que le segment $[a; b]$ soit inclus dans U . Alors

$$\|f(b) - f(a)\|_F \leq \sup_{x \in [a; b]} \|df(x)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \cdot \|b - a\|_E$$

Théorème 6 - 6

et, en particulier, si U est convexe on a les résultats suivants :

1. si df est bornée sur U , alors f y est lipschitzienne ;
2. si df est nulle sur U , alors f y est constante.

Ici on a noté $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ la norme subordonnée, i.e. définie par $\|u\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup \{\|u(x)\|_F \mid x \in E, \|x\|_E = 1\}$.



Ce résultat est hors programme.

Démonstration. Cela résulte directement du théorème de LAGRANGE appliqué à la fonction g donnée par $g(t) = f(a + t(b - a))$, qui est de classe C^1 sur $[0; 1]$. On a donc $\|g(1) - g(0)\| \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \|g'(t)\|$. Comme $g'(t) = df(a + t(b - a)) \cdot (b - a)$, le résultat en découle. \square

Si f est de classe C^1 de U dans F et si γ est un arc de classe C^1 de $[0; 1]$ dans U , avec $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$, on a

Théorème 6 - 7

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt .$$

Démonstration. Cela résulte directement de la formule pour la dérivée de $f \circ \gamma$, de sa continuité et du théorème de LEIBNIZ-NEWTON. \square

Proposition 6 - 13

Si U est connexe par arcs, alors f est constante sur U si et seulement si elle y est différentiable et $df = 0$ sur U .

Démonstration. Le sens direct résulte de la définition de df . Si U est convexe, le sens réciproque résulte de l'inégalité des accroissements finis ou bien du théorème précédent en prenant γ une application affine. On obtient également la réciproque dans le cas où les points de U sont joignables par des arcs de classe C^1 . Dans le cas général (non exigible) on considère, pour a dans U et sous l'hypothèse $df = 0$ sur U , l'ensemble $f^{-1}(f(a))$. Il est non vide car il contient a . Il est fermé par continuité de f (car elle est différentiable). Enfin tout point de U admettant un voisinage convexe (par exemple une boule), l'argument précédent montre qu'il est ouvert. Par connexité, il est égal à U , i.e. f est constante. \square

8 Applications à la géométrie

Définition 6 - 17

Soit A une partie de E et a un point de A . Un vecteur v de E est dit tangent à A en a s'il existe un arc γ , défini sur un intervalle ouvert de \mathbf{R} contenant 0 et à valeurs dans A , tel qu'on ait $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$.

Exemple 6 - 12

On suppose $E = \mathbf{R}^2$, $F = \mathbf{R}$ et on s'intéresse au graphe de f , i.e. aux points x de \mathbf{R}^3 vérifiant $x = (x_1, x_2, x_3)$ avec $(x_1, x_2) \in U$ et $x_3 = f(x_1, x_2)$. Le graphe de f est alors une surface dans \mathbf{R}^3 , aussi appelée nappe paramétrée. En posant $g(x) = x_3 - f(x_1, x_2)$, on a $g(x) = 0$.

Si γ est un arc tracé sur cette surface, défini sur I avec $0 \in I$, et si f (et donc aussi g) est différentiable sur U , il vient $d(g \circ \gamma) = 0$ et donc, en posant $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$, $\gamma(0) = a$ et $\gamma'(0) = v$, on a $dg(a) \cdot v = 0$, soit

$$v_3 - df(a_1, a_2) \cdot (v_1, v_2) = 0$$

ou encore

$$v_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)v_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)v_2.$$

Définition 6 - 18

L'ensemble des vecteurs tangents en a à une surface de \mathbf{R}^3 d'équation $x_3 = f(x_1, x_2)$, avec f différentiable en a et a régulier, forme un plan vectoriel et le plan affine passant par a et admettant comme direction le plan vectoriel précédent est appelé plan affine tangent en a à la surface.

Propriétés 6 - 5

Si Σ est le graphe d'une fonction différentiable, alors une équation du plan affine tangent en a (supposé régulier) à Σ est

$$z - a_3 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) \cdot (x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) \cdot (y - a_2)$$

et donc la normale en a à ce plan est la droite passant par a et dirigée par le vecteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2), -1 \right)$.

Exemple 6 - 13

On suppose $E = \mathbf{R}^3$ et $F = \mathbf{R}$ et on s'intéresse à la surface de niveau Σ définie par $\Sigma = \{x \in U \mid f(x) = f(a)\}$. Alors un vecteur de E est tangent en a (supposé régulier) à Σ si et seulement s'il appartient au noyau de $df(a)$ puisque, si γ est tracé sur Σ , alors $f \circ \gamma$ est constant.

Autrement dit les vecteurs tangents à Σ sont orthogonaux au gradient de f .

Propriété 6 - 6

Le plan tangent en a (supposé régulier) à la surface de niveau Σ est le plan normal à $\nabla f(a)$ passant par a . Une équation de ce plan est donc

$$(x - a_1) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + (y - a_2) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + (z - a_3) \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) = 0.$$

Définition 6 - 19

Pour k entier supérieur à 1 et f de U dans F , on dit que f est de classe C^k sur U s'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que, pour tout entier i entre 1 et n , $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ existe et est de classe C^{k-1} sur U .

On dit que f est de classe C^∞ si elle est de classe C^k pour tout entier k dans \mathbf{N}^* . Enfin on convient que la classe C^0 désigne l'ensemble des fonctions continues.

Remarque 6 - 5

D'après la définition l'ensemble des fonctions de classe C^k de U dans F forme un \mathbf{R} -espace vectoriel et, en vertu du théorème fondamental du calcul différentiel, f est de classe C^k pour $k \geq 1$ si et seulement si df est de classe C^{k-1} .

Propriétés 6 - 7

Soit k dans \mathbf{N}^* .

1. L'application différentielle $f \mapsto df$ de $C^k(U, F)$ dans $C^{k-1}(U, \mathcal{L}(E, F))$ est linéaire.
2. Si f et g sont de classe C^k de U dans F et G respectivement, et si B est une application bilinéaire de $F \times G$ dans H , alors $B(f, g)$ est de classe C^k de U dans H et $d(B(f, g)) = B(df, g) + B(f, dg)$.
3. Si f et g sont de classe C^k de U dans F et de V dans G , avec $f(U) \subset V$, alors $g \circ f$ est de classe C^k sur U .
4. En particulier si f et g sont dans $C^k(U, F)$ et si $\lambda \in \mathbf{R}$, alors
 - $d(\lambda f) = \lambda df$,
 - si $F = \mathbf{R}^3$, $d(f \wedge g) = (df) \wedge g + f \wedge dg$,
 - si F est euclidien, $d\langle f | g \rangle = \langle df | g \rangle + \langle f | dg \rangle$, où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur F .
5. Pour $F = \mathbf{R}$, $C^k(U, \mathbf{R})$ est une sous-algèbre de $C^0(U, \mathbf{R})$ dont les inversibles sont les fonctions ne s'annulant nulle part sur U . Si tel est le cas, on a $d\frac{1}{f} = -\frac{df}{f^2}$.

Démonstration (non exigible). Les trois premiers points résultent des mêmes propriétés dans le cas $k = 1$. Les deux autres sont des cas particuliers pour B , puisque $(f, g) \mapsto fg$ est bilinéaire lorsque $F = G = \mathbf{R}$. \square

En 1743, EULER soulève la question de l'ordre des dérivations et semble admettre qu'il est indifférent grâce à l'exemple de f donnée par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + ny^2}$, pour (x, y) dans $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et n dans \mathbf{N}^* . En effet

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial (ny(x^2 + ny^2)^{-1/2})}{\partial x} = -\frac{nxy}{(x^2 + ny^2)^{3/2}}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial (x(x^2 + ny^2)^{-1/2})}{\partial y} = -\frac{nxy}{(x^2 + ny^2)^{3/2}}.$$

Notation

D'une façon générale, on note $\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}$ pour $\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)$, ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \left(\dots \left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} \right) \dots \right) \right) = \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} = \partial_{i_1} \dots \partial_{i_k} f$$

pour une dérivée partielle par rapport à k variables (prises dans l'ordre indiqué).

Hermann Amandus SCHWARZ est le premier à donner un critère suffisant pour que l'ordre de dérivation soit indifférent et exhibe le contre-exemple suivant en 1873 : si $xy \neq 0$, on pose $f(x, y) = x^2 \arctan(y/x) - y^2 \arctan(x/y)$ et sinon $f(x, y) = 0$. Alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$.

Remarque 6 - 6

Giuseppe PEANO a donné en 1884 une famille très générale de contre-exemples. On se donne une fonction g de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} telle que les limites $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} g(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} g(x, y)$ existent et soient différentes, alors la fonction définie par $f(x, y) = xyg(x, y)$ admet des dérivées partielles d'ordre 2 par rapport à x et y dans les deux sens, mais elles sont distinctes.

Par exemple, on peut prendre $g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, i.e. $f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

Théorème 6 - 8

Théorème de SCHWARZ

Si f est de classe C^2 sur U , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ sur U .

Plus généralement, si f est de classe C^k sur U , alors l'ordre de dérivation pour les dérivées partielles de f jusqu'à l'ordre k est indifférent.

Démonstration (non exigible). On s'intéresse aux fonctions uniquement via leur dépendance en fonction de deux variables. On peut donc se ramener au cas où $E = \mathbf{R}^2$. La démonstration se fait coordonnée par coordonnée et on peut donc également supposer $F = \mathbf{R}$.

Soit (a_1, a_2) un point de U , (h_1, h_2) dans \mathbf{R}^2 tel que le rectangle $[a_1; a_1 + h_1] \times [a_2; a_2 + h_2]$ soit inclus dans U . En considérant la fonction $x \mapsto f(x, a_2 + h_2) - f(x, a_2)$, il vient, puisque $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est définie sur U ,

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, a_2 + h_2) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, a_2)$$

pour un certain ξ_1 dans $]a_1; a_1 + h_1[$. Et donc, puisque $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ est définie sur U

$$\frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2)}{h_1 h_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \xi_2)$$

pour un certain ξ_2 dans $]a_2; a_2 + h_2[$.

Par continuité de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ en (a_1, a_2) , $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)$ est égal à

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f(a_1 + h_1, a_2) - f(a_1, a_2 + h_2) + f(a_1, a_2)}{h_1 h_2}$$

En appliquant ce qui précède à $(x_1, x_2) \mapsto f(x_2, x_1)$, il vient $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$. \square

Aparté

On peut affiner la démonstration et montrer que sous les hypothèses que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ existent au voisinage de (a_1, a_2) et que cette dernière est continue en (a_1, a_2) , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$ existe et est égal à $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$.

10

Équations aux dérivées partielles

Exercice

Déterminer les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x} = 2f.$$

En polaire le membre de gauche est $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ et ainsi $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = g(r)e^{2\theta}$, avec g dans $C^1(\mathbf{R})$.

Exercice

Déterminer les fonctions définies sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ et telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En polaire le membre de gauche est $r \frac{\partial f}{\partial r}$ et ainsi $f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = r + g(\theta)$, avec g dans $C^1\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. On peut aussi poser $x = u$ et $y = uv$ avec $u \in \mathbf{R}_+^*$. Dans ces conditions, x et y sont des fonctions de classe C^1 de (u, v) . Il vient

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y}$$

de sorte qu'on a

$$u \frac{\partial f}{\partial u} = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{u^2(1 + v^2)} = u\sqrt{1 + v^2}.$$

On en déduit

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \sqrt{1 + v^2}$$

et il vient $f(u, v) = u\sqrt{1 + v^2} + g(v)$ avec h dans $C^1(\mathbf{R})$.

On peut revenir aux variables initiales et il vient

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + h\left(\frac{y}{x}\right).$$

Remarque 6 - 7

La notion de C^1 -difféomorphisme n'étant pas au programme, le retour aux variables d'origine n'est pas attendu.

Exercice

Déterminer les fonctions f définies sur \mathbf{R}^2 et telles que la fonction g définie par $g(x, y) = f(2x + y, 2x - y)$ soit solution de

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 1.$$

On calcule

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2x + y, 2x - y) + 2 \frac{\partial f}{\partial y}(2x + y, 2x - y)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(2x + y, 2x - y) - \frac{\partial f}{\partial y}(2x + y, 2x - y).$$

Il vient alors

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = 4 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2x + y, 2x - y) + 8 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2x + y, 2x - y) + 4 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2x + y, 2x - y)$$

et

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2x + y, 2x - y) - 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2x + y, 2x - y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2x + y, 2x - y)$$

puis

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 16 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2x + y, 2x - y) = 1,$$

ce qui entraîne que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est constante, égale à $\frac{1}{16}$. Il vient donc

$$f(x, y) = \frac{xy}{16} + g(x) + h(y)$$

avec g et h dans $C^1(\mathbf{R})$.

11

Compléments

11.1 Extrema liés (multiplicateurs de LAGRANGE)

On se place dans \mathbf{R}^2 .

On cherche les extrema d'une fonction f de U dans \mathbf{R} restreinte à la surface Σ donnée comme surface de niveau d'une fonction g , i.e. on étudie

$$\max_{g(x,y)=0} f(x, y).$$

On peut tenter une approche directe via le théorème des fonctions implicites. On écrit $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = G(x)$, au moins localement, et on cherche un extremum pour la fonction de x donnée par $f(x, G(x))$.

On peut aussi paramétrer la surface de niveau pour g sous la forme $(x(t), y(t))$ et chercher un extremum pour la fonction de t donnée par $f(x(t), y(t))$. Autrement dit, on résout $\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = 0$ afin de trouver des candidats pour l'extremum.

Mais c'est souvent difficile à mettre en pratique. L'idée de LAGRANGE (1788), citée dans sa première publication, est d'interpréter cette relation comme le fait que $\nabla f(x(t), y(t))$ est orthogonal à $(x'(t), y'(t))$ et donc colinéaire à $\nabla g(x(t), y(t))$ (en supposant les points de la surface d'équation $g(x, y) = 0$ réguliers). Autrement dit on cherche à résoudre : $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ avec $g(x, y) = 0$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. En posant $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$, ces équations se résument aux trois équations données par $\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = 0$.

Par exemple, sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$, si on a $f(x, y) = ax + by$ et $g(x, y) = x^p + y^p - 1$ avec $a > 0$, $b > 0$ et $p > 1$, i.e. si on cherche le maximum sur la sphère unité pour la norme $\|\cdot\|_p$ du produit scalaire avec un vecteur (a_1, a_2) du quadrant supérieur.

On a alors $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = ax + by - \lambda(x^p + y^p - 1)$, donc

$$\nabla \mathcal{L}(x, y, \lambda) = (a - p\lambda x^{p-1}, b - p\lambda y^{p-1}, x^p + y^p - 1)$$

et il vient $x = \left(\frac{a}{\lambda p}\right)^{1/(p-1)}$, $y = \left(\frac{b}{\lambda p}\right)^{1/(p-1)}$ et $(\lambda p)^{p/(p-1)} = a^{p/(p-1)} + b^{p/(p-1)}$.

D'où, en notant $q = p/(p-1)$, i.e. q est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (on dit que q est l'exposant conjugué de p),

$$x = \frac{a^{q/p}}{(a^q + b^q)^{1/p}} \quad \text{et} \quad y = \frac{b^{q/p}}{(a^q + b^q)^{1/p}}.$$

De plus les valeurs de (x, y) trouvées correspondent à un maximum.

Soit maintenant (x, y) quelconque et $\alpha = \|(x, y)\|_p = (x^p + y^p)^{1/p}$. Alors $(x/\alpha, y/\alpha)$ est sur la sphère unité pour $\|\cdot\|_p$ et donc

$$\frac{ax + by}{(x^p + y^p)^{1/p}} \leq a \frac{a^{q/p}}{(a^q + b^q)^{1/p}} + b \frac{b^{q/p}}{(a^q + b^q)^{1/p}} = (a^q + b^q)^{1/q}$$

et on en déduit l'inégalité de HÖLDER (1889) :

$$\langle u | v \rangle \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

11 2 Formule de TAYLOR à l'ordre 2

Hessienn et Laplacien

Soit f de classe C^2 de U dans \mathbf{R} . Alors $\nabla f \in C^1(U, E)$ et, dans toute base orthonormale \mathcal{B} de E , $\text{Jac}_{\nabla f; \mathcal{B}}(a)$ est symétrique réelle. Cette matrice est appelée matrice hessienne de f en a . Son déterminant est appelé Hessien de f et sa trace Laplacien de f . Ce dernier est noté $\Delta(f)$.

Si $E = \mathbf{R}^n$ la hessienne de f dans la base canonique est la matrice $\mathcal{H}f(a)$ donnée par $\mathcal{H}f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1 \leq i, j \leq n}$ et on a donc $\Delta(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$.

Dans la plupart des cas, on peut se ramener à l'étude d'une fonction d'une seule variable. Si f est de classe C^2 au voisinage de (a_1, a_2) , on peut, comme CAUCHY en 1829, considérer le développement de TAYLOR de la fonction donnée par $g(t) =$

$f(a_1 + th_1, a_2 + th_2)$ pour h_1 et h_2 tels que le rectangle $[a_1; a_1 + h_1] \times [a_2; a_2 + h_2]$ soit inclus dans U . Il vient

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2)h_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\xi_1, \xi_2)h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\xi_1, \xi_2)h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\xi_1, \xi_2)h_2^2 \right)$$

avec $(\xi_1, \xi_2) = (a_1 + \theta h_1, a_2 + \theta h_2)$ pour un certain θ dans $]0; 1[$.

Formule de TAYLOR

Soit f de U dans \mathbf{R} , de classe C^2 , avec E euclidien, et a dans U . Pour h dans E tel que $[a; a + h] \subset U$, on a

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{H}f(a) \cdot h | h \rangle + o(\|h\|^2).$$

Théorème 6 - 10

Démonstration. On applique la formule de TAYLOR-LAPLACE à la fonction φ donnée par $t \mapsto f(a + th)$. Il vient

$$f(a + h) = f(a) + \langle \nabla f(a) | h \rangle + \int_0^1 (1 - t)\varphi''(t) dt$$

et

$$\varphi''(t) = \left\langle \frac{d}{dt} \nabla f(a + th) \mid h \right\rangle = \langle \mathcal{H}f(a + th) \cdot h | h \rangle,$$

d'où le résultat par continuité de $\mathcal{H}f$ en a . □

Tout comme pour la variable réelle, la formule de TAYLOR-YOUNG à l'ordre 2 permet d'étudier le comportement local des fonctions numériques. Elle permet aussi de placer une surface par rapport à son plan tangent.

LAGRANGE 1759

On suppose $E = \mathbf{R}^2$. Soit f une fonction de classe C^2 de U dans \mathbf{R} et a dans U .

Si f admet un extremum local en a , alors $\nabla f(a) = 0$ et le hessien de f doit être positif (ou nul). Plus précisément si f admet un maximum en a , les valeurs propres de sa hessienne sont négatives ou nulles et, si f admet un minimum en a , les valeurs propres de sa hessienne sont positives ou nulles.

Réciproquement, si $\nabla f(a) = 0$, alors :

1. Si les valeurs propres de $\mathcal{H}f(a)$ sont strictement positives, i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) > 0$
 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$, alors f admet un minimum local strict en a .
2. Si les valeurs propres de $\mathcal{H}f(a)$ sont strictement négatives, i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) < 0$
 et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$, alors f admet un maximum local strict en a .
3. Si le hessien $H(f)(a)$ est strictement négatif, i.e. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2$, alors f admet un point selle en a .

Théorème 6 - 11

Démonstration. D'après le théorème spectral les valeurs propres de $\mathcal{H}f(a)$ sont réelles. On dispose donc de λ et μ réels et d'une base orthonormée (e_1, e_2) de \mathbf{R}^2 dans laquelle

$$f(a + xe_1 + ye_2) = f(a) + \frac{1}{2}(\lambda x^2 + \mu y^2) + o(x^2 + y^2)$$

et l'assertion en découle puisque les valeurs propres sont (strictement) de même signe si et seulement si le hessien est strictement positif, et ce signe est alors le signe commun des deux éléments diagonaux. \square

Exemple 6 - 14

Le folium de DESCARTES, défini par la fonction $(x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 3xy$ admet un minimum en $(1, 1)$ et un point selle en l'origine.

Notation

Il est d'usage d'écrire $\mathcal{H}f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. On a alors les trois cas $r > 0$ et $rt - s^2 > 0$ (ou bien $r + t > 0$ et $rt - s^2 > 0$), $r < 0$ et $rt - s^2 > 0$ (ou bien $r + t < 0$ et $rt - s^2 > 0$) ou $rt - s^2 < 0$.

Dans le cas $rt - s^2 = 0$, il faut chercher d'autres renseignements pour conclure.

11 3 Théorème de LAGRANGE

On peut raffiner le théorème de LAGRANGE. En effet, pour f de classe C^1 d'une variable réelle et à valeurs réelles, on peut écrire

$$f(x+h) = f(x) + h \int_0^1 f'(x+th) dt = f(x) + \left(\int_0^1 f'(x+th) dt \right) h$$

et donc, pour f de classe C^1 de U dans F et $[a; b]$ un segment inclus dans U , on peut considérer g_i définie par $g_i(t) = v_i^* \circ f(a + t(b-a))$ et obtenir

$$g_i(1) - g_i(0) = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a + t(b-a)) dt \right) e_j^*(b-a)$$

et donc

$$f(b) - f(a) = \left(\int_0^1 df(a + t(b-a)) dt \right) \cdot (b-a)$$

où l'intégrale est à valeurs dans $\mathcal{L}(E, F)$.

En particulier, puisqu'une intégrale est une limite de barycentres, on en déduit une généralisation de l'égalité des accroissements finis sous forme

$$f(b) - f(a) = \varphi(b-a) \quad \text{avec} \quad \varphi \in \text{cvx} \langle df(c) \rangle_{c \in [a,b]},$$

où $\text{cvx}(\cdot)$ désigne l'enveloppe convexe.

11 4 Courbes en coordonnées polaires

En coordonnées polaires, pour un arc défini par $\gamma(\theta) = (r(\theta), \theta)$, on a $\|\gamma'\|^2 = r^2 + (r')^2$ et donc il ne peut y avoir de point singulier en dehors de l'origine

Théorème de relèvement

Soit z une fonction de classe C^p , avec $p \in \mathbf{N}^*$, d'un intervalle I de \mathbf{R} et à valeurs dans le groupe des racines de l'unité complexes. Alors il existe une fonction θ dans $C^p(I, \mathbf{R})$ telle que $z = e^{i\theta}$. On dit que θ est un relèvement de z .

Si x et y sont dans $C^p(I, \mathbf{R})$ et vérifient $x^2 + y^2 = 1$, alors il existe θ dans $C^p(I, \mathbf{R})$ telle que $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$. Plus généralement si x et y ne s'annulent pas simultanément, alors il existe r et θ dans $C^p(I, \mathbf{R})$, avec r à valeurs strictement positives, tels que $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$.

Théorème 6 - 12

Puisque z est de classe C^p et ne s'annule pas z'/z est une fonction de classe C^{p-1} . Elle admet donc des primitives sur I . On pose, pour t_0 dans I et θ_0 un argument de $z(t_0)$ et pour tout t dans I ,

$$\theta(t) = \theta_0 - i \int_{t_0}^t \frac{z'(u)}{z(u)} du .$$

Alors θ est de classe C^p sur I . Comme la dérivée de $ze^{-i\theta}$ est donnée par $(z - i\theta'z)e^{i\theta}$, i.e. est nulle, c'est une fonction constante, donc identiquement égale à 1. Comme z est à valeurs dans \mathbf{U} et $z = e^{i\theta}$, $\text{Im}(\theta) = 0$ et donc θ est à valeurs réelles.

L'assertion pour x et y telles que $x^2 + y^2 = 1$ en résulte en considérant $z = x + iy$. Enfin le cas général en résulte en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ et en considérant x/r et y/r .

En polaire, la hessienne prend la forme suivante

$$\mathcal{H}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \end{pmatrix}$$

Remarque 6 - 8

de sorte qu'on a

$$\Delta(f) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} .$$

11 5 Théorèmes d'inversion et des fonctions implicites

Soit f de U dans V . On dit que c'est un C^1 -difféomorphisme de U sur V si c'est une bijection et si f et sa réciproque sont de classe C^1 .

Définition 6 - 20

On a alors $E \simeq F$ et pour tout x dans U , $df(x) \in \text{GL}(E, F)$. Il résulte de $f^{-1} \circ f = \text{Id}_E$ qu'on a en fait

$$df(x)^{-1} = df^{-1}(f(x)) \quad \text{et} \quad \text{Jac}_{f; \mathcal{B}, \mathcal{B}'}(x)^{-1} = \text{Jac}_{f^{-1}; \mathcal{B}', \mathcal{B}}(f(x)) .$$

Le dictionnaire entre coordonnées cartésiennes et polaires fournit un C^1 -difféomorphisme de $\mathbf{R}_+^* \times]-\pi; \pi[$ sur $\mathbf{R}^2 \setminus \mathbf{R}_- \times \{0\}$, à savoir $(r, \theta) \mapsto (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, dont la bijection réciproque est donnée par $(x, y) \mapsto$

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2}, 2 \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right) .$$

Ce difféomorphisme ne peut pas être prolongé à des ouverts plus grands.

Exemple 6 - 15

Les difféomorphismes permettent de changer de cartes et sont importants pour décrire la géométrie intrinsèque. Le théorème central est le théorème d'inversion dont il existe une version locale (au voisinage d'un point) et une version globale.

Théorème 6 - 13

Théorèmes d'inversion

1. Inversion globale – Soit f de U dans F , de classe C^1 , injective et telle que $df(x)$ est bijective pour tout x dans U . Alors $f(U)$ est ouvert dans F et f induit un C^1 -difféomorphisme de U sur $f(U)$.
2. Inversion locale – Soit f de U dans F , de classe C^1 , et x dans U tel que $df(x)$ soit bijective. Alors il existe U_x et V_x voisinages de x dans U et $f(x)$ dans F respectivement, tels que f induise un C^1 -difféomorphisme de U_x dans V_x .

La version globale résulte directement de la version locale puisqu'on peut écrire $U = \cup_{x \in U} U_x$ et donc $f(U) = \cup_{x \in U} V_x$.

Quitte à considérer $u \mapsto df(x)^{-1}(f(x+u) - f(x))$, on peut supposer $x = 0$, $f(x) = 0$ et $df(x) = \text{Id}_E$ (et donc $F = E$). On note B_r et \bar{B}_r les boules de centre 0 et de rayon r respectivement ouverte et fermée.

Soit alors φ l'application définie sur U par $\varphi(x) = x - f(x)$. Elle est de classe C^1 sur U et de différentielle nulle en 0. Par continuité de df , on dispose donc d'un réel strictement positif r tel que B_r soit inclus dans U et $\|d\varphi(x)\| \leq \frac{1}{2}$ pour x dans B_r .

Par conséquent φ est $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne sur B_r .

Pour x et y dans B_r , on a

$$\|x - y\| = \|f(x) + \varphi(x) - f(y) - \varphi(y)\| \leq \frac{1}{2} \|x - y\| + \|f(x) - f(y)\|$$

et donc f est $\frac{1}{2}$ -coercive sur B_r (i.e. $\|f(x) - f(y)\| \geq \frac{1}{2} \|x - y\|$). Elle y est en particulier injective. Soit $V = f(B_r)$, alors f induit une injection de B_r sur V .

Soit alors y_0 dans V , a dans B_r tel que $f(a) = y_0$, r' vérifiant $0 < r' < \frac{r - \|a\|}{2}$ et y dans $\bar{B}(y_0, r')$, la boule fermée de centre y_0 et de rayon r' . On va montrer $y \in V$, ce qui permettra de conclure que V est ouvert.

Soit φ_y définie sur $\bar{B}(a, 2r')$ par $\varphi_y(x) = y + \varphi(x)$. Alors φ_y , tout comme φ , est strictement contractante. De plus

$$\|\varphi_y(x) - a\| = \|y - y_0 + \varphi(x) - \varphi(a)\| \leq \|y - y_0\| + \frac{1}{2} \|x - a\| \leq 2r'$$

et donc φ_y laisse $\bar{B}(a, 2r')$ stable et y est contractante. Comme $\bar{B}(a, 2r')$ est compact (ou par complétude de E dans le cas général des espaces de BANACH de dimension infinie), il en résulte que φ_y admet un unique point fixe dans $\bar{B}(a, 2r')$, i.e. y admet un antécédent par f dans $\bar{B}(a, 2r')$. Comme $\bar{B}(a, 2r') \subset B_r$, on a donc $y \in V$.

Il en résulte que f induit une bijection de classe C^1 de B_r sur V . On note g son inverse. Puisque $d\varphi$ est de norme plus petite que $1/2$ sur B_r et qu'on a $df = \text{Id} - d\varphi$, df est inversible sur B_r , d'inverse de norme inférieure à 2 puisque

$$df(x)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} d\varphi(x)^n.$$

Soit y dans V et $x = g(y)$. Soit k dans F vérifiant $y + k \in V$ et $h = g(y + k) - x$. On a donc $f(x + h) = y + k$ et ainsi $k = f(x + h) - f(x) = df(x) \cdot h + o(h)$. Il vient

$$g(y + k) - g(y) = h = df(x)^{-1}(k + o(h)) = df(x)^{-1}(k) + o(h) .$$

Or

$$\|h\| = \|x + h - x\| \leq 2 \|f(x + h) - f(x)\| = 2 \|k\| .$$

Il en résulte

$$g(y + k) - g(y) = df(x)^{-1}(k) + o(k)$$

et donc g est différentiable, de différentielle $(df \circ g)^{-1}$. Elle est donc continue et la formule précédente montre que dg aussi, i.e. g est de classe C^1 .

Les équations implicites sont le thème central de la géométrie de DESCARTES (Géométrie, 1637). C'est LEIBNIZ qui montre comment dériver les fonctions implicites, mais c'est WEIERSTRASS, puis GENOCCHI et PEANO qui démontrent rigoureusement les assertions de LEIBNIZ. La question est de savoir si, étant donnée une relation du type $f(x, y) = c$, on peut écrire y en fonction de x .

Théorème des fonctions implicites - 2D

Soit F une fonction d'un ouvert U de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} et (a, y_0) dans U tel que F soit de classe C^1 au voisinage de (a, y_0) et tel que $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y_0)$ soit non nul. Alors il existe U_0 et V_0 des voisinages de a et y_0 respectivement avec $U_0 \times V_0 \subset U$ et une fonction y de U_0 dans V_0 , unique si U est connexe par arcs, telle que $y(a) = y_0$ et, pour tout x dans U_0 , $F(x, y(x)) = F(a, y_0)$.

De plus y est de classe C^1 sur U_0 et

$$\forall x \in U_0 \quad y'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} .$$

Théorème 6 - 14

On se ramène au cas $\frac{\partial F}{\partial y}(a, y_0) > 0$. Alors $\frac{\partial F}{\partial y}$ est minorée par une constante strictement positive dans un voisinage de (a, y_0) . On dispose donc de δ et β strictement positifs tels que, pour $|x - a| < \delta$ et $|y - y_0| < \delta$, on ait $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \geq \beta$. En particulier F est une fonction strictement monotone de y dans ce voisinage. Il en résulte

$$F(a, y_0 - \delta) < F(a, y_0) < F(a, y_0 + \delta) .$$

Par continuité de F , on dispose donc de δ_1 , inférieur à δ , tel que, pour $|x - a| \leq \delta_1$,

$$F(x, y_0 - \delta) < F(a, y_0) < F(x, y_0 + \delta) .$$

On pose alors $U_0 =]a - \delta_1; a + \delta_1[$ et $V_0 =]y_0 - \delta; y_0 + \delta[$. D'après le théorème de BOLZANO, par continuité de F , pour tout x dans U_0 , il existe y dans V_0 vérifiant $F(x, y) = F(a, y_0)$. Par stricte monotonie, un tel y est unique et on le note $y(x)$. Ainsi on dispose d'une fonction y de U_0 dans V_0 , unique sur U_0 , telle que $F(x, y(x)) = F(a, y_0)$ pour x dans U_0 .

Soit maintenant x_1 et x dans U_0 et $y_1 = y(x_1)$ et $y = y(x)$. D'après le théorème de LAGRANGE, puisque le parallélogramme d'axes parallèles aux axes de coordonnées et

de sommets (x, y) et (x_1, y_1) est inclus dans U , on a (comme dans la démonstration du théorème fondamental du calcul différentiel)

$$F(x, y(x)) = F(x_1, y_1) + \frac{\partial F}{\partial x}(\xi, y(x)) \cdot (x - x_1) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \eta) \cdot (y - y_1)$$

pour un certain ξ dans $]x_1; x[$ et un certain η dans $]y_1; y[$. Comme $\frac{\partial F}{\partial y}$ est strictement positive, elle ne s'annule pas et il vient

$$y(x) - y_1 = \varphi(x) \cdot (x - x_1) \quad \text{avec} \quad \varphi(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\xi, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial x}(x_1, \eta)}.$$

Par continuité de $\frac{\partial F}{\partial x}$, φ est bornée. Il en résulte que y est continue. Par conséquent φ est continue en x_1 et il en résulte, d'après la formulation de CARATHÉODORY, que y est différentiable en x_1 . La formule pour y' en découle immédiatement.

On considère un point M régulier pour f et la ligne de niveau Γ définie par $\Gamma = \{P \in U \mid f(P) = f(M)\}$. Alors il existe un voisinage V de M et une base (e_1, e_2) de \mathbf{R}^2 telle que $\Gamma \cap V$ soit une courbe cartésienne relativement à la base (e_1, e_2) , i.e. il existe deux intervalles ouverts réels I et J contenant 0 et φ de classe C^1 de I dans J tels que, pour tout (x, y) dans $I \times J$, on ait

$$M + xe_1 + ye_2 \in \Gamma \cap V \Leftrightarrow y = \varphi(x).$$

De plus

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(M + xe_1 + ye_2)}{\frac{\partial f}{\partial y}(M + xe_1 + ye_2)}.$$

Autrement dit Γ est localement le support de l'arc (I, γ) donné par $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$. On a alors $\nabla \gamma = (1, \varphi')$ et donc $\langle \nabla f \mid \nabla \gamma \rangle = 0$: les tangentes à l'arc Γ sont perpendiculaires au gradient de f , si Γ est une courbe de niveau pour f .

En particulier si f n'a pas de point critique, ses courbes de niveaux sont localement C^1 -difféomorphes à un intervalle de \mathbf{R} : une courbe régulière ressemble à un intervalle.

La base (e_1, e_2) dépend a priori du point M . En fait on peut toujours prendre la base canonique à l'ordre des vecteurs près, i.e. exprimer l'abscisse en fonction de l'ordonnée ou le contraire.

L'application $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ permet de ramener la démonstration du théorème des fonctions implicites à celle du théorème d'inversion locale. Réciproquement l'application $(x, y) \mapsto f(x) - y$ permet de ramener la démonstration du théorème d'inversion locale à celle du théorème des fonctions implicites. Ils sont donc équivalents.

Dans le cas général, on a

Exemple 6 - 16



Remarque 6 - 9

Théorème 6 - 15

Théorème des fonctions implicites

Soit f une fonction d'un ouvert $U \times V$ de $E \times F$ dans G , a dans U et y_0 dans V tels que F soit de classe C^1 au voisinage de (a, y_0) et tel que $\partial_2 f(a, y_0)$ soit inversible, i.e. $\partial_2 f(a, y_0) \in \text{GL}(F, G)$.

Alors il existe U_0 et V_0 des voisinages de a dans U et de y_0 dans V respectivement, et une fonction y de classe C^1 de U_0 dans V_0 , unique si U est connexe par arcs, telle que $y(a) = y_0$ et, pour tout x dans U_0 , $f(x, y(x)) = f(a, y_0)$.

On a de plus

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x) = -(\partial_2 f(x, y(x)))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y(x)).$$

En particulier si f est de classe C^k , il en va de même pour y .

La fonction $(x, y) \mapsto (x, f(x, y))$ est différentiable sur $U \times V$ et sa différentielle est bijective. Il résulte du théorème d'inversion locale que cette fonction est localement inversible i.e. qu'on peut écrire y en fonction de x et $f(x, y)$: l'image de (x, y) est (x, z) si et seulement si $y = \varphi(x, z)$ pour une certaine fonction φ de classe C^1 . On pose alors $y(x) = \varphi(x, f(a, y_0))$.

Exemple 6 - 17

On prend $E = \mathbf{R}^2$, $F = G = \mathbf{R}$, de sorte qu'on étudie une surface de niveau dans \mathbf{R}^3 associée à une fonction f telle que $\frac{\partial f}{\partial z}(a, y_0, z_0) \neq 0$. En effet, ici $\partial_2 f$ est simplement la dérivée directionnelle dans la direction z , i.e. $\frac{\partial f}{\partial z}$, et $\text{GL}(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}^*$.

Les formules précédentes permettent de trouver localement une fonction $(x, y) \mapsto z(x, y)$ telle que, au voisinage de (a, y_0) , $f(x, y, z) = f(a, y_0, z_0)$ si et seulement si $z = z(x, y)$. Et on a

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial z}}$$

dans ce voisinage de (a, y_0) .

11 6 Nappes paramétrées

Définition 6 - 21

Nappe

Soit E un espace (affine) euclidien de dimension finie, au moins égale à 3. On appelle surface de classe C^k dans E (pour $k \in \mathbf{N}^*$), tout sous-ensemble Σ de points E tel qu'il existe un rectangle ouvert non vide U de \mathbf{R}^2 , noté $U =]a; b[\times]c; d[$, et une application σ de classe C^k de U dans E , dont l'image est Σ .

On dit que le couple (U, σ) est une nappe paramétrée de support Σ et que σ est une représentation paramétrique de la nappe Σ . On dit qu'un point (x, y) de U est un paramètre et qu'un point M de Σ admet (x, y) pour paramètre si $M = \sigma(x, y)$.

Le point M est régulier pour la représentation paramétrique σ si $d\sigma(x, y)$ est de rang 2, i.e. si $\left(\frac{\partial M}{\partial u}, \frac{\partial M}{\partial v}\right)$ est une famille libre. Sinon on dit que M est un point

critique.

Soit Γ une courbe de classe C^1 dans U , passant par (x, y) . On note $\Gamma^* = \sigma(\Gamma)$. C^* est une courbe de classe C^1 passant par le point M donné par $M = \sigma(x, y)$ et incluse dans Σ . Si M est régulier (pour le paramètre (x, y)), alors Γ^* est régulière en M et la tangente en M à Γ^* est l'image par $\sigma(x, y)$ de la tangente en (x, y) à Γ , puisque $(\sigma \circ \gamma)'(t) = d\sigma(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$, avec $\gamma'(t) \neq 0$ et $d\sigma(\gamma(t))$ injective (car de rang 2 sur un espace vectoriel de rang 2).

Cette tangente est donc incluse dans le plan affine passant par M et dirigé par les vecteurs $\frac{\partial M}{\partial x}$ et $\frac{\partial M}{\partial y}$. Ce plan est appelé plan tangent à Σ en M , puisqu'il contient toutes les tangentes (en M) à des courbes tracées sur Σ et passant par M .

Réciproquement toute droite incluse dans ce plan passant par M est une telle tangente. On le note $T_M(\Sigma)$.

$$\text{Si } E = \mathbf{R}^3, \text{ on note } \sigma = (x, y, z), \text{ de sorte qu'on a } \text{Jac}_{\sigma;(\text{can})}(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}$$

et

$$N \in T_M(\Sigma) \iff \det \left(\overrightarrow{MN}, \frac{\partial M}{\partial u}(u, v), \frac{\partial M}{\partial v}(u, v) \right) = 0.$$

On termine en étudiant une surface Σ , support d'une nappe paramétrée de classe C^2 , notée M , de $I \times J$ dans E , avec $I \times J$ un rectangle ouvert de \mathbf{R}^2 et E un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit P un point régulier, de paramètre t_0 avec $t_0 = (u_0, v_0)$. On choisit comme base orthonormée l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de $\left(\frac{\partial M}{\partial u}(t_0), \frac{\partial M}{\partial v}(t_0), \frac{\partial M}{\partial u}(t_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(t_0) \right)$, i.e. e_1 est proportionnel et de même sens que $\frac{\partial M}{\partial u}(t_0)$, e_3 est proportionnel et de même sens que $\frac{\partial M}{\partial u}(t_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(t_0)$ et $e_2 = e_3 \wedge e_1$.

On se place ensuite dans le repère (P, e_1, e_2, e_3) de sorte que $P = 0$, $\frac{\partial M}{\partial u}(t_0) = ae_1$ avec $a > 0$, $\frac{\partial M}{\partial v}(t_0) = be_1 + ce_2$ avec $c > 0$ et $b \in \mathbf{R}$.

On écrit $M = (x, y, z)$ dans ce repère et on a donc $x(t_0) = y(t_0) = z(t_0) = 0$, $\frac{\partial x}{\partial u}(t_0) = a$, $\frac{\partial x}{\partial v}(t_0) = b$, $\frac{\partial y}{\partial u}(t_0) = 0$, $\frac{\partial y}{\partial v}(t_0) = c$, $\frac{\partial z}{\partial u}(t_0) = \frac{\partial z}{\partial v}(t_0) = 0$. On note $\mathcal{H}z_{t_0} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

Puisque t_0 est un point critique de z , si $rt - s^2 > 0$, alors z admet un extremum local en t_0 , de sorte que la surface est localement d'un seul côté de son plan tangent. Du côté $z > 0$ si $r + t > 0$ et du côté $z < 0$ si $r + t < 0$ (on notera que $r + t$ est aussi le laplacien de z en t_0).

Si $rt - s^2 < 0$ la surface traverse son plan tangent. Le cône isotrope de la forme quadratique associée à la hessienne est une réunion de deux droites qui sont les directions des tangentes de l'intersection de la surface avec son plan tangent.

Dans le cas $rt - s^2 = 0$, il faut chercher d'autres renseignements pour conclure.

Exercices

Connexité

6 - 1 ⑤ ★ Dimensions 1 et 2 †

Montrer qu'il n'existe pas de bijection de \mathbf{R} dans \mathbf{R}^2 continue, de réciproque continue.

6 - 2 ⑤ ★ Ouverts fermés ♥

Soit A un connexe par arcs et V une partie de A qui est à la fois ouverte et fermée dans A , alors $V = \emptyset$ ou $V = A$.

6 - 3 ⑤ ★★ Opérations sur les connexes par arcs

- Une intersection de connexes par arcs est-elle connexe par arcs ?
- L'adhérence d'un connexe par arcs est-il connexe par arcs ?
- L'intérieur d'un connexe par arcs est-il connexe par arc ?

6 - 4 ⑤ ★★ Connexité

- Montrer : les seules parties à la fois ouvertes et fermées de A sont le vide et A si et seulement si les seules applications continues de A dans $\{0, 1\}$ sont les applications constantes. Si ces conditions sont remplies, on dira que A est **connexe**.
- Montrer qu'une réunion de connexes ayant un point commun est connexe.
- Montrer que l'adhérence d'un connexe est connexe.
- Montrer qu'un ouvert connexe est connexe par arcs.

6 - 5 ⑤ ★★★ Matrices de déterminant strictement positif

Montrer que $GL_n^+(\mathbf{R})$ est connexe par arcs.

6 - 6 ⑤ M 2018 ★★★ Hyperplans ♠

Soit E un espace préhilbertien.

- Soit C un convexe de E et D un ensemble tel que $C \subset D \subset \bar{C}$. Montrer que D est connexe par arcs.
- Soit H un hyperplan de E . Montrer $E \setminus H$ connexe par arcs $\iff H$ n'est pas fermé.

6 - 7 ⑤ ★★★ Frontière ponctuelle

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension supérieure à 2. Montrer que si $\text{Fr}(A)$ est un point, alors A est ce point ou son complémentaire.

Indication : On pourra utiliser l'exercice 6 - 2.

Arcs paramétrés

6 - 8 ⑤ ★ Hypocycloïde

Étudier et tracer la courbe définie par $(x, y) = (2 \cos(t) + \cos(2t), 2 \sin(t) - \sin(2t))$. D'où vient son nom : hypocycloïde (à trois rebroussements) ?

6 - 9 ⑤ ★ Étude de courbe

Étudier et tracer la courbe définie par $(x, y) = \left(\frac{e^t}{t+1}, \frac{te^t}{t+1} \right)$.

6 - 10 ⑤ ★ Étude de courbe

- Étudier et tracer la courbe définie par $(x, y) = (\cos^2(t), \cos(t)(1 + \sin(t)))$.
- Soit $M(t)$ un point de la courbe, différent de l'origine. Démontrer qu'il existe un unique point $M(u)$ de la courbe, différent de l'origine, tel que $(OM(t))$ et $(OM(u))$ soient perpendiculaires, puis déterminer le lieu du milieu des segments $[M(t); M(u)]$.

6 - 11 ⑤ ★★

Étudier et tracer la courbe définie par $(x, y) = (a \cosh^3(t), b \sinh^3(t))$ (avec a et b deux réels strictement positifs). La tangente en un point $M(t)$ de la courbe coupe les axes de coordonnées en A et B . Déterminer le lieu des points P tels que $(OAPB)$ soit un rectangle.

6 - 12 ⑤ ★★★ Étude de courbe ♠

Soit la courbe plane définie par $(x, y) = (t \cos(t) - \sin(t), 2 \cos(t))$.

- Déterminer les points stationnaires et préciser leur nature.
- Montrer que les tangentes en ces points passent toutes par un même point.

6 - 13 ⑤ ★★★ Duplicatrice

- La cissoïde de Dioclès est engendrée par un cercle Γ et une droite D tangente au cercle en A . Si O est le point diamétralement opposé à A sur le cercle, la cissoïde est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M_1M_2}$ où M_1 et M_2 sont deux points alignés avec O situés respectivement sur Γ et D . Montrer que cette courbe possède l'axe (OA) comme axe de symétrie et la droite D comme asymptote
- Montrer qu'on peut écrire une équation cartésienne de cette courbe sous la forme $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

- c. Montrer qu'on peut écrire une équation paramétrique de cette courbe sous la forme $(x, y) = \left(2a \frac{t^2}{1+t^2}, 2a \frac{t^3}{1+t^2} \right)$.
- d. Soit M'_1 le symétrique de M_1 par rapport à la médiatrice de $[O; A]$. Montrer que M appartient à la droite D_M perpendiculaire à (OA) passant par M'_1 .
- e. Soit F l'intersection de D_M avec Γ , F étant choisi dans le demi-plan par rapport à (OA) qui ne contient pas M . Soit G le point de (OA) symétrique du centre du cercle (Γ) par rapport à D . Soit H le point de D_M tel que (AF) et (GH) soient parallèles. Montrer que (AH) a même direction que la tangente en M à la cissoïde.
- f. En déduire un tracé de la cissoïde.
- g. Montrer que la cissoïde de Dioclès est une duplicatrice : si P est sur la perpendiculaire à (OA) passant par O et tel que $OP = 2OA$, et si Q est le point d'intersection de la cissoïde avec (AP) , le point d'intersection R de (OQ) avec D est tel que $AR = \sqrt[3]{2}OA$.

Dérivées partielles

6 - 14 ⑤ ★ Calcul de dérivées partielles

Calculer les dérivées partielles de la fonction donnée par $f(x, y) = \min(x, y^2)$.

6 - 15 ⑤ ★ Calcul de dérivées partielles

Soit g de classe C^2 sur \mathbf{R} . Calculer les dérivées partielles de la fonction donnée par $f(x, y) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ g'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$

6 - 16 ⑤ ★ Calcul de tangente

On considère la courbe d'équation $e^{x-y} = 1 + 2x + y$. Donner la tangente à cette courbe et la position par rapport à la tangente au point $(0, 0)$.

6 - 17 ⑤ ★ Différentiabilité

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ en dehors de l'origine et $f(0, 0) = 0$.

- Étudier la continuité de f .
- A-t-elle des dérivées directionnelles à l'origine ?
- Est-ce que $\partial_1 f$ et $\partial_2 f$ sont continues ?
- La fonction f est-elle différentiable ?

6 - 18 ⑤ ★ Différentiabilité

Reprendre l'exercice précédent avec la fonction définie par $f(x, y) = xy \sin \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

6 - 19 ⑤ ★ Différentiabilité

Reprendre l'exercice précédent avec la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

6 - 20 ⑤ ★ Fonctions harmoniques

Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ et f de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{C} définie par $f(x, y) = P(x + iy)$. Montrer $\Delta f = 0$.

6 - 21 ⑤ ★★ Laplacien ♠

Soit u, v, f et g des fonctions de classe C^2 de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} liées par la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \quad f(x, y) = g(u(x, y), v(x, y)).$$

- Calculer les dérivées partielles premières et secondes de f en fonction de celles de g .
- Soit φ une application affine. On note H la matrice Hessienne de g en $\varphi(x, y)$, montrer que la hessienne de $g \circ \varphi$ en (x, y) est égale à ${}^t JH(\varphi(x, y))J$, pour une matrice J qu'on précisera.
- Soit φ une isométrie (affine) du plan euclidien \mathbf{R}^2 , montrer $\Delta(g \circ \varphi) = (\Delta g) \circ \varphi$.

6 - 22 ⑤ ★★ Puissance

Exprimer la différentielle de $M \mapsto M^n$ pour n dans \mathbf{N} .

Montrer que \exp est de classe C^1 sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ et exprimer, pour M et H dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, $d(\exp)(M) \cdot H$ sous forme d'une série.

Différentielle

6 - 23 ⑤ ★ Différentielle

Soit f la fonction donnée par $f(x) = \|x\|^2$, de \mathbf{R}^n muni de sa norme euclidienne canonique dans \mathbf{R} . Calculer Δf .

6 - 24 ⑤ ★ Différentiabilité

Pour quelles valeurs du réel a , la fonction f définie par $f(x, y) = |xy|^a$ est-elle continue sur \mathbf{R}^2 ? différentiable ?

6 - 25 ⑤ ★ Différentielle

Soit A une matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ et f l'application de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ dans \mathbf{R} donnée par $f(X) = {}^t X A X$. Montrer que sa différentielle est donnée par $df(X) = {}^t X(A + {}^t A)$.

6 - 26 ⑤ ★ Extrema

Soit f dans $C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ et x un point d'extremum de f sur la sphère unité de \mathbf{R}^n . Montrer que $\nabla f(x)$ est proportionnel à x .

6 - 27 ⑤ ★★ Déterminant

Montrer que \det est une fonction de classe C^1 de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dans \mathbf{R} et qu'on a $d(\det)(M) \cdot H = \text{Tr}({}^t \text{com}(M)H)$.

En déduire une expression du coefficient de degré 1 du polynôme caractéristique de M .

6 - 28 ⑤ ★★ **Identité d'Euler**

On dit qu'une fonction f de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} est homogène de degré p si, pour tout x dans \mathbf{R}^n et tout a dans \mathbf{R}_+^* , on a $f(ax) = a^p f(x)$.

Montrer que si f est différentiable, elle vérifie

$$\sum_{i=1}^n x_i \partial_i f = p f .$$

6 - 29 ⑤ ★★

Soit U un ouvert connexe par arcs et f une fonction de U dans \mathbf{R} . On suppose f différentiable sur U et $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Peut-on en déduire que f ne dépend que de y ?

6 - 30 ⑤ ★★ **Un contre-exemple de PEANO**

Soit f la fonction définie en dehors de l'origine par $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$. On pose $(x_0, y_0) = (-a, -a)$ et $(h, k) = (a+b, a+b)$. Existe-t-il θ dans $]0; 1[$ tel que, en posant $(\xi, \eta) = (x_0, y_0) + \theta(h, k)$:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, \eta)h + \frac{\partial f}{\partial y}(\xi, \eta)k ?$$

6 - 31 ⑤ ★★ **Un contre-exemple de PEANO**

Soit f la fonction définie par $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$. Montrer que l'origine est un point stationnaire, que ce n'est pas un minimum local mais que la restriction de f à toute droite passant par l'origine admet un minimum local en l'origine.

6 - 32 ⑤ ★★ **Différentielle coercive**

Soit E un espace euclidien, f dans $C^1(E, E)$ et $\alpha > 0$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \forall h \in E, \langle df(x) \cdot h \mid h \rangle \geq \alpha \|h\|^2 .$$

- a. Montrer $\langle f(x) - f(y) \mid x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$, pour tous x et y dans E .
- b. En déduire que $f(E)$ est fermé.

6 - 33 ⑤ **Centrale 2000** ★★ **Fonction coercive**

Soit f dans $C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ et $c > 0$ tels que, pour tous x et y , $\|f(x) - f(y)\| \geq c \|x - y\|$.

- a. Montrer que pour tous x et h , $\|df(x) \cdot h\| \geq c \|h\|$.
- b. Montrer que f est surjective sur \mathbf{R}^n (on considèrera, pour a dans \mathbf{R}^n , le minimum de $\|f(x) - a\|^2$).

6 - 34 ⑤ ★★ **Théorème de SCHWARZ**

Démontrer le théorème de SCHWARZ : sous les hypothèses que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}$ existent au voisinage

de (a_1, a_2) et que cette dernière est continue en (a_1, a_2) , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a_1, a_2)$ existe et est égal à $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a_1, a_2)$.

6 - 35 ⑤ **C 2014** ★★ **Gradient**

On se donne f de \mathbf{R}^n dans \mathbf{R} , de classe C^1 et vérifiant $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\|x\|} = +\infty$.

- a. Montrer que f admet un minimum sur \mathbf{R}^n . En déduire que le gradient de f s'annule.
- b. Soit u_0 dans \mathbf{R}^n et g défini par $g(x) = f(x) - \langle u_0 \mid x \rangle$. À l'aide de g , montrer que ∇f est surjectif.
- c. On suppose dorénavant que f est strictement convexe. Montrer que ∇f est bijective.
- d. Montrer $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x)\| = +\infty$.
- e. Montrer que la fonction réciproque de ∇f est continue.

6 - 36 **Centrale 2000** ★★ **Principe du maximum**

Soit Ω un ouvert borné de \mathbf{R}^2 et u une fonction de $\overline{\Omega}$ dans \mathbf{R} continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe C^2 sur Ω .

- a. On suppose $\Delta u > 0$. Montrer $\max_{(x,y) \in \overline{\Omega}} u(x, y) = \max_{(x,y) \in \Omega} u(x, y)$.
- b. Même question en supposant seulement $\Delta u \geq 0$.
- c. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2\}$, avec $0 < r_1 < r_2$. On suppose que u est continu sur \overline{A} , de classe C^2 sur A et $\Delta u \geq 0$ sur A . On pose $M(r) = \max_{x^2 + y^2 = r^2} (u(x, y))$.

Montrer que, pour tout $r_1 \leq r \leq r_2$,

$$M(r) \leq \frac{M(r_1) \ln(r_2/r) + M(r_2) \ln(r/r_1)}{\ln(r_2/r_1)} .$$

Indication : la fonction donnée par $\ln(x^2 + y^2)$ vérifie $\Delta = 0$.

Équation aux dérivées partielles

6 - 37 ⑤ ★★

Rechercher les fonctions de classe C^2 d'un ouvert de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

On pourra faire un changement de variable de la forme $x = au + bv$ et $y = cu + dv$.

6 - 38 ⑤ ★★

Rechercher les fonctions de classe C^2 d'un ouvert de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} vérifiant

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 3xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 .$$

On pourra poser $\varphi = x \frac{\partial f}{\partial x} + 2y \frac{\partial f}{\partial y}$.

6 - 39 ⑤ Mines 2011 ★★★

On se place sur l'ouvert $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$. Tous les changements de variables seront définis de cet ouvert sur lui-même.

Déterminer les solutions de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ dans \mathbf{R} de l'équation $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

6 - 40 ⑤ ★★

Rechercher les fonctions de classe C^2 d'un ouvert de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

6 - 41 ⑤ Centrale 2011 ★★★ Fonctions homogènes

Soit U le plan euclidien privé de l'origine.

a. Soit f de classe C^2 de U dans \mathbf{R} . On définit sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$ la fonction F par $F(\rho, \theta) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. Déterminer Δf en $(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$ à l'aide des dérivées partielles de F en (ρ, θ) .

b. Soit f de U dans \mathbf{R} et α dans \mathbf{R}_+^* . On dit que f est α -homogène si pour tous m dans U et λ dans \mathbf{R}_+^* , on a $f(\lambda m) = \lambda^\alpha f(m)$.

i. Montrer que si f est non nulle et homogène, elle l'est pour un unique α .

ii. On suppose f α -homogène. Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont $(\alpha - 1)$ -homogènes.

c. Déterminer les fonctions f de classe C^2 de U dans \mathbf{R} , homogènes et vérifiant $\Delta f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

6 - 42 ⑤ X 2017 ★★★ Équations de Cauchy-Riemann

On note Ω ouvert de \mathbf{C} . Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbf{C}$ est dite \mathbf{C} -dérivable si pour tout z_0 dans Ω , le rapport $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$, où z appartient à Ω , admet une limite lorsque z tend vers z_0 . On note alors $f'(z_0)$ la limite.

a. Étudier le cas des fonctions $z \mapsto z^2$, $z \mapsto e^z$, $z \mapsto \bar{z}$.

b. Montrer l'équivalence : f est \mathbf{C} -dérivable si et seulement si f considérée comme fonction de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 est différentiable et si en notant $f = (f_1, f_2)$, on a les relations

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= -\frac{\partial f_1}{\partial y}. \end{aligned}$$

Quel est le lien entre la \mathbf{C} -linéarité et une certaine matrice ?

6 - 43 ★★★

Rechercher les fonctions de classe C^2 d'un ouvert de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} vérifiant

$$f \left(x \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) + x^2 + y^2 = 0.$$

On posera $u = y/x$, $v = x^2 + y^2$ et $g = f^2$.

Extrema

6 - 44 ⑤ ★

Déterminer les extrema de

$$(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + (1 - y)^2} + \sqrt{y^2 + (1 - x)^2}.$$

6 - 45 ⑤ ★★

Déterminer les extrema de

$$(x, y, z) \mapsto (x + y + z)^2 + (x + y)^2 + z^2$$

sur la sphère unité.

6 - 46 ⑤ ★★

Déterminer les extrema de

$$(x, y) \mapsto \int_0^\pi (\sin(t) - xt^2 - yt)^2 dt.$$

6 - 47 ★★

Déterminer les extrema de

$$(x, y) \mapsto xe^y + ye^x.$$

6 - 48 ⑤ ★★

Déterminer les triangles d'aire extrême parmi les triangles inscrits dans un cercle donné.

6 - 49 ⑤ ★★

Déterminer les extrema de la norme sur la surface d'équation

$$\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1,$$

où $0 < a < b < c$. On trouvera six minima et huit maxima.

6 - 50 ⑤ ★★★ Extrema liés

Déterminer les extrema de $x^2 + y^2 + z^2$ sur l'ensemble défini par

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} - 1 = x + y - z = 0.$$

On pourra utiliser la méthode de LAGRANGE, mais avec deux « multiplicateurs de LAGRANGE ».