CHAPITRE 4

Équations différentielles linéaires

Sofia Kovalevskaya, qui figure parmi les très grands mathématiciens de l'époque moderne, est décédée à Stockholm le 10 février 1891, âgée de 41 ans. Elle venait de recevoir, le 24 décembre 1888, le prix Bordin de l'Académie des sciences de Paris, récompensant ses travaux sur le mouvement d'un solide autour d'un point fixe. Elle était professeur à l'Université de Stockholm.

Mathématicienne « à deux idées » (comme l'a qualifiée André Weil, qui pensait que la plupart des mathématiciens n'ont qu'une seule idée, qu'ils exploitent leur vie durant), elle avait commencé sa carrière par trouver un contre-exemple à un théorème que tout le monde croyait vrai, ce qui lui avait permis de donner le bon énoncé, puis de le démontrer.

Ce théorème, qui affirme l'existence, sous certaines conditions, de solutions analytiques d'un système d'équations aux dérivées partielles, est aujourd'hui connu sous le nom de théorème de Cauchy-Kovalevskaya – les théorèmes d'existence et d'unicité de solutions portent, en général, le nom de Cauchy ...

– Michèle Audin

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

La résolution explicite des systèmes linéaires à coefficients constants n'est pas un objectif du programme.

On limitera en conséquence la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiant·e·s divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires.

Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Programme

— Équation différentielle linéaire : $x' = a(t)(x) + b(t)$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E. Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire.

— Principe de superposition. Problème de Cauchy. Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.

— Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.

— Théorème de Cauchy linéaire (démonstration non exigible). Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes, dimension de l'espace des solutions. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre.

— Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants. Résolution du problème de Cauchy. Traduction matricielle. Pour les calculs explicites, on se borne aux deux cas suivants : A diagonalisable ou $n \leqslant 3$.

— Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants. Dans les exercices pratiques, on se limite au cas $n = 2$.

— Équations différentielles scalaires du second ordre. Adaptation de la méthode de variation des constantes. Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2 : définition et calcul, cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

— Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$. Les étudiant·e·s doivent savoir exploiter la recherche de solutions développables en série entière.

Introduction

On note E un espace vectoriel normé de dimension finie, U un ouvert de E et I un intervalle de $\mathbf{R}$.

Une équation différentielle (ordinaire, sous forme résolue, d'ordre 1) est une équation de la forme $y' = f(x, y)$ où il s'agit de trouver une fonction y définie sur un intervalle J de $\mathbf{R}$, dérivable sur cet intervalle et telle que, pour tout x dans J, $y'(x) = f(x, y(x))$.

Ici f est une fonction de deux variables, l'une réelle et l'autre vectorielle : f va de $I \times U$ dans E et on cherche J inclus dans I et y de J dans U.

Plus généralement, sous forme non résolue, on peut considérer des équations de la forme $f(x, y, y') = 0$ et/ou faire intervenir des dérivées d'ordre supérieur.

Néanmoins, afin d'obtenir des résultats d'existence et d'unicité, on spécifie des données initiales. C'est la notion de problème de CAUCHY.

Définition 4 - 1

Problème de CAUCHY

Pour f dans $C^1(I \times U, E)$, x_0 dans I et y_0 dans U, une solution au problème de CAUCHY

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

est un couple (J, y) avec $J \subset I$, $x_0 \in J$ et $y \in C^1(J, U)$ vérifiant

$$\begin{cases} \forall x \in J\,, \quad y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0\ . \end{cases}$$

Exemples 4 - 1

— L'équation différentielle $y' = y^2$ couplée à la condition $y(0) = 1$ est un problème de CAUCHY, mais pas $y' = \sqrt{y}$ avec la condition $y(1) = 0$ car $\sqrt{\ }$ n'est pas de classe C^1 au voisinage de 0.

— De même $y'' = \sin(y) + y^2$ avec les conditions $y(0) = y'(0) = 1$ fournit un problème de CAUCHY, mais pas $y'' + y = 0$ avec les conditions $y(0) = y(\pi) = 0$.

Quand la variable x est absente, on parle d'équation **autonome** : $y' = f(y)$. Quand $E = \mathbf{R}$, on parle d'équation **scalaire**.

Plus généralement on peut considérer des ordres plus élevés : une équation différentielle d'ordre n sous forme résolue s'écrit $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$. Sous forme non résolue on l'écrit $f(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$. Une équation d'ordre n peut se ramener à une équation d'ordre 1 en changeant l'espace d'arrivée. Par exemple en posant $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$ et $F\left(x, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_2 \\ f(x, y_1, y_2) \end{pmatrix}$, l'équation $Y' = F(x, Y)$ équivaut aux deux équations $y' = y'$ et $y'' = f(x, y, y')$, i.e. à l'équation $y'' = f(x, y, y')$.

En particulier une équation scalaire d'ordre quelconque peut se ramener à l'étude d'une équation d'ordre 1 vectorielle grâce à cette technique.

On dispose de peu de techniques pour intégrer les équations différentielles, toutes plus ou moins ad hoc. Par exemple

— le changement d'inconnue $z = g(y)$

— le changement de variable $x = \varphi(t)$ et $z = y \circ \varphi$

— la paramétrisation des courbes intégrales : $t \mapsto (x(t), y(t))$.

Définition 4 - 2

On appelle courbe intégrale d'une équation différentielle $y' = f(x, y)$ la courbe paramétrée $x \mapsto (x, y(x))$.

Puisque $y'(x)$ représente la pente d'une courbe $x \mapsto (x, y(x))$, la pente de la tangente à une courbe intégrale de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ est donc égale à $f(x, y(x))$ au point $(x, y(x))$. Autrement dit si (x, y) est un point d'une courbe intégrale de l'équation différentielle précédente, la pente de sa tangente en ce point est donnée par $f(x, y)$.

Il en résulte que la pente de la normale en ce point est $-1/f(x, y)$ (en convenant qu'une normale verticale est obtenue si $f(x, y) = 0$). L'équation différentielle

$$y' = -\frac{1}{f(x, y)}$$

admet donc comme courbes intégrales des courbes dont les tangentes sont des normales aux courbes intégrales précédentes. Cette remarque conduit à la notion de famille de courbes orthogonales.

1 Les exponentielles comme vecteurs propres

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants, i.e. de la forme

$$(\mathcal{E}) \qquad y^{(p)} = \sum_{k=0}^{p-1} a_k y^{(k)}$$

pour un certain p dans $\mathbf{N}^*$ et $(a_0, \cdots, a_{p-1})$ dans $\mathbf{K}^p$. On note $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ et d l'opérateur $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ i.e. l'endomorphisme de E donné par $d(f) = f'$ de sorte que, pour x réel, on a $d(f)(x) = f'(x)$. On note également $S_\mathcal{E}$, $S_{(a_0,\ldots,a_{p-1})}$ ou simplement S lorsque le contexte est clair, l'ensemble des éléments de E solutions de $\mathcal{E}$

Pour $p = 1$ on a $S_{(a_0)} = \mathbf{K}\gamma_{a_0}$ en notant γ_α la fonction définie sur $\mathbf{R}$ et donnée par $\gamma_\alpha(x) = e^{\alpha x}$.

Remarque 4 - 1

Ici, pour $\alpha = 0$, on convient que les fonctions constantes sont des exponentielles particulières.

Pour α dans $\mathbf{K}$, γ_α est une fonction nulle part nulle et on peut donc considérer la multiplication par γ_α, notée μ_α : c'est un isomorphisme de E dans lui-même

$$\mu_\alpha(f) \ : x \mapsto e^{\alpha x} f(x) \quad \text{et} \quad \mu_\alpha^{-1}(f) \ : x \mapsto e^{-\alpha x} f(x) \ .$$

Par formule de Leibniz, on a pour toute fonction f dans E,

$$d\left(\mu_\alpha^{-1}(f)\right) = (\gamma_\alpha^{-1} f)' = \gamma_\alpha^{-1}(-\alpha f + f')$$

i.e.

$$d\left(\mu_\alpha^{-1}(f)\right) = \mu_\alpha^{-1}(-\alpha f + f') \,,$$

et donc

$$\mu_\alpha\left(d\left(\mu_\alpha^{-1}(f)\right)\right) = f' - \alpha f \ .$$

Autrement dit $\mu_\alpha \circ d \circ \mu_\alpha^{-1} = d - \alpha \mathrm{Id}_E$.

On retrouve ainsi $S_{(a_0)}$ à partir du cas $a_0 = 0$. En effet si $a_0 = 0$, l'équation s'écrit $y' = 0$ et, par exemple grâce l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que $S_{(0)}$

est constitué des fonctions constantes, ce qui peut se récrire $S_{(0)} = \mathrm{Ker}(d) = \mathbf{K}\gamma_0 \simeq \mathbf{K}$. Dans le cas général il vient, puisque μ_α est bijective,

$$y' - a_0 y = 0 \iff \mu_{a_0} \circ d \circ \mu_{a_0}^{-1}(y) = 0 \iff d \circ \mu_{a_0}^{-1}(y) = 0 \iff \mu_{a_0}^{-1}(y) \in \mathbf{K} \iff y \in \mathbf{K}\gamma_{a_0}$$

ou encore, de façon plus algébrique,

$$\mathrm{Ker}\left(\mu_{a_0} \circ d \circ \mu_{a_0}^{-1}\right) = \mu_{a_0}\left(\mathrm{Ker}(d)\right) \ .$$

On vient ainsi d'obtenir

$$S_{(\alpha)} = \mathrm{Ker}(d - \alpha \mathrm{Id}_E) = \mu_\alpha(\mathrm{Ker}(d)) = \mu_\alpha(S_{(0)}) = \mathbf{K}\gamma_\alpha \ .$$

Définition 4 - 3

Vecteur et valeur propres, spectre

Soit F un **K**-espace vectoriel, f dans $\mathrm{End}(F)$, α dans **K** et u dans F. Si $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_F)$ n'est pas réduit à $\{0\}$, on dit que c'est un **sous-espace propre** de f et qu'il est associé à la **valeur propre** α. Si u est non nul et dans $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_F)$, on dit que c'est un **vecteur propre** de f associé à la valeur propre α.

L'ensemble des valeurs propres de f est appelé **spectre** de f et est noté $\mathrm{Sp}(f)$.

♥

Par définition un sous-espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$ (et encore moins vide puisque c'est un espace vectoriel). Il est pourtant souvent intéressant de considérer les espaces de la forme $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_F)$. Seuls ceux qui ne sont pas réduits à $\{0\}$ peuvent être appelés espaces propres !

De même, par définition, un vecteur propre n'est pas nul. Autrement dit si u est un vecteur propre (u) est une famille libre dans un espace propre (qui est donc, rappelons-le, non réduit à $\{0\}$). Il est parfois tentant de considérer tous les vecteurs de $\mathrm{Ker}(f - \alpha \mathrm{Id}_F)$, mais l'ensemble des vecteurs propres associés à une même valeur propre **n'est pas** un espace vectoriel : il ne contient pas 0. La raison en est qu'on veut pouvoir associer à un vecteur propre **la** valeur propre qui lui correspond. Et, par conséquent, la notion d'espace propre est bien plus agréable à manipuler que celle de vecteur propre.

Par contre il n'y a aucune limitation aux valeurs propres. La valeur propre nulle est même très importante puisqu'elle est associée au noyau. Ce qui permet d'ailleurs de dégager la première propriété liée aux valeurs propres.

Théorème 4 - 1

Spectre de l'opérateur dérivée

Le spectre de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ vu comme endomorphisme de $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{K})$ est **K**. Ses espaces propres sont de dimension 1, engendrés par les fonctions exponentielles $\gamma_\alpha : x \mapsto \exp(\alpha x)$, pour α dans **K**. De plus les opérateurs $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \alpha \mathrm{Id}$ sont tous conjugués entre eux, via la multiplication par γ_α.

2 Étude des sous-espaces propres d'un endomorphisme

Propriété 4 - 1

Un endomorphisme est injectif si et seulement s'il n'admet pas 0 comme valeur propre. En particulier, si F est de dimension finie, un endomorphisme de F est inversible si et seulement s'il n'admet pas 0 comme valeur propre.

La famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{K}}$ est libre : on peut le vérifier directement, mais c'est en fait une propriété générale des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes.

Proposition 4 - 1

Les espaces propres correspondant à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Plus précisément si F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et si u est un endomorphisme de F, alors on a les propriétés suivantes :

1. Si λ et μ sont deux scalaires distincts, alors $\operatorname{Ker}(u-\lambda\operatorname{Id}_F)$ et $\operatorname{Ker}(u-\mu\operatorname{Id}_F)$ sont en somme directe.
2. Si $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille (finie) de scalaires distincts deux à deux, alors la famille $(\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{Id}_F))_{i\in I}$ est en somme directe, i.e. l'application de $\prod_{i\in I}\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{Id}_F)$ dans F donnée par $(x_i)_{i\in I}\mapsto\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est injective.

Démonstration. Soit λ et μ deux scalaires distincts et x dans $\operatorname{Ker}(u-\lambda\operatorname{Id}_F)$ et $\operatorname{Ker}(u-\mu\operatorname{Id}_F)$. On a alors $u(x)=\lambda x=\mu x$, donc $(\lambda-\mu)x=0$. Comme $\lambda\neq\mu$, $x=0$ et donc $\operatorname{Ker}(u-\lambda\operatorname{Id}_F)$ et $\operatorname{Ker}(u-\mu\operatorname{Id}_F)$ sont en somme directe.

Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille finie de scalaires distincts deux à deux et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs dans $(\operatorname{Ker}(u-\lambda_i\operatorname{Id}_F))_{i\in I}$ telle que $\displaystyle\sum_{i\in I}x_i=0$. Par application de u à cette égalité, il vient $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i x_i=0$ et donc, par récurrence immédiate, pour tout entier naturel k on a $\displaystyle\sum_{i\in I}\lambda_i^k x_i=0$. Il en résulte que pour tout polynôme P dans $\mathbf{K}[X]$, on a $\displaystyle\sum_{i\in I}P(\lambda_i)x_i=0$. En particulier, pour j dans I, si P est un polynôme de Lagrange tel que $P(\lambda_i)=\delta_{i,j}$, il vient $x_j=0$ et donc tous les (x_j) sont nuls. Comme l'application $(x_i)_{i\in I}\mapsto\displaystyle\sum_{i\in I}x_i$ est linéaire, elle est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$, ce qui est le cas d'après ce qui précède. □

Remarque 4 - 2

Si les x_i étaient des scalaires, l'identité

$$\forall k<\operatorname{Card}I\qquad\sum_{i\in I}\lambda_i^k x_i=0$$

se traduirait matriciellement sous la forme du produit d'une matrice de Vandermonde appliquée au vecteur colonne (x_i). Comme les λ_i sont distincts deux à deux, le déterminant de ce système linéaire est non nul, et on conclut que les (x_i) sont tous nuls.

On peut adapter ce raisonnement : il suffit de faire comme si les (x_i) étaient scalaires. Pour cela on remarque que pour toute forme linéaire φ, on a

$$\forall k<\operatorname{Card}I\qquad\sum_{i\in I}\lambda_i^k\varphi(x_i)=0$$

et donc les $\varphi(x_i)$ sont tous nuls. Or pour tout vecteur non nul on dispose d'une forme linéaire ne s'y annulant pas. Il en résulte que les (x_i) sont tous nuls.

Exercice

L'indépendance de la famille $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in\mathbf{K}}$ peut s'obtenir directement en partant d'une combinaison linéaire (finie), en la dérivant suffisamment de fois pour faire apparaître un déterminant de VANDERMONDE.

Pour aller plus loin

Cette propriété s'étend au cas où la famille n'est pas finie, en précisant ce que somme directe veut dire. Si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel F, la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est par définition l'ensemble des combinaisons linéaires presque nulles d'éléments de E_i, i.e. les sommes finies de la forme $\sum_{i\in J} x_i$ avec $J\subset I$, J fini et $x_i\in E_i$. Alors la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est dite directe si l'écriture de tout élément de cet ensemble unique, i.e. pour x dans $\sum_{i\in I} E_i$, l'écriture $x=\sum_{i\in J} x_i$ définit J et les $(x_i)_{i\in J}$ de façon unique.

Remarque 4 - 3

Si u est vecteur propre de f pour la valeur propre λ, il est vecteur propre de $f-\alpha\mathrm{Id}$ pour la valeur propre $\lambda-\alpha$ puisque u est non nul et vérifie $(f-\alpha\mathrm{Id})(u)=\lambda u-\alpha-u$. Autrement dit $\mathrm{Sp}(f-\alpha\mathrm{Id})=\mathrm{Sp}(f)-\alpha$.

En particulier si $\lambda\neq\alpha$, u est dans l'image de $f-\alpha\mathrm{Id}$: $(f-\alpha\mathrm{Id})(v)=u$ pour $v=\frac{1}{\lambda-\alpha}u$.

3 Cas d'ordre 1 avec second membre

On note toujours $d=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et, pour α dans $\mathbf{K}$, $d_\alpha=d-\alpha\mathrm{Id}_E$, i.e. $d_\alpha=\mu_\alpha\circ d\circ\mu_\alpha^{-1}$. D'après ce qui précède les espaces propres de d_α sont les mêmes que ceux de d, les valeurs propres étant translatées de α.

On peut résoudre les équations du premier ordre non homogène, dont le second membre est lui-même solution du même type d'équation, i.e. de la forme $C\gamma_\beta$:

$$(\mathcal{E})_{nh}\quad y'-\alpha y=C\gamma_\beta\ .$$

L'équation se récrit $d_\alpha(y)=C\gamma_\beta$ et on note $S_{(\alpha),C\gamma_\beta}$ l'ensemble de ses solutions. Comme γ_β est vecteur propre pour d_α associé à la valeur propre $\beta-\alpha$, on est amené à distinguer deux cas.

Si $\beta\neq\alpha$ la fonction $\dfrac{C}{\beta-\alpha}\gamma_\beta$ appartient à $S_{(\alpha),C\gamma_\beta}$. Notons y_p cette solution particulière de sorte que l'équation $(\mathcal{E})_{nh}$ se récrit $d_\alpha(y)=d_\alpha(y_p)$, i.e. par linéarité de d_α, $d_\alpha(y-y_p)=0$, soit $y-y_p\in\mathrm{Ker}(d_\alpha)$. On en déduit que $S_{(\alpha),C\gamma_\beta}$ est égal à $y_p+S_{(\alpha)}$, i.e. formée des fonctions de la forme $y_p+\lambda\gamma_\alpha$ avec $\lambda\in\mathbf{K}$. Si on se place dans le plan E' dont une base est $(\gamma_\alpha,\gamma_\beta)$ et identifié à $\mathbf{K}^2$ au moyen de cette base, $S_{(\alpha),C\gamma_\beta}$ est la droite affine (horizontale) d'équation $\lambda_\beta=\dfrac{C}{\beta-\alpha}$ (en notant $(\lambda_\alpha,\lambda_\beta)$ les coordonnées d'un point du plan relativement à la base choisie) et la matrice de d_α relativement à cette base est

$$\mathrm{Mat}(d_\alpha,(\gamma_\alpha,\gamma_\beta))=\begin{pmatrix}0&0\\0&\beta-\alpha\end{pmatrix}\quad\text{et on a résolu}\quad\begin{pmatrix}0&0\\0&\beta-\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_\alpha\\\lambda_\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\C\end{pmatrix}$$

Puisque $\mathbf{K}\gamma_\beta=\mathrm{Ker}(d_\beta)$, la réunion des espaces $S_{(\alpha),C\gamma_\beta}$ est aussi l'ensemble des fonctions y dans E telles que $d_\alpha(y)\in\mathrm{Ker}(d_\beta)$, i.e. c'est $\mathrm{Ker}(d_\beta\circ d_\alpha)$. Comme c'est aussi E', il vient

$$\mathrm{Ker}(d_\beta \circ d_\alpha) = \mathrm{Ker}(d_\alpha) \oplus \mathrm{Ker}(d_\beta)\,,$$

résultat connu sous le nom de lemme de décomposition des noyaux.

Les arguments précédents tombent en défaut si $\beta = \alpha$, mais l'analyse est plus simple. En effet on a

$$d_\alpha \circ d_\alpha = \mu_\alpha \circ d \circ \mu_\alpha^{-1} \circ \mu_\alpha \circ d \circ \mu_\alpha^{-1} = \mu_\alpha \circ d \circ d \circ \mu_\alpha^{-1}\,.$$

On se retrouve avec la situation homogène en remplaçant d par $d \circ d$. Or $\mathrm{Ker}(d \circ d)$ est le sous-espace des fonctions affines, noté $\mathbf{K}_1[X]$, et on en déduit

$$y \in \mathrm{Ker}(d_\alpha \circ d_\alpha) \iff y \in \mathrm{Ker}(d \circ d \circ \mu_\alpha^{-1}) \iff \mu_\alpha^{-1}(y) \in \mathrm{Ker}(d \circ d)$$

i.e. le noyau recherché est l'ensemble des exponentielles-polynômes de la forme $x \mapsto (ax+b)\gamma_\alpha(x)$. On peut alors prendre pour E' l'espace dont une base est $(\gamma_\alpha, X\gamma_\alpha)$, i.e. les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ et $x \mapsto xe^{\alpha x}$. La matrice de d_α relativement à cette base est

$$\mathrm{Mat}(d_\alpha, (\gamma_\alpha, X\gamma_\alpha)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et on résout} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{\alpha_0} \\ \lambda_{\alpha,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}\,.$$

On en déduit une solution particulière pour l'équation

$$(\mathcal{E})_{nh} \quad y' - \alpha y = C\gamma_\alpha\,,$$

à savoir $x \mapsto Cx\gamma_\alpha(x)$, puis l'ensemble de toutes les solutions, à savoir la droite affine (horizontale) d'équation $\lambda_{\alpha,1} = C$ dans le plan E' rapporté aux coordonnées $(\lambda_{\alpha,0}, \lambda_{\alpha,1})$.

♥

En résumé, pour toute valeur de (α, β) dans $\mathbf{K}^2$, les solutions de $y' - \alpha y = z$ où z vérifie lui-même l'équation $z' - \beta z = 0$ est une droite (affine) de direction donnée par le sous-espace des solutions de l'équation homogène $y' - \alpha y$ et passant par une solution particulière multiple de z : multiple constant si $\beta \neq \alpha$ ou multiple par une fonction polynomiale de degré 1 sans terme constant si $\beta = \alpha$.

4 Étude des polynômes de l'endomorphisme dérivée

On étudie le cas $p = 2$, de sorte que l'équation $(\mathcal{E})$ s'écrit $y'' = a_1 y' + a_0 y$: on cherche les éléments du noyau de $d \circ d - a_1 d - a_0 \mathrm{Id}_E$. L'étude précédente a permis de trouver les éléments du noyau de $d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2}$ et on a, pour y dans E,

$$d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2}(y) = d_{\alpha_1}(y' - \alpha_2 y) = (y' - \alpha_2 y)' - \alpha_1(y' - \alpha_2 y) = y'' - (\alpha_1 + \alpha_2)y' + \alpha_1\alpha_2 y$$

de sorte que si $\alpha_1 + \alpha_2 = a_1$ et $\alpha_1\alpha_2 = -a_0$, l'étude précédente permet de conclure. Si $\mathbf{K}$ est le corps des complexes, de tels choix de α_1 et α_2 sont possibles et l'ensemble des solutions forme donc un espace vectoriel et il est engendré par γ_{α_1} et γ_{α_2}, si $\alpha_2 \neq \alpha_1$, ou par γ_{α_1} et $X\gamma_{\alpha_1}$ sinon.

L'ensemble $\mathscr{L}(E)$ admet une structure de $\mathbf{K}$-algèbre pour les lois $+$ et $\circ$. Le point délicat est la distributivité. On a par définition des lois sur $\mathbf{K}$

$$(\alpha u + \alpha' u') \circ v = \alpha u \circ v + \alpha' u' \circ v$$

par contre l'égalité
$$u \circ (\beta v + \beta' v') = \beta u \circ v + \beta' u \circ v'$$
provient de la linéarité de u : E^E n'a pas une structure d'algèbre, seul $\mathscr{L}(E)$ en a une ! Pour cette raison on a

$$d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2} = (d - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \circ (d - \alpha_2 \mathrm{Id}_E) = d \circ d - (\alpha_1 + \alpha_2)d + \alpha_1\alpha_2 \mathrm{Id}_E$$

ou encore, en convenant de noter $d \circ d = d^2$,

$$(d - \alpha_1 \mathrm{Id}_E) \circ (d - \alpha_2 \mathrm{Id}_E) = d^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)d + \alpha_1\alpha_2 \mathrm{Id}_E$$

de sorte qu'on a affaire à un « polynôme » en d :

$$S_{(a_0,a_1)} = \mathrm{Ker}(d^2 - a_1 d - a_0 \mathrm{Id}_E)$$

et que factoriser le polynôme $X^2 - a_1X - a_0$ en $(X - \alpha_1)(X - \alpha_2)$ permet de se ramener à l'étude (non homogène) précédente.

On a

$$S_{(a_0,a_1)} = \mathrm{Ker}(d_{\alpha_1}) \oplus \mathrm{Ker}(d_{\alpha_2}) = \mu_{\alpha_1}(\mathbf{K}_0[X]) \oplus \mu_{\alpha_2}(\mathbf{K}_0[X])$$

si $X^2 - a_1X - a_0$ admet deux racines simples, α_1 et α_2, ou

$$S_{(a_0,a_1)} = \mu_\alpha(\mathbf{K}_1[X])$$

si $X^2 - a_1X - a_0$ admet une racine double α.

Remarque 4 - 4

L'algèbre $\mathscr{L}(E)$ n'est pas commutative, mais les polynômes en d commutent entre eux car ils sont combinaisons linéaires de Id_E, d, d^2, ..., et toutes ces applications linéaires commutent entre elles :

$$\begin{aligned}(a_0\mathrm{Id}_E + a_1 d + \cdots) \circ (b_0\mathrm{Id}_E + b_1 d + \cdots) &= a_0b_0\mathrm{Id}_E + (a_0b_1 + b_0a_1)d + \cdots \\ &= (b_0\mathrm{Id}_E + b_1 d + \cdots) \circ (a_0\mathrm{Id}_E + a_1 d + \cdots)\ .\end{aligned}$$

Aparté

Ce calcul montre que les polynômes en d commutent entre eux car $\mathbf{K}[X]$ est une algèbre commutative : les calculs sont les mêmes.

5 Principe de superposition

Il reste à étudier le cas où $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et où $X^2 - a_1X - a_0$ n'a pas de racines réelles. Il en a donc deux complexes conjuguées non réelles, notées α et $\overline{\alpha}$. L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - a_1y' - a_0y = 0$ à valeurs complexes sont donc les combinaisons linéaires de γ_α et de $\gamma_{\overline{\alpha}}$. En particulier les parties réelle et imaginaire sont solutions puisque

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \mathrm{Re}(\gamma_\alpha(x)) = \frac{1}{2}\gamma_\alpha(x) + \frac{1}{2}\gamma_{\overline{\alpha}}(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\gamma_\alpha(x)) = \frac{1}{2i}\gamma_\alpha(x) - \frac{1}{2i}\gamma_{\overline{\alpha}}(x)\,,$$

i.e. $\mathrm{Re}(\gamma_\alpha)$ et $\mathrm{Im}(\gamma_\alpha)$ sont combinaisons linéaires (complexes) des solutions (complexes) γ_α et $\gamma_{\overline{\alpha}}$. Ce sont donc des solutions de $(\mathcal{E})$, a priori à valeurs complexes, mais en fait à valeurs réelles.

Si $\alpha = \rho + i\omega$ avec ρ et ω réels, on en déduit que les fonctions $\gamma_\rho c_\omega$ et $\gamma_\rho s_\omega$ données par $e^{\rho x}\cos(\omega x)$ et $e^{\rho x}\sin(\omega x)$ sont des solutions de l'équation et ont l'avantage d'être à valeurs réelles. Puisque γ_α et $\gamma_{\overline{\alpha}}$ sont combinaisons linéaires (complexes) de ces deux fonctions, on en déduit que $\gamma_\rho c_\omega$ et $\gamma_\rho s_\omega$ forment un système générateur de l'espace vectoriel complexe des solutions de $(\mathcal{E})$. Ce dernier étant de dimension 2, sur $\mathbf{C}$, on a affaire à une base. On est donc ramené à chercher les fonctions à valeurs réelles qui sont combinaisons linéaires complexes de $\gamma_\rho c_\omega$ et $\gamma_\rho s_\omega$.

Soit donc $\lambda\gamma_\rho c_\omega + \mu\gamma_\rho s_\omega$ une telle fonction. En évaluant en 0, on en déduit que λ est réel et, en évaluant en $\pi/2$, μ aussi. La réciproque étant immédiate, dans ce cas, l'espace vectoriel réel des solutions réelles de $(\mathcal{E})$ admet $\gamma_\rho c_\omega$ et $\gamma_\rho s_\omega$ comme base (en tant que **R**-espace vectoriel). Un peu de trigonométrie permet au passage d'obtenir que toutes les solutions sont de la forme

$$x \mapsto Ce^{\rho x}\cos(\omega x + \varphi)$$

avec C et φ réels.

Remarque 4 - 5

Les solutions réelles de $y'' = a_1 y' + a_0 y$, avec $(a_0, a_1) \in \mathbf{R}^2$ sont les parties réelles des solutions complexes du système : si $\lambda = Ce^{i\varphi}$ et $\alpha = \rho + i\omega$ alors, pour x réel, la partie réelle de $\lambda\gamma_\alpha(x)$ est $Ce^{\rho x}\cos(\omega x + \varphi)$.

On peut donc toujours se contenter de résoudre l'équation différentielle sur $\mathbf{C}$, puis de considérer les parties réelles pour obtenir les solutions à valeurs réelles. Cela provient du fait que l'équation différentielle considérée est **linéaire**.

♥

En résumé les solutions complexes de $y'' = a_1 y' + a_0 y$, avec $(a_0, a_1) \in \mathbf{C}^2$, sont de la forme $x \mapsto \lambda_1 \exp(\alpha_1 x) + \lambda_2 \exp(\alpha_2 x)$ ou $x \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 x)\exp(\alpha x)$ avec λ_1 et λ_2 complexes, selon que $X^2 - a_1 X - a_0$ admet deux racines distinctes α_1 et α_2, ou une racine double α. Si $(a_0, a_1) \in \mathbf{R}^2$, les solutions réelles sont les parties réelles des solutions précédentes.

6 Cas d'ordre 2 avec second membre

On étudie à nouveau les équations non homogènes dont le second membre est de la forme $C\gamma_\beta$ et on résout donc sur $\mathbf{C}$ l'équation

$$(\mathcal{E})_{nh} \qquad y'' - a_1 y' - a_0 y = C\gamma_\beta\ .$$

Si α_1 et α_2 sont les deux racines complexes, éventuellement confondues, de $X^2 - a_1 X - a_0$, l'équation se récrit

$$d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2}(y) = C\gamma_\beta$$

et on en déduit comme précédemment que y appartient au noyau de $d_\beta \circ d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2}$, que y peut s'écrire comme la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène et que la solution particulière peut être choisie comme une exponentielle-polynôme. Géométriquement :

— $\mathrm{Ker}(d_\beta \circ d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2})$ est un sous-espace vectoriel de E, de dimension 3 ;

— $S_{\mathcal{E}_{nh}}$ en est un sous-espace affine de dimension 2 ;

— la direction de ce sous-espace affine est donnée par le plan vectoriel $\mathrm{Ker}(d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2})$;

— la solution particulière peut être choisie au sein d'une droite vectorielle, supplémentaire du plan vectoriel précédent.

Concrètement on distingue plusieurs cas selon la multiplicité des racines du polynôme $(X-\beta)(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$. Comme γ_β est vecteur propre de d_{α_1} et de d_{α_2}, le cas le plus simple est celui où β est de multiplicité 1 : une solution particulière est alors de la forme $c\gamma_\beta$ avec $c = \dfrac{C}{(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)}$. On remarque au passage qu'on a $(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2) = \beta^2 - a_1\beta - a_0$ par choix de α_1 et α_2 comme racines du polynôme $X^2 - a_1X - a_0$.

Si maintenant β est de multiplicité 2, disons $\beta = \alpha_2$ et $\alpha_1 \neq \alpha_2$, on calcule $d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2}(X\gamma_\beta) = d_{\alpha_1}(\gamma_\beta) = (\beta-\alpha_1)\gamma_\beta$ et donc $\dfrac{CX}{\beta-\alpha_1}\gamma_\beta$ est solution particulière de $(\mathcal{E})_{nh}$, que l'on peut donc chercher comme exponentielle-polynôme, de base β, de degré 1 et de valuation nulle.

Enfin si $\beta = \alpha_2 = \alpha_1$, on calcule $d_{\alpha_1} \circ d_{\alpha_2}(X^2\gamma_\beta) = d_{\alpha_1}(2X\gamma_\beta) = 2\gamma_\beta$, de sorte qu'une solution particulière de $(\mathcal{E})_{nh}$ peut se chercher comme exponentielle-polynôme, de base β, de degré 2 et de valuation 1.

Remarque 4 - 6

Pour effectuer tous ces calculs, on prend comme fonctions de référence les exponentielles-polynômes $x \mapsto x^n e^{\beta x}$ et on applique l'opérateur d_α à cette fonction, i.e. en la notant y on calcule $y' - \alpha y$:

$$nx^{n-1}e^{\beta x} + \beta x^n e^{\beta x} - \alpha x^n e^{\beta x} = (nx^{n-1} + (\beta-\alpha)x^n)e^{\beta x}\ .$$

Les calculs seraient encore plus simple en choisissant plutôt les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}e^{\beta x}$:

$$\mathrm{Mat}(d_\beta, (\gamma_\beta, X\gamma_\beta, \dots, \frac{X^n}{n!}\gamma_\beta)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

On pourrait généraliser avec Leonhard Euler (1707–1783) :

Théorème 4 - 2

Euler - 1743 ♠

On a $S_{(a_0,\dots,a_{p-1})} = \mathrm{Ker}(Q(d))$, avec $Q = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} a_k X^k$. Si $Q = \prod_{i=1}^{m}(X-\alpha_i)^{m_i}$ on a $\mathrm{Ker}(Q(d)) \simeq \prod_{i=1}^{m} \mathbf{C}_{m_i-1}[X]$, la bijection associant $(P_1, \cdots, P_m)$ à la fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ donnée par $\sum_{i=1}^{m} P_i(x)e^{\alpha_i x}$.

L'équation associée à Q, mais avec un second membre non nul, admet comme ensemble de solutions un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(Q(d))$. Si le second membre est lui-même solution d'une équation différentielle linéaire scalaire à coefficients constants, on en a une description générale.

Théorème 4 - 3

Euler - 1743 ♠

On reprend les notatons du théorème précédent. Soit R dans $\mathbf{K}[X]$, unitaire, et b dans $\mathrm{Ker}(R(d))$, alors

1. l'équation $Q(d)(y) = b$ admet comme espace de solutions un sous-espace affine de $\mathrm{Ker}(QR(d))$, de direction $\mathrm{Ker}(Q(d))$.
2. Plus précisément, si $R = \prod_{j=1}^{\ell}(X-\beta_j)^{n_j}$, on peut chercher une solution particulière de $Q(d)(y) = b$ sous la forme $y(x) = \sum_{j=1}^{\ell} R_j(x)e^{\beta_j x}$ avec R_j dans $\mathbf{C}[X]$ et, si β_j n'est pas racine de Q, $\deg(R_j) < n_j$ et, si $\beta_j = \alpha_i$, $m_i \leq \mathrm{val}(R_j) \leq \deg(R_j) < m_i + n_j$.

Exemple 4 - 2

On prend $Q = X^4 - 1$ et $R = X^2 + 1$, i.e. b solution de $b'' + b = 0$. On cherche par exemple à résoudre

$$(\mathcal{E}) \qquad y^{(4)} - y = \cos\ .$$

On a ainsi $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (1, -1, i, -i)$ et $(\beta_1, \beta_2) = (i, -i)$. Une solution particulière est donc de la forme $x \mapsto axe^{ix} + bxe^{-ix}$ ou bien, car cela revient au même, $x \mapsto \lambda x\cos(x) + \mu x\sin(x)$. La dérivée quatrième d'une telle fonction est égale à $x \mapsto \lambda x\cos(x) + 4\lambda\sin(x) + \mu x\sin(x) - 4\mu\cos(x)$ et la solution particulière recherchée est donc $x \mapsto -\dfrac{x\sin(x)}{4}$. L'ensemble des solutions est donc donné par les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda\cos(x) + \left(\mu - \frac{x}{4}\right)\sin(x) + \alpha e^x + \beta e^{-x}$$

avec $(\lambda, \mu, \alpha, \beta) \in \mathbf{K}^4$.

Danger

La solution particulière n'est pas un multiple de cos. En effet cos n'est pas une exponentielle ! C'est une combinaison linéaire de deux exponentielles et donc la solution particulière est à chercher parmi les combinaisons linéaires d'exponentielles-polynômes de base i et $-i$, avec des polynômes de valuation au moins 1 ($m_3 = m_4 = 1$) et de degré strictement inférieur à 2 ($m_3 + n_1 = m_4 + n_2 = 2$ et $\alpha_3 = \beta_1$, $\alpha_4 = \beta_2$).

Pour résoudre le problème de Cauchy associé à une telle équation, il ne reste plus qu'à écrire un système linéaire.

Exemple 4 - 3

Si on cherche y de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $y^{(4)} - y = \cos$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$, on obtient comme équations $\lambda + \alpha + \beta = 1$, $\mu + \alpha - \beta = 0$, $-\lambda - \dfrac{1}{2} + \alpha + \beta = 0$ et $-\mu + \alpha - \beta = 0$. On en déduit $\lambda = \dfrac{1}{4}$, $\mu = 0$, $\alpha = \beta = \dfrac{3}{8}$, i.e.

$$y(x) = \frac{\cos(x) - x\sin(x) + 3\,\mathrm{ch}(x)}{4}\ .$$

7 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

On note I un intervalle réel et E un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbf{K}$.

Définition 4 - 4

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 une équation différentielle de la forme $y' = a(x) \cdot y + b(x)$ avec a et b définies sur I et à valeurs respectivement dans $\mathscr{L}(E)$ et E.

On appelle système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 une équation différentielle de la forme $Y' = A(x)Y + B(x)$ avec A et B définies sur I et à valeurs respectivement dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^n$.

On cherche alors Y dans $D^1(J, E)$ ou $D^1(J, \mathbf{K}^n)$ avec $J \subset I$. Il y a donc deux inconnues : J et Y.

En choisissant une base de E, on ramène une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à valeurs dans E à un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.

Programme

Dans le cadre du programme, on supposera toujours A et B continues et donc on cherchera Y de classe C^1.

Dans la suite on note (Σ) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 (ou son équivalent sous forme de système) et $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ le problème de CAUCHY donné par (Σ) et la condition $Y(x_0) = Y_0$. Dans ce cas, bien entendu, on cherche un couple (J, Y) avec J contenant x_0.

Remarque 4 - 7

On peut reformuler le problème sous forme intégro-différentielle. Soit Φ l'application de $C^0(I, E)$ dans lui-même définie par

$$\Phi(Y) \ : \ x \mapsto Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(u).Y(u)\,\mathrm{d}u + \int_{x_0}^{x} B(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

alors, d'après le théorème de LEIBNIZ-NEWTON, Y est solution de $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ sur I si et seulement si $\Phi(Y) = Y$.

Plus généralement, on pourrait introduire Φ_J pour tout intervalle J inclus dans I et contenant x_0, avec la même formule, et alors (J, Y) est solution de $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ si et seulement si $x_0 \in J \subset I$ et $\Phi_J(Y) = Y$.

Théorème 4 - 4

CAUCHY-LIPSCHITZ, cas linéaire

Le problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ admet une unique solution et elle est définie sur I. Autrement dit il existe une solution (I, Y) au problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ telle que, si (J, Z) en est une autre, alors $Z = Y_{|J}$.

Démonstration (non exigible). On va appliquer une méthode de point fixe et pour cela partir de la formulation intégro-différentielle $\Phi(Y) = Y$ avec

$$\Phi(Y) \ : \ x \mapsto Y_0 + \int_{x_0}^{x} A(u).Y(u)\,\mathrm{d}u + \int_{x_0}^{x} B(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

On va chercher à obtenir le côté contractant de Φ afin de montrer qu'elle admet un et un seul point fixe. Malheureusement ce n'est pas aussi simple, mais on peut montrer qu'une itérée de Φ est contractante et cela suffit.

Soit y_0 la fonction constante sur I égale à Y_0 et, pour n dans $\mathbf{N}$, y_{n+1} défini par $y_{n+1} = \Phi(y_n)$. On va montrer que (y_n) converge simplement vers une solution du problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$, qu'en fait la convergence est uniforme sur tout compact de I et enfin que toute autre solution sur un intervalle J est en la restriction.

Pour montrer que la convergence est uniforme, on s'intéresse à la série associée, i.e. la série $\sum \Delta y_n$ avec $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, et on montre que c'est une série normalement convergente sur tout compact en majorant sa norme par le terme général d'une série exponentielle. Pour cela on introduit $[a;b]$ un segment contenant x_0 et on s'intéresse à la partie linéaire de Φ, i.e. on introduit l'opérateur linéaire Λ de $C^0(I,E)$ dans lui-même défini par

$$\Lambda(Y) \ : \ x \mapsto \int_{x_0}^{x} A(u).Y(u)\,\mathrm{d}u\ .$$

On vérifie sans peine que c'est une application linéaire. De plus en posant $z_0 = y_0$ et, pour n dans $\mathbf{N}$, $z_n = \Delta y_n = y_{n+1} - y_n$, on a $z_{n+1} = \Lambda(z_n)$ pour tout entier n, de sorte qu'il vient

$$\forall x \in [a;b]\,, \quad \|z_{n+1}(x)\| \leq \left|\int_{x_0}^{x} \|A(u)\|_{\mathscr{L}(E)} \cdot \|z_n(u)\|\,\mathrm{d}u\right| \leq \|A\|_\infty \left|\int_{x_0}^{x} \|z_n(u)\|\,\mathrm{d}u\right|\,,$$

où $\|A(u)\|_{\mathscr{L}(E)}$ est la norme de l'application linéaire $A(u)$ pour la norme subordonnée à celle de E, i.e. $\|A(u)\|_{\mathscr{L}(E)} = \sup\limits_{X\in E, \|X\|=1} \|A(u)X\|$, et $\|A\|_\infty$ est la norme infinie de l'application continue de $[a;b]$ dans $\mathscr{L}(E)$, i.e. $\|A\|_\infty = \sup\limits_{a\leq u\leq b} \|A(u)\|_{\mathscr{L}(E)}$, cette norme étant bien définie d'après le théorème de WEIERSTRASS appliqué à la fonction continue $u \mapsto A(u)$.

On en tire, pour n dans $\mathbf{N}$ et x dans $[a;b]$,

$$\|z_{n+1}(x)\| \leq \|A\|_\infty \cdot \|z_n\|_\infty \cdot |x - x_0|$$

puis, en réinjectant cette inégalité dans l'inégalité précédente,

$$\|z_{n+2}(x)\| \leq \|A\|_\infty \left|\int_{x_0}^{x} \|A\|_\infty \cdot \|z_n\|_\infty \cdot |u - x_0|\,\mathrm{d}u\right| \leq \|A\|_\infty^2 \cdot \|z_n\|_\infty \cdot \frac{|x-x_0|^2}{2}\,,$$

et, par une récurrence immédiate, pour tout k dans $\mathbf{N}$,

$$\|z_{n+k}(x)\| \leq \|A\|_\infty^k \cdot \|z_n\|_\infty \cdot \frac{|x-x_0|^k}{k!}\ .$$

En particulier $\|z_n\|_\infty \leq \|z_0\|_\infty \dfrac{(\|A\|_\infty (b-a))^n}{n!}$ et donc $\sum z_n$ est normalement convergente sur $[a;b]$. En fait on a démontré au passage que Λ^n est lipschitzienne de rapport $\dfrac{(\|A\|_\infty (b-a))^n}{n!}$ et est donc contractante pour n assez grand.

Puisque $\sum z_n$ converge normalement sur tout compact de I, (y_n) converge uniformément sur tout compact et sa limite, que l'on note y, est une fonction continue sur I. Soit u dans I, on a donc $\lim y_n(u) = y(u)$ et donc, par continuité de l'application linéaire $A(u)$, $A(u)y(u) = \lim A(u)y_n(u)$ et mieux

$$\|A(u)y(u) - A(u)y_n(u)\| \leq \|A(u)\| \cdot \|y(u) - y_n(u)\| \leq \|A\|_\infty \|y_n - y\|_\infty\ ,$$

où la norme infinie est prise sur un compact $[a;b]$ inclus dans I. Par conséquent (Ay_n) converge uniformément vers Ay sur tout compact. En particulier, par intégration, $(\Lambda(y_n))$ converge uniformément vers Λy sur tout compact, tout comme $(\Phi(y_n))$ vers

$\Phi(y)$. Il en résulte $\Phi(y) = y$ puisque $(\Phi(y_n)) = (y_{n+1})$, i.e. y est point fixe de Φ et y est solution du problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$.

Soit maintenant z une solution de $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ sur un intervalle J contenant x_0 et $[a;b]$ un segment contenant x_0 et inclus dans J. On a donc $y = \Phi_{[a;b]}(y)$ et $z = \Phi_{[a;b]}(z)$ et donc $y - z = \Lambda_{[a;b]}(y - z)$ (où $\Lambda_{[a;b]}$ dénote la bi-restriction de Λ aux fonctions définies sur $[a;b]$). Donc, pour tout entier n dans $\mathbf{N}$, $y - z = \Lambda^n_{[a;b]}(y - z)$. Comme, pour n assez grand, Λ^n est lipschitzienne de rapport strictement inférieur à 1, on en déduit $y_{|[a;b]} = z_{|[a;b]}$ puis $z = y_{|J}$. □

On en déduit la généralisation d'un théorème démontré par EULER en 1743. Pour cela on introduit le système homogène (Σ_h) associé à (Σ).

Définition 4 - 5

Système homogène

Soit $(\Sigma) : y' = a(x) \cdot y + b(x)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1. On appelle équation différentielle (linéaire d'ordre 1) homogène associée l'équation (Σ_h) donnée par $y' = a(x) \cdot y$.

Soit (Σ) un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1 de la forme $Y' = A(x)Y + B(x)$. On appelle système (d'équations différentielles linéaires d'ordre 1) homogène associé le système (Σ_h) donné par $Y' = A(X)Y$.

Théorème 4 - 5

Espace des solutions – cas homogène

L'ensemble des solutions de $(\Sigma_h) : y' = a(x) \cdot y$ est un espace vectoriel de dimension n et l'application $u : y \mapsto y(x_0)$ est un isomorphisme de l'espace des solutions de (Σ_h) sur E.

L'ensemble des solutions de $(\Sigma_h) : Y' = A(x)Y$ est un espace vectoriel de dimension n et l'application $u : Y \mapsto Y(x_0)$ est un isomorphisme de l'espace des solutions de (Σ_h) sur $\mathbf{K}^n$.

Démonstration. L'application $y \mapsto (x \mapsto y'(x) - a(x)y(x))$ est linéaire de $C^1(I,E)$ dans $C^0(I,E)$, donc son noyau est un espace vectoriel. L'application $y \mapsto y(x_0)$ de $C^1(I,E)$ dans E est également linéaire et est bijective d'après le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ, donc c'est un isomorphisme. Même raisonnement *mutatis mutandis* dans le cas des systèmes. □

Théorème 4 - 6

Espace des solutions – cas général

L'ensemble des solutions de $(\Sigma) : y' = a(x) \cdot y + b(x)$ est un espace affine de dimension n et l'application $u : y \mapsto y(x_0)$ est un isomorphisme affine de l'espace affine des solutions de (Σ) sur E. De plus la direction de cet espace affine est l'espace des solutions du système homogène (Σ_h) associé.

L'ensemble des solutions de $(\Sigma) : Y' = A(x)Y + B(x)$ est un espace affine de dimension n et l'application $u : Y \mapsto Y(x_0)$ est un isomorphisme affine de l'espace affine des solutions de (Σ) sur $\mathbf{K}^n$. De plus la direction de cet espace affine est l'espace des solutions du système homogène (Σ_h) associé.

Autrement dit si Y et Z sont des solutions de (Σ) et si λ est un scalaire, alors $\lambda Y + (1-\lambda)Z$ est également une solution de (Σ) et on a $u(\lambda Y + (1-\lambda)Z) = \lambda u(Y) + (1-\lambda)u(Z)$.

Démonstration. L'existence d'au moins une solution est donnée par le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ. Le reste résulte de la linéarité du système homogène car si y_0 est une solution de (Σ), alors y est solution de (Σ) si et seulement si $y - y_0$ est solution de

(Σ_h). D'où l'aspect espace affine et le fait que la direction est donnée par l'espace des solutions de (Σ_h). L'isomorphisme vient encore du théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ et du fait que $y \mapsto y(x_0)$ est linéaire donc affine. □

Remarque 4 - 8

Cas des équations différentielles scalaires

En particulier l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre n est un espace vectoriel de dimension n. Dans le cas non homogène, l'ensemble des solutions est un espace affine de même dimension, dont la direction est l'espace vectoriel précédent.

Une autre façon de formuler l'unicité est via le principe de superposition.

Théorème 4 - 7

Principe de superposition – Première formulation

Soit A dans $C^0(I, \mathscr{L}(E))$, B dans $C^0(I, E)$ et Y_0 dans $C^1(I, E)$ tels que $Y_0' = A(x)Y_0 + B(x)$. Alors

$$\left\{Y \in C^1(I,E) \;\middle|\; Y' = A(x)Y + B(x)\right\} = \left\{Y_0 + Y \;\middle|\; Y \in C^1(I,E)\,, Y' = A(x)Y\right\} \;.$$

On dit que Y_0 est une solution particulière de (Σ).

Théorème 4 - 8

Principe de superposition – Seconde formulation

Soit A dans $C^0(I, \mathscr{L}(E))$, B_1 et B_2 dans $C^0(I, E)$ et (λ_1, λ_2) dans $\mathbf{K}^2$. Alors

$$\left\{Y \in C^1(I,E) \;\middle|\; Y' = A(x)Y + \lambda_1 B_1(x) + \lambda_2 B_2(x)\right\} = \left\{\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 \;\middle|\; (Y_1, Y_2) \in \left(C^1(I,E)\right)^2 , Y_i' = A(x)Y_i + B_i(x)\ (i = 1, 2)\right\} \;.$$

Démonstration. C'est direct. □

Définition 4 - 6

Système fondamental de solutions

Une famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ de solutions de (Σ_h) formant une base de cet espace vectoriel est appelée système fondamental de solutions pour (Σ_h).

Remarque 4 - 9

Pour tout x_0 dans I, $Y \mapsto Y(x_0)$ est un isomorphisme et donc $(Y_1, \dots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions pour (Σ_h) si et seulement si c'est une famille de solutions de (Σ_h) telle que $(Y_1(x_0), \dots, Y_n(x_0))$ soit une base de $\mathbf{K}^n$.

De plus l'assertion précédente est indépendante du choix de x_0 !

Définition 4 - 7

Wronskien

On appelle (déterminant) wronskien de la famille $(Y_1, \dots, Y_n)$ la fonction définie sur I par $w_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = \det(Y_1(x), \dots, Y_n(x))$. En l'absence d'ambiguïté, on la note w.

Programme

Dans le cadre du programme, le déterminant wronskien n'est étudié que pour les équations scalaires homogènes d'ordre 2.

Théorème 4 - 9

Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ une famille de solutions de (Σ_h), alors

— soit w est identiquement nul et alors $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est liée ;

— soit w ne s'annule nulle part sur I et alors $(Y_1, \cdots, Y_n)$ est libre et forme un système fondamental de solutions de (Σ_h).

Démonstration. C'est une conséquence directe de la remarque puisque l'indépendance de $(Y_1(x_0), \ldots, Y_n(x_0))$ ne dépend pas du choix de x_0. □

On en déduit

Théorème 4 - 10

Méthode de variation de la constante - théorème de Lagrange

Soit (Σ) un système d'équations différentielles linéaires, (Σ_h) son système homogène associé et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un système fondamental de solutions de (Σ_h). Alors Z est solution de (Σ) si et seulement si $Z = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i$ avec λ_i dans $C^1(I, \mathbf{K})$, pour $1 \leq i \leq n$, tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' Y_i = B$

Démonstration non exigible. Soit x dans I et Z une solution de (Σ). Puisque $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de (Σ_h), $(Y_1(x), \ldots, Y_n(x))$ est une base de E et on peut donc écrire $Z(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) Y(x)$ pour un certain $(\lambda_i(x))_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathbf{K}^n$ et on construit ainsi, de façon unique, un vecteur de $(\mathcal{F}(I, \mathbf{K}))^n$.

D'après les formules de Cramer on a de plus $\lambda_i = \dfrac{\det(Y_1, \ldots, Z, \ldots, Y_n)}{w}$, pour $1 \leq i \leq n$, et donc λ_i appartient à $C^1(I, \mathbf{K})$. On peut alors dériver l'expression donnant Z et il vient

$$Z' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' Y_i + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i Y_i' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i' Y_i + AZ$$

puisque $Y_i' = AY_i$. Ainsi Z est solution de (Σ) si et seulement si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i' Y_i = B$. □

Remarque 4 - 10

Le fait qu'on obtient une équation sur λ_i' n'est pas surprenant puisqu'en ajoutant une constante à λ_i on rajoute une solution de l'équation homogène (Σ_h) et donc, par le principe de superposition, on obtient encore une solution de (Σ).

Pour aller plus loin

Les formules de Cramer donnent plus explicitement

$$\lambda_i' = \frac{\det(Y_1, \ldots, B, \ldots, Y_n)}{w}$$

et donc Z est solution de $(\Sigma)_{x_0, Y_0}$ si et seulement si, pour $1 \leq i \leq n$ et x dans I,

$$\lambda_i(x) = \frac{\det(Y_1(x_0), \ldots, Y_0, \ldots, Y_n(x_0))}{w(x_0)} + \int_{x_0}^{x} \frac{\det(Y_1(t), \ldots, B(t), \ldots, Y_n(t))}{w(t)} \, \mathrm{d}t\ .$$

8 Cas homogène à coefficients constants

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = 3y_1 - 4y_2 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} y_1(x_0) = \alpha \\ y_2(x_0) = \beta \, . \end{cases}$$

ce qui se traduit par (Σ) : $Y' = AY$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $Y_0 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

Afin de chercher des vecteurs propres de A, i.e. des vecteurs X et des scalaires λ tels que $AX = \lambda X$, on étudie le noyau de $\lambda I_2 - A$ et donc le déterminant de cette matrice. En développant ce déterminant on obtient une fonction polynomiale et on peut ainsi associer un polynôme à la matrice A.

Définition 4 - 8

Polynôme caractéristique

Soit A une matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. L'application $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$, définie sur $\mathbf{K}$, est polynomiale en λ. Le polynôme associé est noté χ_A et est appelé polynôme caractéristique de A. Ainsi on a

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) \, .$$

Remarque 4 - 11

Avec cette terminologie, le spectre de A est donc l'ensemble des racines de χ_A puisque $A - \lambda I_n$ admet un noyau non réduit à $\{0\}$ si et seulement $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

On remarque également que χ_A est unitaire, de terme constant $(-1)^n \det(A)$.

On a ici $\chi_A = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$. On en déduit que $A - 2I_2$ admet un noyau, à savoir $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, de même que $A + 3I_2$, à savoir $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, on a $A = P\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On a alors

$$P^{-1}Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} Y = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2y_2 - y_1 \\ 3y_1 - y_2 \end{pmatrix}$$

et en particulier $(P^{-1}Y)' = P^{-1}Y'$. On en déduit

$$(P^{-1}Y)' = P^{-1}APP^{-1}Y = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}Y \, ,$$

i.e. $P^{-1}Y$ est solution de l'équation différentielle $Z' = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Z$.

Cette équation est découplée : en posant $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, il vient $z_1' = -3z_1$ et $z_2' = 2z_2$, puis $z_1(x) = \exp(-3(x - x_0))z_1(x_0)$ et $z_2(x) = \exp(2(x - x_0))z_2(x_0)$, et donc

$$Y = PZ = P\begin{pmatrix} \exp(-3(x - x_0)) & 0 \\ 0 & \exp(2(x - x_0)) \end{pmatrix} P^{-1}Y_0$$

ce qui permet d'écrire y_1 et y_2 comme combinaisons linéaires des fonctions exponentielles d'exposants -3 et 2. En utilisant P et P^{-1}, il vient

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x) = \dfrac{2\beta-\alpha}{5}e^{-3(x-x_0)} + \dfrac{6\alpha-2\beta}{5}e^{2(x-x_0)} \\ y_2(x) = \dfrac{3y_1(x)-y_1'(x)}{2} = \dfrac{6\beta-3\alpha}{5}e^{-3(x-x_0)} + \dfrac{3\alpha-\beta}{5}e^{2(x-x_0)}\,. \end{cases}}$$

♥

Au vu de la théorie que l'on vient de développer, il suffit de chercher le spectre de A, par exemple en calculant son polynôme caractéristique χ_A et en en trouvant les racines, puis de chercher des scalaires λ et μ tels que $y_1 = \lambda e^{-3(x-x_0)} + \mu e^{2(x-x_0)}$ et de poser $y_2 = \dfrac{3y_1-y_1'}{2}$. En tenant compte des conditions initiales, on obtient un système

$$\begin{cases} y_1(x_0) = \lambda+\mu = \alpha \\ y_2(x_0) = \dfrac{3y_1(x_0)-y_1'(x_0)}{2} = \dfrac{(3+3)\lambda+(3-2)\mu}{2} = \beta\,, \end{cases}$$

et il vient $\lambda = \dfrac{2\beta-\alpha}{5}$ et $\mu = \dfrac{6\alpha-2\beta}{5}$, d'où y_1 et y_2 comme précédemment.

Remarque 4 - 12

Ce calcul peut laisser penser qu'on a trouvé **une** solution et non pas toutes. En fait le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'assurer qu'il y a une solution et qu'elle est unique. On peut donc raisonner par conditions nécessaires (i.e. par analyse) sans avoir besoin de vérifier qu'elles sont suffisantes (i.e. de faire la synthèse), en tout cas si on invoque le théorème de Cauchy-Lipschitz !

Définition 4 - 9

On dit qu'une matrice A est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale ou, ce qui revient au même, s'il existe une base de $\mathbf{K}^n$ formée de vecteurs propres de A. On parle alors de base propre pour A.

Aparté

Avec cette terminologie, on a donc diagonalisé A afin de plus facilement en calculer l'exponentielle de A.

En effet le système $Y' = AY$ & $Y(x_0) = Y_0$ admet comme unique solution Y donné par $Y(x) = \exp((x-x_0)A)Y_0$ et si $A = PDP^{-1}$ cette solution s'écrit $Y(x) = P\exp((x-x_0)D)P^{-1}Y_0$, ce qui permet d'affirmer que les solutions y_1 et y_2 sont combinaisons linéaires d'exponentielles d'exposants les valeurs propres de D, donc de A.

D'une façon générale si le système (Σ) s'écrit $Y' = AY$ avec A semblable à une matrice diagonale, i.e. $A = PDP^{-1}$ avec D diagonale, alors Y est solution de (Σ) si et seulement si $P^{-1}Y$ est solution de $Z' = DZ$. Si $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $P^{-1}Y$ est donc un vecteur dont la i^{e} composante est une exponentielle de base λ_i, et donc Y est une combinaison linéaire de ces exponentielles.

Définition 4 - 10

On appelle système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants un système $(\Sigma) : Y' = AY + B(x)$ avec A constant et B dans $C^0(I, \mathbf{K}^n)$.

Propriété 4 - 2

Soliton

Soit $(\Sigma) : Y' = AY + B(x)$. Si V est un vecteur propre de A, de valeur propre associée λ, alors $x \mapsto e^{\lambda(x-x_0)}V$ est la solution du problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,V}$.

Démonstration. Le vecteur $V(x)$ donné par $e^{\lambda(x-x_0)}V$ a des composantes qui sont toutes des multiples (scalaires) de l'exponentielle de base λ et est donc une fonction de classe C^∞ de x dans $\mathbf{R}$ et $V' = \lambda V$ fois lui-même. Comme $AV = \lambda V$, on a donc aussi $V' = AV$. Comme $V(x_0) = V$ par construction la conclusion s'ensuit. □

Propriété 4 - 3

Superposition

Soit $(\Sigma) : Y' = AY + B(x)$. Si V admet une décomposition de la forme

$$V = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} V_\lambda$$

avec, pour tout λ, $V_\lambda \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$, alors

$$x \mapsto \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} e^{\lambda(x-x_0)} V_\lambda$$

est la solution du problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,V}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la linéarité ou, ce qui revient au même, du principe de superposition. □

Propriétés 4 - 4

Système fondamental et conjugaison

Soit $(\Sigma) : Y' = AY + B(x)$.

1. Si A est diagonalisable et si $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base propre pour A associée aux valeurs propres $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors en posant $Y_i(x) = e^{\lambda_i x}V_i$, $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de (Σ_h).
2. Si P appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$, alors Y est solution de $Y' = AY$ si et seulement si $P^{-1}Y$ est solution de $Z' = (P^{-1}AP)Z$.

Démonstration.

1. C'est une conséquence de ce qui précède et de la non-nullité des exponentielles, qui conduit au fait que $(e^{\lambda_i x}V_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbf{K}^n$ pour tout x dans I.
2. C'est une conséquence de la linéarité de la dérivation.

□

Pour aller plus loin

Soit $(\Sigma) : Y' = AY + B(x)$ un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Le système homogène admet pour solution $Y = e^{(x-x_0)A}Y_0$, celle-ci étant solution du problème de CAUCHY $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$.

Un système fondamental de solutions de (Σ_h) est $\left(e^{(x-x_0)A}e_i\right)_{1 \leq i \leq n}$ où $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbf{K}^n$. En particulier si $(Y_1, \ldots, Y_n) = e^{(x-x_0)A}$, alors $(Y_1, \ldots, Y_n)$ est un système fondamental de solutions de (Σ_h).

Aparté

On a affaire à un groupe à un paramètre, i.e.

1. $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, $e^{(x+y)A} = e^{xA}e^{yA}$,
2. $\forall x \in \mathbf{R}$, $\left(e^{xA}\right)^{-1} = e^{-xA}$,

autrement dit $x \mapsto e^{xA}$ est un homomorphisme de groupes.

Exemple 4 - 4

$$\begin{cases} y_1' = -3y_1 + y_2 \\ y_2' = -4y_1 + y_2 \ . \end{cases}$$

On a $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$, $\chi_A = (X+1)^2$ et A est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Un vecteur propre est $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, qu'on peut compléter par e_2 pour obtenir une base de $\mathbf{R}^2$. Les solutions du système homogène $z_2' = -z_2$ et $z_1' = -z_1 + z_2$ sont données par $z_2(t) = \mu e^{-t}$ puis $z_1(t) = (\lambda + \mu t)e^{-t}$. Il en résulte que les solutions du système associé à A sont de la forme $P(t)e^{-t}$ avec P polynôme de degré inférieur à 1. On peut les calculer en explicitant la matrice de changement de base, mais il est plus simple d'écrire $y_1(t) = (at + b)e^{-t}$, puis

$$y_2(t) = y_1'(t) + 3y_1(t) = (2at + 2b + a)e^{-t} \ .$$

On vérifie alors $y_2'(t) - y_2(t) + 4y_1(t) = 0$ et ainsi les solutions sont données par les couples, avec $(a,b) \in \mathbf{R}^2$,

$$((at + b)e^{-t}, (2at + 2b + a)e^{-t}) \ .$$

Si $n = 2$ alors χ_A est de degré 2. Il est donc soit simplement scindé (sur $\mathbf{C}$), soit avec une unique racine, qui est alors double. Dans le premier cas A admet deux valeurs propres distinctes, donc deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes. Ces deux vecteurs sont alors indépendants et forment ainsi une base propre de $\mathbf{C}^2$. Dans le second cas A admet une seule valeur propre, nécessairement dans $\mathbf{K}$ car c'est aussi une racine de χ_A'. Par conséquent les deux cas que l'on vient de traiter forment la généralité du cas $n = 2$:

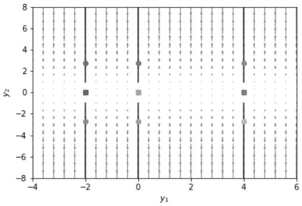
1. Soit A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et on écrit $\chi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$ puis on dispose de V_1 et V_2 dans $\mathbf{C}^2$ tels que $AV_i = \lambda_i V_i$ et les solutions du système homogène $Y' = AY$ sont les fonctions de la forme, avec $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbf{C}^2$,
$$Y = \alpha_1 e^{\lambda_1(x-x_0)} V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2(x-x_0)} V_2 \ .$$
Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, les solutions réelles sont les parties réelles de ces solutions.
2. Sinon on écrit $\chi_A = (X - \lambda)^2$ et on se ramène à un système triangulaire.

Définition 4 - 11

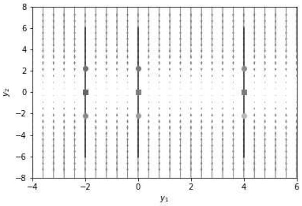
Si on a $n = 2$ et $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, on utilise un isomorphisme entre $\mathbf{R}^2$ et l'espace des solutions de (Σ_h) donné par le théorème de Cauchy-Lipschitz, avec $x_0 = 0$, en utilisant un système fondamental (Y_1, Y_2) de solutions.

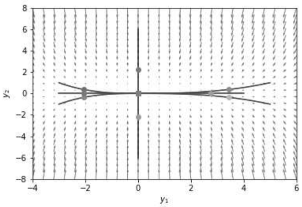
Ainsi un couple de solutions (y_1, y_2) s'écrit $\alpha Y_1 + \beta Y_2$. La courbe $t \mapsto (y_1(t), y_2(t))$ est appelé flot du système différentiel.

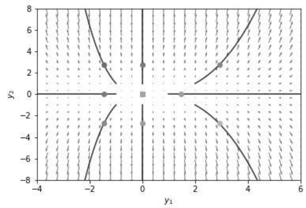
On distingue trois cas dans l'étude de (Σ_h) :

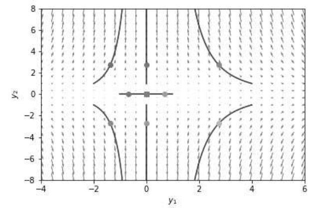


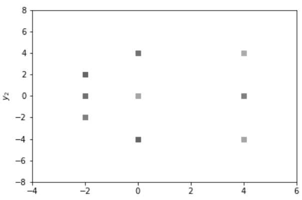
1. Si A a deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 associées aux vecteurs propres e_1 et e_2. Les flots, exprimés dans la base (e_1, e_2) sont de la forme $(\alpha e^{\lambda_1 t}, \beta e^{\lambda_2 t})$ et sont donc de signes constants. De plus
   — l'origine est une solution constante (et c'est la seule si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$).
   — Si $\lambda_1 = 0$, chaque point de l'axe des abscisses représente une solution constante et les autres flots sont des droites verticales.
   — Si $\lambda_2 = 0$, chaque point de l'axe des ordonnées représente une solution constante et les autres flots sont des droites horizontales.
   — Si $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, les quatre demi-axes ouverts de coordonnées forment quatre flots et les autres flots restent chacun dans un quadrant (ouvert). Dans le cas $\lambda_1\lambda_2 > 0$, les flots admettent l'origine comme point limite. Dans le cas $\lambda_1\lambda_2 < 0$, les flots admettent les axes de coordonnées comme asymptotes.





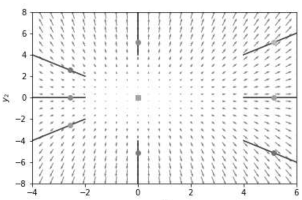




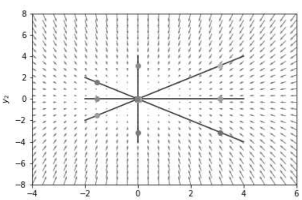


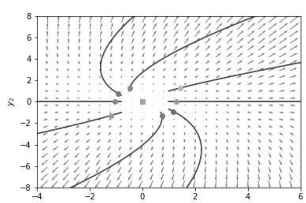
2. Si A a une valeur propre (réelle) double λ, alors soit A est scalaire et dans ce cas les flots sont de la forme $(\alpha e^{\lambda t}, \beta e^{\lambda t})$ et donc
   — l'origine est une solution constante (et c'est la seule si $\lambda \neq 0$).
   — Si $\lambda = 0$, toutes les solutions sont constantes.
   — Sinon les autres flots sont des demi-droites ayant l'orgine comme point limite.

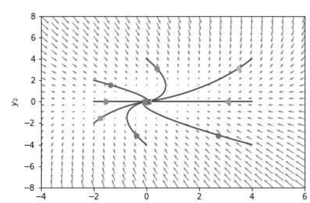
   Ou alors A n'est pas diagonalisable et donc semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Les flots sont alors de la forme $((\alpha t + \beta)e^{\lambda t}, \alpha e^{\lambda t})$ et donc

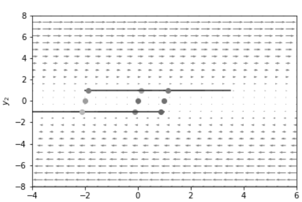


   — l'origine est une solution constante (et c'est la seule si $\lambda \neq 0$).
   — Si $\lambda = 0$, chaque point de l'axe des abscisses représente une solution constante et les autres flots sont des droites horizontales.
   — Sinon les demi-axes ouverts des abscisses sont des flots et les autres sont des courbes incluses dans l'un des demi-plans supérieur ou inférieur, ont l'origine comme point limite, traversent l'axe des ordonnées une fois et une seule et admettent une direction parabolique horizontale.







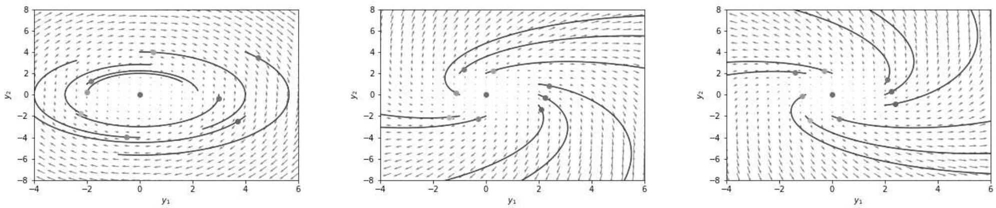


3. Enfin si A a deux valeurs propres non réelles λ et $\overline{\lambda}$, avec $\lambda = \mu + i\omega$ (μ et ω réels et $\omega \neq 0$), et un vecteur propre associé à λ de la forme $e_1 + ie_2$ avec e_1 et e_2 réels, alors les flots sont de la forme $(\gamma e^{\mu t}\cos(\omega t + \varphi), \gamma e^{\mu t}\sin(\omega t + \varphi))$, où $\gamma e^{i\varphi} = \alpha + i\beta$, et donc

— l'origine est l'unique solution constante.

— Si $\mu = 0$, les solutions sont périodiques (et c'est le cas où il en existe qui ne soient pas constantes) et sont des ellipses.

— Si $\mu \neq 0$, les autres flots sont des spirales ayant l'origine comme point limite.



Le cas $n = 3$ est à peine plus compliqué. On distingue encore plusieurs cas, que voici à travers des exemples.

Exemple 4 - 5

$$\begin{cases} x' = 2x + y + z \\ y' = x - y - z \\ z' = -x + 2y + 2z \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ de sorte que le système s'écrit $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Il vient $\chi_A = X(X-1)(X-2)$ et ainsi A admet trois valeurs propres distinctes, à savoir 0, 1 et 2. On cherche alors des vecteurs propres associés. On verra des méthodes plus efficaces, mais on peut ici se contenter de résoudre les systèmes permettant de calculer les noyaux de A, $A - I_3$ et $A - 2I_3$. On trouve respectivement $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On en déduit que $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est une base propre pour A. Si X admet (α, β, γ) comme coordonnées dans cette base, elles satisfont donc au système découplé : $\alpha' = 0$, $\beta' = \beta$ et $\gamma' = \gamma$. On en déduit que les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) = \mu e^t + 2\nu e^{2t} \\ y(t) = \lambda + 2\mu e^t + \nu e^{2t} \\ z(t) = -\lambda - 3\mu e^t - \nu e^{2t} \end{cases}$$

avec λ, μ, ν des constantes réelles.

Exemple 4 - 6

$$\begin{cases} x' = 2y + 2z \\ y' = -x + 2y + 2z \\ z' = -x + y + 3z \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et il vient $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$. On cherche les noyaux de $A - I_3$ et $A - 2I_3$ et on trouve respectivement $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{R}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi A n'est pas diagonalisable. Puisque $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible, on peut la noter P et considérer $P^{-1}AP$. Il vient $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ car

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et donc le système associé est plus agréable et s'écrit $\alpha' = \alpha - \gamma$, $\beta' = 2\beta + 2\gamma$ et $\gamma' = 2\gamma$. On se retrouve ainsi avec des systèmes du premier ordre avec second membre. Le premier système admet une solution particulière multiple constant de γ et le second multiple de γ par l'identité car 2 n'est pas racine de $X-1$, mais l'est de $X-2$. On trouve $\gamma(t) = \nu e^{2t}$, $\alpha(t) = -\nu e^{2t} + \lambda e^t$ et $\beta(t) = (2\nu t + \mu)e^{2t}$, soit

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^t + 2(-\nu + \mu + 2\nu t)e^{2t} \\ y(t) = (\mu + 2\nu t)e^{2t} \\ z(t) = \lambda e^t + (\mu + 2\nu t)e^{2t} \end{cases}$$

avec λ, μ, ν des constantes réelles.

On voit dans cet exemple que les coordonnées (dans la base canonique ou dans une autre) des solutions sont de la forme $\alpha e^t + (\beta + \gamma t)e^{2t}$. On retrouve la question des multiplicités des racines de l'équation caractéristique des équations scalaires, remplacée ici par celle des multiplicités du polynôme caractéristique. On peut alors chercher x sous cette forme et constater qu'on a $y+z = \dfrac{1}{2}x'$ et $(y+z)' = \dfrac{1}{2}x'' = -2x + 3(y+z) + 2z$, ce qui permet d'obtenir

$$\begin{cases} z = \dfrac{1}{4}x'' + x - \dfrac{3}{4}x' = \dfrac{\alpha}{2}e^t + \dfrac{1}{4}(2\beta + \gamma + 2\gamma t)e^{2t} \\ y = \dfrac{1}{2}x' - z = \dfrac{1}{4}(2\beta + \gamma + 2\gamma t)e^{2t} \ . \end{cases}$$

On retrouve ainsi les même solutions en posant $\alpha = 2\lambda$, $\gamma = 4\nu$, $2\beta + \gamma = \mu$.

On verra également comment encore plus simplifier le problème en diagonalisant par blocs la matrice A. Pour cela on calcule le noyau de $(A - 2I_3)^2$ et on verra que, dans ce cas, c'est aussi l'image de $A - I_3$, à savoir le plan d'équation $y = z$:

$$(A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On choisit alors le troisième vecteur dans ce plan. Si on le note v, $(A - 2I_3)v$ sera dans le noyau de $A - 2I_3$ et donc $Av - 2v$ est un multiple de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par exemple $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et on a

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et ainsi, dans la base $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, les coordonnées des solutions vérifient le système $\alpha' = \alpha$, $\beta' = 2\beta + 2\gamma$, $\gamma' = 2\gamma$, i.e. $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\lambda e^t + 2(\mu + 2\nu t)e^{2t} \\ (\mu + \nu + 2\nu t)e^{2t} \\ \lambda e^t + (\mu + \nu + 2\nu t)e^{2t} \end{pmatrix}$.

Exemple 4 - 7

$$\begin{cases} x' = x + y - z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = -2x + 2y + z \end{cases}$$

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Cette fois le polynôme caractéristique est $(X-1)^3$ et $\mathrm{Ker}(A - I_3)$ est de dimension 1. Les images successives de $(1,0,0)$ par $A - I_3$ sont $(0,2,-2)$ et $(4,4,4)$. En nommant (w,v,u) ces vecteurs on a $Aw = w + v$, $Av = v + u$ et $Au = u$. On vérifie que (u,v,w) est une base de $\mathbf{R}^3$ et, en notant $P = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi les coordonnées dans cette base vérifient $\gamma' = \gamma$, $\beta' = \beta + \gamma$ et $\alpha' = \alpha + \beta$, ce que l'on résout dans cet ordre : $\gamma(t) = \nu e^t$, $\beta(t) = (\mu + \nu t)e^t$, $\alpha(t) = (\lambda + \mu t + \frac{\nu}{2}t^2)e^t$. Ainsi les solutions sont de la forme

$$\begin{cases} x(t) = (4\lambda + \nu + 4\mu t + 2\nu t^2)e^t \\ y(t) = (4\lambda + 2\mu + (4\mu + 2\nu)t + 2\nu t^2)e^t \\ z(t) = (4\lambda - 2\mu + (4\mu - 2\nu)t + 2\nu t^2)e^t \end{cases}$$

avec λ, μ, ν des constantes réelles.

En résumé :

1. Soit A est diagonalisable sur $\mathbf{C}$ et on obtient cette fois-ci
$$Y = \alpha_1 e^{\lambda_1(x-x_0)}V_1 + \alpha_2 e^{\lambda_2(x-x_0)}V_2 + \alpha_3 e^{\lambda_3(x-x_0)}V_3 \ .$$
2. Soit χ_A admet une racine double (nécessairement dans $\mathbf{K}$) et une racine simple. Alors A se décompose en deux blocs, l'un de taille 1, l'autre de taille 2. Et ce dernier se traite comme dans le cas $n = 2$.
3. Enfin χ_A peut avoir une racine triple (nécessairement dans $\mathbf{K}$), disons $\chi_A = (X - \lambda)^3$. On montre alors que $\mathbf{K}^3$ admet un plan stable par $A - \lambda I_3$, ainsi qu'une droite stable incluse dans ce plan. En choisissant une base adaptée avec V_1 vecteur propre pour A associé à λ, V_2 tel que (V_1, V_2) soit stable par $A - \lambda I_3$ et V_3 pour compléter la base, on voit que A est semblable à $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et le système différentiel associé à cette matrice se résout itérativement comme en dimension 2 : $z_3' = \lambda z_3$, puis $z_2' = \lambda z_2 + c z_3$, puis $z_1' = \lambda z_1 + a z_2 + b e_3$. On se retrouve avec des équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants dont le second membre est également solution d'une telle équation, cas déjà étudiés.

Pour aller plus loin

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, on peut résoudre tout système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants par triangularisation.

9 Systèmes différentiels linéaires généraux

On étudie

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{4}{x}y_1 - \dfrac{4}{x^2}y_2 + 2 \\ y_2' = y_1 + \dfrac{1}{x}y_2 + x \end{cases}$$

On définit d'abord l'intervalle d'étude. Par exemple on pose $I = \mathbf{R}_+^*$. Ensuite on pose $A(x) = \begin{pmatrix} 4/x & -4/x^2 \\ 1 & 1/x \end{pmatrix}$, $B(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ x \end{pmatrix}$ et $(\Sigma) : Y' = A(x)Y + B(x)$.

On a $\chi_{A(x)} = X^2 - \dfrac{5}{x}X + \dfrac{8}{x^2}$. On a donc affaire à une matrice $A(x)$ dont les valeurs propres dépendent de x (concrètement $\lambda_1(x) = \dfrac{5+i\sqrt{7}}{2x}$ et $\lambda_2(x) = \overline{\lambda_1(x)}$, i.e. $\lambda_2(x) = \dfrac{5-i\sqrt{7}}{2x}$) et surtout dont les directions propres dépendent de x (concrètement $D_1 = \mathbf{C}v_1$ avec $v_1(x) = \begin{pmatrix} 2x \\ 3+i\sqrt{7} \end{pmatrix}$ et $D_2 = \mathbf{C}\overline{v_1} = \overline{D_1}$).

Si on tente d'appliquer la méthode précédente, on fait vite face à des difficultés. D'une part si Λ_1 est une primitive de λ_1 et si $Y = e^{\Lambda_1}v_1$, la dérivée de Y n'est pas $\lambda_1 Y$ et n'est donc pas non plus AY : $Y' = AY + e^{\Lambda_1}v_1'$. D'autre part, si $A(x) = P(x)D(x)P^{-1}(x)$ avec D une matrice diagonale, le fait que P dépende de x ne permet pas d'écrire $(P^{-1}Y)' = P^{-1}Y'$ de sorte qu'on ne peut pas se ramener facilement à un système diagonal.

Néanmoins le système homogène admet des solutions simples et on peut terminer l'étude grâce à la méthode de Lagrange. On peut par exemple chercher ces solutions, en raison de l'homogénéité des degrés, sous forme de monômes : $y_1 = ax^p$ et $y_2 = bx^q$. Il vient alors $q = p+1$ puis $ap = 4a - 4b$ et $b(p+1) = a+b$. Ainsi p est valeur propre de $\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, i.e. est racine de $X^2 - 4X + 4$. Il vient $p = 2$ et on peut prendre $Y_1(x) = (y_1(x), y_2(x)) = (2x^2, x^3)$.

Cette méthode ne fournit qu'une droite de solutions. Puisque y_1 et y_2 ne s'annulent pas sur I, on peut chercher une solution générale de (Σ_h) sous la forme $(\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2)$. On a alors

$$(\alpha_1 y_1)' - \frac{4}{x}\alpha_1 y_1 + \frac{4}{x^2}\alpha_2 y_2 = \alpha_1' y_1 + \alpha_1\left(y_1' - \frac{4}{x}y_1 + \frac{4}{x^2}y_2\right) + \frac{4(\alpha_2 - \alpha_1)}{x^2}y_2$$

et

$$(\alpha_2 y_2) - \alpha_1 y_1 - \frac{1}{x}\alpha_2 y_2 = \alpha_2' y_2 + \alpha_2(y_2' - y_1 - \frac{1}{x}y_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)y_1$$

de sorte que $(\alpha_1 y_1, \alpha_2 y_2)$ est solution de (Σ_h) si et seulement si

$$\alpha_1' = \alpha_2' = \frac{2}{x}(\alpha_1 - \alpha_2)$$

en tenant compte de $(y_1, y_2) = (2x^2, x^3)$ et du fait que x est non nul. En particulier $\alpha_1 - \alpha_2$ est constante et $\alpha_1 - \dfrac{1}{2} = \alpha_2 = \ln$ convient, i.e. le couple Y_2 donné par $Y_2(x) = ((2\ln(x)+1)x^2, x^3\ln(x))$ est solution de (Σ_h). Le wronskien w_{Y_1,Y_2} vaut $-x^5$ et ne s'annule donc pas sur I. On peut alors appliquer la méthode de Lagrange en cherchant les solutions de (Σ) sous la forme $\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2$. Le système (Σ) est alors équivalent à

$$\begin{cases} 2x^2\lambda_1' + (2\ln(x)+1)x^2\lambda_2' = 2 \\ x^3\lambda_1' + x^3\ln(x)\lambda_2' = x \end{cases}$$

et il vient

$$\lambda_1' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & (2\ln(x)+1)x^2 \\ x & x^3\ln(x) \end{vmatrix}}{-x^5} = \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2' = \frac{\begin{vmatrix} 2x^2 & 2 \\ x^3 & x \end{vmatrix}}{-x^5} = 0\ .$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est donné par

$$\boxed{\begin{cases} y_1(x) = -2x + 2C_1x^2 + C_2(2\ln(x)+1)x^2 \\ y_2(x) = -x^2 + C_1x^3 + C_2x^3\ln(x)\,, \end{cases} \quad \text{pour } C_1 \text{ et } C_2 \text{ dans } \mathbf{K}.}$$

Remarque 4 - 13

On voit que les solutions trouvées n'ont rien à voir avec $\exp(\Lambda_1)$ et $\exp(\overline{\Lambda_1})$, ce qui donnerait des solutions combinaisons linéaires de $x^{(5\pm i\sqrt{7})/2}$.

10 Cas scalaire, forme résolue

On note I un intervalle réel.

Définition 4 - 12

Équation différentielle linéaire scalaire

On appelle équation différentielle linéaire scalaire (sous forme résolue) une équation de la forme

$$(\Sigma) \qquad y^{(n)} = a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_0(x)y + b(x)$$

avec a_0, ..., a_{n-1} et b des fonctions continues sur I à valeurs réelles.

Propriété 4 - 5

Récriture matricielle

L'équation (Σ) peut se récrire sous la forme d'un système différentiel $Y' = A(x)Y + B(x)$ en prenant comme fonction inconnue $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ et en posant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

De plus les systèmes sont homogènes simultanément, i.e. $b = 0 \Leftrightarrow B = 0$.

Aparté

On dit que la matrice A est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$.

Plus généralement on peut récrire un système d'équations différentielles linéaires d'ordre quelconque comme un système d'ordre 1. Par exemple

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 - y_2' \\ y_2'' = y_1 - y_2 + 2y_2' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}.$$

En particulier (Σ_h) admet comme espace de solutions un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n et (Σ) un $\mathbf{K}$-espace affine de direction l'espace vectoriel précédent.

Définition 4 - 13

Problème de Cauchy

Une condition de Cauchy pour l'équation (Σ) prend la forme : $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$ avec x_0 dans I et y_0, …, $y_0^{(n-1)}$ des scalaires.

Matriciellement on retrouve $Y(x_0) = Y_0$ avec $Y_0 = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

10 1 Ordre 1

Une équation de la forme $y' + a(x)y = b(x)$ admet comme solution au problème de Cauchy donné par $y(x_0) = y_0$ la fonction donnée par

$$y(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(u)} b(u)\,\mathrm{d}u\right) e^{-A(x)}$$

avec $A(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u$.

On vérifie donc bien que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, que les solutions de (Σ_h) forment une droite vectorielle et celles de (Σ) une droite affine.

10 2 Ordre 2

On s'intéresse à $y'' + a(x)y' + b(x)y = c(x)$. On introduit $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(x) & -a(x) \end{pmatrix}$ et $B(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ c(x) \end{pmatrix}$ pour récrire le système sous la forme $Y' = A(x)Y + B(x)$, avec $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz permet d'affirmer qu'il existe une unique solution, définie sur I, telle que $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y_0'$ et ce pour tout triplet (x_0, y_0, y_0') dans $I \times \mathbf{K} \times \mathbf{K}$, mais en général il ne fournit pas de méthode explicite pour les trouver.

On suppose qu'on sait résoudre le système homogène (Σ_h). Deux solutions y_1 et y_2 forment un système fondamental de solutions si et seulement si leur wronskien w est non nul où w est donné par $w = y_1y_2' - y_2y_1'$. On vérifie sans peine qu'on a $w' = y_1y_2'' - y_2y_1''$

et donc $w' = -a(x)w$. Il en résulte $w(x) = w(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} a(u)\,\mathrm{d}u\right)$ et donc que soit w est identiquement nul, soit il ne s'annule jamais.

Remarque 4 - 14 En particulier pour l'équation $y'' + q(x)y = 0$, le wronskien de deux solutions est de dérivée nulle et est donc constant.

On résout enfin (Σ) par la méthode de LAGRANGE :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad B(x) = Y' - A(x)Y = \lambda_1' \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \end{pmatrix} + \lambda_2' \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \end{pmatrix}$$

i.e. on fait en sorte que, dans l'expression de y'', aucun terme en λ_i'' n'apparaisse : $y' = (\lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2') + (\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2)$, de sorte que la première ligne de B donne $\lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0$ et ainsi $y' = \lambda_1 y_1' + \lambda_2 y_2'$. Il vient alors $y'' = \lambda_1 y_1'' + \lambda_2 y_2'' + \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2'$. L'équation vérifiée par y_1 et y_2 fournit alors la dernière équation, à savoir $c = y'' + ay' + by = \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2'$. En résumé :

$$\begin{cases} \lambda_1' y_1 + \lambda_2' y_2 = 0 \\ \lambda_1' y_1' + \lambda_2' y_2' = c\,. \end{cases}$$

Par exemple pour l'équation $y'' + y = \cos^3(t)$, on trouve tout d'abord $(\sin, \cos)$ comme système fondamental de solutions et on résout alors

$$\begin{cases} \lambda_1' \sin + \lambda_2' \cos = 0 \\ \lambda_1' \cos - \lambda_2' \sin = \cos^3\,, \end{cases}$$

ce qui donne $\lambda_2' = -\cos^3 \sin$ et $\lambda_1' = \cos^4$. Pour intégrer λ_1, on linéarise et il vient pour solutions de l'équation

$$y(x) = \left(a + \frac{1}{4}\cos^4(x)\right)\cos(x) + \left(b + \frac{3x}{8} + \frac{\sin(2x)}{8} + \frac{\sin(4x)}{32}\right)\sin(x)$$

avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2$.

11 Cas scalaire, forme non résolue

11 1 Ordre 1

Lorsque l'équation est sous la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, i.e. n'est pas sous forme résolue, on résout sur des intervalles où a ne s'annule pas et on essaye de recoller les solutions. Ainsi si on étudie un problème de CAUCHY en x_0 tel que $a(x_0) = 0$, on cherche (s'il existe) un intervalle $]\alpha; \beta[$ où a ne s'annule qu'en x_0, on résout sur $]\alpha; x_0[$ et sur $]x_0; \beta[$ et on cherche les solutions acceptant d'être de classe C^1 sur $]\alpha; \beta[$.

Par exemple : (Σ) $xy' - 2y = x^3 \sin(x)$. En s'intéressant à $y' - \dfrac{2}{x}y = x^2 \sin(x)$ sur $\mathbf{R}_-^*$ et $\mathbf{R}_+^*$, on trouve les solutions $y(x) = x^2(c_- - \cos(x))$ et $y(x) = x^2(c_+ - \cos(x))$, avec des constantes c_- et c_+ réelles. On en déduit que le problème de CAUCHY $y(0) = y_0$ n'admet aucune solution si $y_0 \neq 0$ et une infinité si $y_0 = 0$. Bien entendu les solutions de classe C^2 (voire de classe C^∞ ou développables en série entière en 0) sont les solutions naturelles $y(x) = x^2(c - \cos(x))$ avec c réel.

On peut également reprendre l'exemple déjà étudié pour un système linéaire, à savoir

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{4}{x}y_1 - \dfrac{4}{x^2}y_2 + 2 \\ y_2' = y_1 + \dfrac{1}{x}y_2 + x \end{cases}$$

dont les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$ ou $\mathbf{R}_+^*$ sont données par

$$\begin{cases} y_1(x) = -2x + 2C_1x^2 + C_2(2\ln(x)+1)x^2 \\ y_2(x) = -x^2 + C_1x^3 + C_2x^3\ln(x)\,, \end{cases}$$

pour C_1 et C_2 dans $\mathbf{K}$.

On peut récrire le système sous la forme

$$\begin{cases} x^2y_1' = 4xy_1 - 4y_2 + 2x^2 \\ xy_2' = xy_1 + y_2 + x^2 \end{cases}$$

et étudier les solutions définies en 0. On voit alors que les solutions obtenues avec des constantes arbitraires conviennent si on demande juste y_1 et y_2 de classe C^1 mais qu'on a toujours $y_1(0) = y_2(0) = 0$. Une fois encore le théorème de Cauchy-Lipschitz est mis en défaut : il peut n'y avoir aucune solution tout comme il peut y en avoir une infinité.

11 2 Recherche de solutions à partir d'une d'elles

On a vu que dès qu'on a affaire à un système d'ordre 2 à coefficients non constants les choses se compliquent car le théorème de Cauchy-Lipschitz ne fournit pas de méthode pour construire les solutions (autrement que de façon approchée via le théorème de point fixe). D'où la nécessité de développer des méthodes de recherche de solutions.

Si on a une solution d'une équation d'ordre 2, on peut chercher la seconde sous forme de multiple de la première. C'est une variante de la méthode de Lagrange et est légitimé par l'étude du wronskien. En effet si y_1 est une solution alors y_2 est solution de $y'y_1 - yy_1' = w$ avec w explicite. Comme y_1 est solution de l'équation homogène, la méthode de variation de la constante, dans le cas des équations d'ordre 1, invite à chercher y_2 comme multiple de y_1.

Danger

On prendra garde néanmoins que l'équation $y'y_1(x) - yy_1'(x) = w(x)$ n'est pas écrite sous forme résolue et doit donc être intégrée sur des intervalles où y_1 ne s'annule pas, puis il faut recoller les différents morceaux pour obtenir y_2.

Prenons par exemple

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 4x^4\,.$$

Une solution monomiale (qu'il est raisonnable de chercher puisqu'on a une certaine homogénéité des degrés) du système homogène est donnée par $y_1(x) = x^2$, et c'est la seule. Sur $\mathbf{R}_+^*$, on peut chercher y sous la forme $y(x) = f(x)x^2$ et l'équation se récrit $x^4f'' + x^3f' = 4x^4$. C'est évidemment une équation en f' puisque f constante convient. L'équation précédente s'intègre en $(xf')' = 4x$ et il vient $y(x) = x^4 + x^2(\alpha\ln(x) + \beta)$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

Remarque 4 - 15

On a ici $w(x) = x^3$ et donc l'équation de degré 1 pour y_2 est $x^2y' - 2xy = \alpha x^3$ ou encore $y' - \dfrac{2}{x}y = \alpha x$. Les formules dans le cas des équations différentielles linéaires d'ordre 1 fournissent $y(x) = x^2\left(\alpha \displaystyle\int \frac{x}{x^2}\,\mathrm{d}x\right)$ et on retrouve les mêmes solutions que précédemment.

12 Compléments

12 1 Méthodes numériques

Quand on ne peut obtenir une formule exacte pour la solution recherchée ou si on a besoin d'un renseignement de nature plus numérique, on peut calculer de façon approchée la solution d'une équation différentielle en partant de la donnée initiale et en interprétant l'équation comme une équation en des points différents, i.e. en remplaçant les dérivées par des taux d'accroissement. C'est l'idée de la méthode d'EULER et de ses succédanés.

Ainsi l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ peut s'interpréter $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a(x)y + b(x)$. Reste à savoir où on calcule Δy et combien vaut Δx (qui est sensé être petit). La méthode explicite consiste à calculer Δy comme différence entre le futur et le présent et conduit donc à une équation pour la valeur dans le futur :

$$y(x + \Delta x) - y(x) = \Delta x\,(a(x)y(x) + b(x)) \ .$$

La méthode implicite consiste à calculer Δy comme différence entre le présent et le passé et conduit à une équation pour la valeur dans le présent :

$$y(x) - y(x - \Delta x) = \Delta x\,(a(x)y(x) + b(x)) \ .$$

Les deux méthodes semblent très proches mais si y est à valeurs vectorielles et donc si $a(x)$ est une matrice, dans le premier cas on calcule directement $y(x + \Delta x)$ alors que dans le second cas il faut résoudre une équation pour obtenir $y(x)$ et pour cela inverser l'opérateur $\mathrm{Id} - \Delta x a(x)$. C'est toujours possible si Δx est assez petit car si la norme de $\Delta x a(x)$ est strictement inférieure à 1, alors $\mathrm{Id} - \Delta x a(x)$ est inversible. Bien qu'elle semble plus contraignante la méthode d'EULER implicite donne de meilleures approximations, comme on peut déjà le voir avec l'exponentielle, i.e. avec $y' = y$.

Concrètement, on se donne un problème de CAUCHY de la forme $y' = a(x)y+b(x)$ et $y(0) = y_0$ avec a et b de classe C^1 sur $[0, 1]$. Soit n dans $\mathbf{N}^*$, $\Delta x = h = \dfrac{1}{n}$, $x_k = kh = \dfrac{k}{n}$. On estime $y(1)$ en calculant des approximations y_k de $y(x_k)$ successivement grâce à la formule

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k \approx y_k + h(a(x_k)y_k + b(x_k)) = \left(1 + \frac{a(x_k)}{n}\right) y_k + \frac{b(x_k)}{n}$$

de sorte que, puisque y est de classe C^2, l'erreur est donnée par la formule de TAYLOR-LAPLACE

$$y(x_{k+1}) = \left(1 + \frac{a(x_k)}{n}\right) y(x_k) + \frac{b(x_k)}{n} + \int_{x_k}^{x_{k+1}} (x_{k+1} - t)y''(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

Il vient

$$|y(x_{k+1}) - y_{k+1}| \leq \left(1 + \frac{\|a\|_\infty)}{n}\right) |y(x_k) - y_k| + \|y''\|_\infty \frac{1}{2n^2}$$

et donc, par majoration des suites arithmético-géométriques,

$$|y(1) - y_n| \leq \frac{\|y''\|_\infty}{2\,\|a\|_\infty n} \left(e^{\|a\|_\infty} - 1\right) = O\left(\frac{1}{n}\right) .$$

En effet si $u_{k+1} \leq \alpha u_k + \beta$, pour une suite (u_k) avec α positif et distinct de 1 et β réel, alors $u_{k+1} + \dfrac{\beta}{\alpha - 1} \leq \alpha\left(u_k + \dfrac{\beta}{\alpha-1}\right)$ et donc $u_k \leq \alpha^k u_0 + (\alpha^k - 1)\dfrac{\beta}{\alpha-1}$. Ici $u_0 = y_0 = 0$, $\alpha^n - 1 = (1 + \|a\|_\infty /n)^n - 1 \leq e^{\|a\|_\infty - 1}$ et $\dfrac{\beta}{\alpha - 1} = \dfrac{\|y''\|_\infty}{2\,\|a\|_\infty n}$.

Si on étudie une équation vectorielle, on posera $Y_{k+1} = (I + hA(x_k))Y_k + hB(x_k)$ et on aura $Y(1) \approx Y_n$ et l'approximation est en $1/n$ si A et B sont de classe C^1.

On peut améliorer le résultat en prenant la méthode du point milieu, i.e. en posant $Y_{k+1} = Y_k + hZ_k$ avec

$$Z_k = A\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \cdot \left[Y_k + \frac{h}{2}\left(A(x_k)Y_k + B(x_k)\right)\right] + B\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) .$$

D'une façon générale de telles idées conduisent aux méthodes dites de RUNGE-KUTTA.

12 2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz

Théorème 4 - 11

CAUCHY-LIPSCHITZ (local) – PICARD-LINDELÖF

Tout problème de CAUCHY $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet au moins une solution et celle-ci est unique au voisinage de x_0 au sens suivant : si (J_1, y_1) et (J_2, y_2) sont deux solutions, alors y_1 et y_2 coïncident sur $J_1 \cap J_2$.

Remarque 4 - 16

On peut afaiblir les hypothèses et se contenter de f localement lipschitzienne (ce qui est le cas si elle est de classe C^1 puisqu'alors sa différentielle est bornée sur tout voisinage compact d'un point) et même de f continue par rapport à x et localement lipschitzienne par rapport à y.

La démonstration de ce théorème est technique mais elle est presque identique à celle dans le cas linéaire et se base sur les deux idées : se ramener à un problème intégro-différentiel et le résoudre en appliquant un théorème de point fixe.

Pour aller plus loin

Si on n'a pas besoin de l'unicité de la solution, on peut recourir au théorème de CAUCHY-PEANO-ARZELÀ : en supposant simplement f continue, il existe des solutions au problème de CAUCHY. La démonstration procède suivant les mêmes lignes, mais on n'a pas de point fixe, il faut extraire une sous-suite convergente. On utilise pour cela un théorème puissant d'analyse (largement hors-programme) : le théorème d'ASCOLI.

En dimension infinie, i.e. si E est un espace de BANACH, le théorème de CAUCHY-LIPSCHITZ est encore valide sous les hypothèses générales précédentes, mais pas celui de

Cauchy-Peano-Arzelà. Pour ce dernier il faut rajouter une hypothèse très contraignante : f transforme les parties bornées en parties relativement compactes (on dit que f est compacte).

Corollaire 4 - 1

Une conséquence immédiate du théorème de Cauchy-Lipschitz est que les courbes intégrales d'une équation différentielle d'ordre 1 ne peuvent se croiser qu'à des points où les hypothèses du théorème ne sont pas satisfaites. Par exemple pour $(x^2-1)y'+y^2=1$, les seuls croisements possibles sont en les sommets du carré unité pour la norme infinie, i.e. $(\pm 1, \pm 1)$.

Pour une équation d'ordre 2, deux courbes intégrales ne peuvent être tangentes sans être confondues qu'en des points où les hypothèses du théorème ne sont pas satisfaites.

Définition 4 - 14

Une solution maximale à un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

est une solution (J, y) telle que si $(\tilde{J}, \tilde{y})$ est une solution vérifiant $J \subset \tilde{J}$ et $y = \tilde{y}_{|J}$, alors $J = \tilde{J}$.

Théorème 4 - 12

Cauchy-Lipschitz global

Tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale et son intervalle de définition est ouvert (dans I).

Propriété 4 - 6

Soit y une solution maximale avec $I = \left]a; b\right[$ et y définie sur $\left]\alpha; \beta\right[$. Alors

— Si $a < \alpha$, alors y n'admet pas de limite à droite en α.

— Si $\beta < b$, alors y n'admet pas de limite à gauche en β.

En effet, sinon le prolongement par continuité de y permettrait de la définir en α ou β et donc sur un intervalle non-ouvert.

12 3 Utilisation d'exponentielle de matrices

Proposition 4 - 2

Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbf{K}$-algèbre normée, i.e. munie d'une norme sous-multiplicative, et a dans $\mathcal{A}$, alors la fonction $t \mapsto \exp(ta)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. De plus sa dérivée est $t \mapsto a \cdot \exp(ta)$ $(= \exp(ta) \cdot a)$. En particulier $t \mapsto \exp(ta)$ est solution de $y' = ay$ sur $\mathbf{R}$ et si $\mathcal{A} = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $t \mapsto \exp(tA)Y_0$ est solution de $Y' = AY$.

Démonstration. On a convergence normale sur tout compact de $\mathbf{R}$ de la série $\sum \dfrac{t^n a^n}{n!}$ ainsi que de ses séries dérivées (à tout ordre), et, par dérivation terme à terme, il vient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{a^n t^n}{n!}\right) = a\frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{a^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}a\,.$$

Les cas particulier s'en déduise, en utilisant dans le cas matriciel le fait que la multiplication par Y_0 est linéaire. □

Soit $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$: $Y' = AY$ avec $Y(x_0) = Y_0$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Les solutions de $(\Sigma)_{x_0,Y_0}$ sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto \exp((x-x_0)A)Y_0$. Pour calculer cette exponentielle, on est amené à trigonaliser la matrice A sur $\mathbf{C}$, i.e. à décomposer χ_A en facteurs irréductibles et à se ramener, via le théorème de décomposition des noyaux, au cas $\chi_A = (X-\lambda)^m$. Dans ce cas on écrit $A = A - \lambda I_n + \lambda I_n$, puis $\exp(tA) = \exp(t\lambda)\exp(t(A-\lambda I_n))$ et, puisque $A - \lambda I_n$ est nilpotente,

$$\exp((x-x_0)A) = e^{\lambda(x-x_0)} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-\lambda I_n)^j .$$

La décomposition en somme directe $\mathbf{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker}\left((A-\lambda_i)^{m_i}\right)$ permet d'écrire $Y_0 = \sum_{i=1}^{k} Y_i$ et alors la solution cherchée est donnée par

$$Y(x) = \sum_{i=1}^{k} \left(e^{\lambda_i(x-x_0)} \sum_{j=0}^{m_i-1} \frac{(x-x_0)^j}{j!}(A-\lambda_i I_n)^j Y_i \right) .$$

Lorsqu'on part d'une équation différentielle linéaire scalaire $y^{(n)} = a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0 y$, la matrice A est la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^n - a_{n-1}X^{n-1} - \cdots - a_0$, et ce dernier est aussi χ_A. On note $\mathcal{L}$ l'opérateur différentiel à coefficients constants donné par $\chi_A(d)$ où d est la dérivation, i.e. $\mathcal{L}(y) = y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \cdots - a_0 y$. La résolution de l'équation différentielle revient à la recherche du noyau $\operatorname{Ker}(\mathcal{L})$.

Dans le cas d'une équation différentielle linéaire à coefficients non constants, l'analyse est plus complexe.

Théorème 4 - 13

Lagrange - 1775 & 1788 ♠

Soit $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel à coefficients quelconques, d'ordre n, et y_1, …, y_n des solutions de $\mathcal{L}(y) = 0$ sur I, linéairement indépendantes. Alors

1. La matrice wronskienne $W(x)$, donnée par $W = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$, est de rang n pour tout x dans I.
2. Le déterminant $w(x)$ de $W(x)$, appelé wronskien, satisfait une équation différentielle du type $z' = -a_{n-1}(x)z$.
3. Les solutions de $\mathcal{L}(y) = b$, avec b continue sur I, forment un espace affine de direction $\mathrm{V}ect\,(y_1, \cdots, y_n)$ et passant par y_0 avec

$$y_0(x) = \int_{x_0}^{x} {}^{\mathrm{t}}Y(x)W(t)^{-1}F(t)\,\mathrm{d}t$$

où $Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}$ et $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$.

Exercices

Ordre 2 scalaire

4 - 1 Ⓢ ★ Ordre 2

Intégrer les équations suivantes :

a. $y'' - 2y' + 2y = xe^x$.

b. $y'' - 4y' + 4y = 2(x-2)e^x$.

c. $y'' - 4y' + 13y = 10\cos(2x) + 25\sin(2x)$.

d. $y'' + y = \operatorname{cotan}(x)$.

e. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{x-1}{x^2}e^{-x}$.

f. $y'' + y = P(x)$ où P est un polynôme.

Théorème de Cauchy-Lipschitz

4 - 2 Ⓢ ★★ Mouvement plan

Soit (L) : $y' = a(x)y$ une équation différentielle linéaire où $a \in C(I, \mathscr{L}(E))$ avec E un espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E est stabilisé par $a(x)$ pour tout x de I.

Montrer que, si $x_0 \in I$ et $y_0 \in F$, alors la solution y de (L) satisfaisant aux conditions initiales $y(x_0) = y_0$ vérifie $\forall x \in I$, $y(x) \in F$.

4 - 3 Ⓢ ★★ Théorème de Floquet

On considère l'équation différentielle (S) : $Y' = A(x)Y$ où $A : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est une application continue et T-périodique.

a. Montrer que (S) admet une solution non nulle $V : \mathbf{R} \to \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{C})$ telle que

$$\exists \lambda \in \mathbf{C},\ \forall x \in \mathbf{R},\ V(x+T) = \lambda V(x)\ .$$

<u>Indication</u> : utiliser l'application u qui à une solution V associe $V_T : x \mapsto V(x+T)$.

b. Soit $(V_1, \ldots, V_n)$ un système fondamental pour (S) et $M : x \mapsto M(x)$ où $M(x)$ est la matrice dont les colonnes sont $V_1(x), \cdots, V_n(x)$. Montrer qu'il existe B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R},\ M(x+T) = M(x)B\ .$$

4 - 4 Ⓢ ★★ Formule d'Abel

Soit $y' = a(x)y$ une équation linéaire où $a \in C(I, \mathscr{L}(E))$ avec E un espace vectoriel de dimension n rapporté à une base $\mathcal{B}$, avec $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$. Démontrer que, pour tout $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ système fondamental de n solutions sur I, le wronskien de $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ vérifie la formule d'Abel valable pour tout $(x_0, x) \in I^2$:

$$\frac{w_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(x)}{w_{\mathcal{B}}(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)(x_0)} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \operatorname{Tr} a(u)\,\mathrm{d}u\right)\ .$$

4 - 5 Ⓢ ★★★ Résolvante

Soit (S) le système homogène $Y' = A(x)Y$ avec $A : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ continue sur I. À (S) on associe l'équation linéaire homogène (H) : $M' = A(x)M$ définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Les solutions sont des applications $\Phi : I \to \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ de classe C^1 et telles que pour tout x de I, $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$.

a. Soit Φ une solution sur I de (H). Montrer que les applications $\Phi_j : x \mapsto C_j(x)$, la j-ème colonne de $\Phi(x)$, sont solutions de (S).

b. Soit, pour x_0 dans I, Φ_{x_0} l'unique solution de (H) satisfaisant aux conditions initiales $\Phi_{x_0}(x_0) = I_n$. Montrer que les colonnes de Φ_{x_0} forment un système fondamental pour (S).

Pour tout x dans I, on pose $\Phi_{x_0}(x) = R(x_0, x)$. L'application R ainsi définie s'appelle la résolvante de (S).

c. Montrer que, pour Y_0 donné dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, l'unique solution Φ de (S) satisfaisant aux conditions initiales (x_0, Y_0) est donnée par $\Phi(x) = R(x_0, x)Y_0$.

d. Quelle est la résolvante de (S) : $Y' = AY$?

Cas homogène à coefficients constants

4 - 6 Ⓢ ★ Dimension 2

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} y' + y & = & z \\ z' + 2z & = & y - 1\ . \end{array}\right.$

4 - 7 Ⓢ ★ Problème de Cauchy †

Déterminer les solutions des problèmes de Cauchy

a. $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x + y + z \\ y' & = & x - y + z \\ z' & = & x + y - z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 3 \\ y(0) & = & 1 \\ z(0) & = & 1 \end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & 2x + y + 3z \\ y' & = & x + 2y + 3z \\ z' & = & -y + z \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 1 \\ y(0) & = & 1 \\ z(0) & = & 2 \end{array}\right.$

4 - 8 Ⓢ ★★ Dimension 2

Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} y' & = & y + z + \sin(x) \\ z' & = & -y + 3z \end{array}\right.$

4 - 9 Ⓢ ★★ Résonance

Soit, pour ω dans $\mathbf{R}$, f_ω la solution du problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -y + \sin(\omega t) \\ y' & = & x - \cos(\omega t) \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x(0) & = & 0 \\ y(0) & = & 0\ . \end{array}\right.$

Étudier la continuité de l'application F de $\mathbf{R}^2$ dans lui-même, définie par $F(\omega, t) = f_\omega(t)$.

4 - 10 Ⓢ ★★ **Dimension 3, homogène**

Résoudre le système $\begin{cases} x' &= 3x + z \\ y' &= 8x + 4z \\ z' &= 2x - y + 2z \end{cases}$

4 - 11 Ⓢ ★★★ **Dimension 3, avec second membre**

Résoudre les systèmes :

a. $\begin{cases} x' &= 2x + z + \mathrm{sh}(t) \\ y' &= x - y - z + \mathrm{ch}(t) \\ z' &= -x + 2y + 2z - \mathrm{ch}(t) \end{cases}$

b. $\begin{cases} x' &= x + y - z + e^t \\ y' &= -x + y + z \\ z' &= x - y + z \end{cases}$

Systèmes linéaires généraux

4 - 12 Ⓢ ★★ **Inéquations différentielles ♥**

Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans lui-même et y et z des solutions de $y' = a(x)y + b(x)$ et $z' \leq a(x)z + b(x)$, vérifiant $y(0) = z(0)$. Démontrer $\forall x \geq 0$, $y(x) \geq z(x)$.

4 - 13 Ⓢ **X 2003** ★★ **Lemme de Gronwall ♥♥**

Soit f et g deux fonctions continues et $a \in \mathbf{R}$ vérifiant : pour tout $x \geq 0$, $g(x) \geq 0$ et $f(x) \leq a + \int_0^x f(u)g(u)\,\mathrm{d}u$.

Montrer : $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq a \exp\left(\int_0^x g(u)\,\mathrm{d}u\right)$.

4 - 14 Ⓢ ★★★ **Solutions positives**

Soit A continue de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont les coefficients sont à valeurs positives et X_0 un vecteur dont toutes les composantes sont positives. Soit X la solution du système $Y' = A(t)Y$ valant X_0 en 0. Montrer que les coordonnées de X sont des fonctions à valeurs positives sur $\mathbf{R}_+$.

Équations différentielles linéaires scalaires

4 - 15 Ⓢ ★ **Unicité**

Montrer que l'équation : $y^{(4)} + y'' + y = |\sin(x)|$ admet au plus une solution π-périodique.

4 - 16 Ⓢ ★★ **Ordre 2**

Intégrer les équations suivantes :

a. $y'' - y' - e^{2x}y = e^{3x}$ (poser $u = e^x$).

b. $y'' - \left(6x + \dfrac{1}{x}\right)y' + 8x^2y = x^4$ (poser $u = x^2$).

4 - 17 Ⓢ ★★ ♥

Soit f de classe C^2 de $\mathbf{R}$ dans lui-même vérifiant $f + f'' \geq 0$.

Montrer $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) + f(x+\pi) \geq 0$.

4 - 18 Ⓢ ★★

Soit f de classe C^2 de $\mathbf{R}$ dans lui-même telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et pour tout x réel : $f''(x) \geq f(x) + \dfrac{2}{\mathrm{ch}(x)^3}$. Montrer pour tout x réel, $f(x) \geq \dfrac{\mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)}$.

4 - 19 Ⓢ ★★ **Zéros entrelacés ♥**

Soit r et q deux fonctions continues définies sur un intervalle I vérifiant $r \geq q$. On considère les équations différentielles :

$$(E_1) \quad y'' + qy = 0\,, \qquad (E_2) \quad z'' + rz = 0\,.$$

a. Soit y une solution de (E_1) et x_0, x_1 deux zéros consécutifs de y. Est-ce que $y'(x_0)$ et $y'(x_1)$ peuvent être nuls ? Que dire de leurs signes ?

b. Soit z une solution de (E_2). On considère W défini par $W = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}$. Calculer W' et $W(x_1) - W(x_0)$.

c. Montrer que z a un zéro dans $]x_0; x_1[$ ou $z(x_0) = z(x_1) = 0$.

d. Soit u une solution de (E_1). Montrer que u est soit proportionnelle à y, soit admet un unique zéro dans $]x_0; x_1[$.

4 - 20 Ⓢ **X 2000** ★★★

On considère l'équation différentielle à coefficients continus sur $\mathbf{R}$: $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$. Trouver une condition nécessaire portant sur p et q pour qu'il existe deux solutions sur $\mathbf{R}$ dont le produit vaut constamment 1.

Forme non résolue

4 - 21 Ⓢ ★ **Ordre 1**

Intégrer les équations suivantes :

a. $(2 + x)y' = 2 - y$.

b. $xy' + y = \cos(x)$.

c. $(1 + x)y' + y = (1 + x)\sin(x)$.

d. $x^3y' - x^2y = 1$.

e. $3xy' - 4y = x$.

f. $y' + y = \sin(x) + 3\sin(2x)$.

g. $2x(1 - x)y' + (1 - 2x)y = 1$.

h. $x(x + 1)y' + y = \arctan(x)$.

i. $x(x^2 - 1)y' + 2y = x\ln(x) - x^2$.

4 - 22 ★★ **Ordre 2**

Intégrer les équations suivantes :

a. $x(1-2\ln(x))y''+(1+2\ln(x))y'-\dfrac{4}{x}y=0$ (chercher une solution de la forme $y=x^\alpha$).

b. $x^2y''-2xy'+2y=2+2x^3\sin(x)$ (poser $u=\ln(x)$).

c. $x(x+1)y''-y'-2y=3x^2$ (chercher une solution de l'équation homogène de la forme $y=x^\alpha$).

d. $x^2y''+4xy'+(2-x^2)y=1$ (poser $y=\dfrac{u}{x^2}$).

e. $(x^2+3)y''+xy'-y=1$ (chercher les solutions polynomiales).

f. $xy''-2y'-xy=0$ (dériver deux fois).

4 - 23 Ⓢ ★★★

Résoudre l'équation : $y'=|x-y|$. Étudier les problèmes de raccordement.

4 - 24 Ⓢ ★★★

Résoudre l'équation $y''+|y|=1$, avec $y(0)=0$, $y'(0)=1$.