CHAPITRE 3

Analyse fonctionnelle

Frigyes Riesz, 1880–1956, est un mathématicien hongrois, fondateur de l'analyse fonctionnelle.

Lors d'un congrès, vers 1910, trois ou quatre jeunes et brillants mathématiciens autour d'un thé décidèrent d'envoyer une carte postale à Godfrey Hardy. Aucun ne signa de son nom. À la place chacun écrivit une formule qui l'avait rendu célèbre. Riesz choisit le théorème de représentation de Riesz pour une application linéaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0;1]$: $Ff = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$. Bien entendu Hardy n'eut aucun mal à décrypter la carte.

Son livre *Leçons d'analyse fonctionnelle*, écrit en français, lui a pris près de vingt ans à écrire, d'abord avec Tibor Radó, puis avec Béla Szökefalvi-Nagy. C'est un modèle du genre. Edgar Lorch dans sa critique en dit qu'aucun livre ne lui arrive à la cheville dans son domaine, ni maintenant, ni plus tard : *Son but est simplement d'écrire une portion de mathématique sous sa forme finale et définitive. Et c'est réussi.* Dans ses mémoires, Lorch raconte : « Riesz aimait faire part d'une nouvelle idée pour une démonstration faite pour *épater le bourgeois*. Il aimait les blagues mathématiques. Par exemple Riesz a montré qu'on pouvait développer les théories de la mesure, de l'intégration et de la différentiation dans n'importe quel ordre. Il adorait être un *bad boy*, renversant les idées préconçues. »

Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter des éléments d'analyse fonctionnelle dans le cadre des espaces vectoriels normés de dimension finie sur $\mathbf{R}$, en faisant intervenir à la fois des aspects intrinsèques et calculatoires : espaces de fonctions continues et premières notions de calcul différentiel.

Programme

On prolonge les notions de fonctions étudiées en première année, en accord avec les notions de topologie déjà étudiées. On étend le programme d'analyse réelle de première année au cadre des fonctions vectorielles, on précise les notions de tangente et de vitesse instantanée et on fournit des outils pour l'étude des équations différentielles linéaires et du calcul différentiel.

Sauf autre précision, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie E.

— Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle. Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle. Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues. Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

— Applications uniformément continues, applications lipschitziennes, applications linéaires continues. Image d'une partie compacte par une application continue. Théorème de Heine. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue. Continuité des applications polynomiales, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

— Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbf{R}$, à valeurs dans E. Inégalité triangulaire. Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière. Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour f continue. Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe C^1. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange. Formule de Taylor-Young.

— Dérivabilité en un point. Formes équivalentes : taux d'accroissement, développement limité à l'ordre 1. Dérivabilité à droite et à gauche d'une fonction en un point.

— Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivabilité et dérivée de $L \circ f$, où L est linéaire. Dérivabilité et dérivée de $B(f, g)$, où B est bilinéaire. Cas du produit scalaire. Dérivabilité et dérivée de $f \circ \varphi$ où φ est une fonction réelle de variable réelle et f une fonction vectorielle. Applications de classe C^k. Opérations sur les applications de classe C^k.

Dans tout ce chapitre E, F etc. désignent des espaces vectoriels normés, A est une partie de E, I est un intervalle réel et f est une fonction définie sur A et à valeurs dans F. Lorsque $E = \mathbf{R}$ et A est un intervalle, on le note aussi I.

1 Fonctions d'une variable réelle

Dans cette section $E = F = \mathbf{R}$, i.e. f est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles, définie sur un intervalle I.

Les théorèmes fondamentaux sur les fonctions continues sont les théorèmes de HEINE et de WEIERSTRASS qui, tous deux, donnent des propriétés essentielles des fonctions continues sur un compact.

Théorème 3 - 1

Théorème de HEINE

Soit f une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles, et K un segment. Si la fonction f est continue sur K, alors elle y est uniformément continue.

Heinrich Eduard HEINE, 1821–1881.

Démonstration. Si f n'était pas uniformément continue, on disposerait de ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans K telles que $|x_n - y_n| \leq 2^{-n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Par compacité de $K \times K$, on peut supposer les deux suites convergentes (quitte à extraire une sous-suite de $((x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}}$). Mézalor les deux suites convergent vers la même limite, disons ℓ, et la propriété $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ contredit la continuité au point ℓ. □

Idée

Théorème de HEINE

Avec la propriété de BOREL-LEBESGUE (cf. 2 - 8), on obtient une formulation plus topologique : on fixe ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et, pour x dans K, on dispose de r_x dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $B(x, r_x) \subset f^{-1}(B(f(x), \varepsilon))$. Comme les $(B(x, r_x/2))_{x\in K}$ recouvrent K, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Soit r le minimum des r_x pour les x apparaissant dans le sous-recouvrement fini. Alors si $|y_1 - y_2| < r$ et si $y_1 \in B(x, r_x/2)$, on a aussi $y_2 \in B(x, r_x/2)$ et donc $|f(y_1) - f(y_2)| < 2\varepsilon$.

Théorème 3 - 2

Théorème de WEIERSTRASS

Soit f une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles, et K un segment. Si la fonction f est continue sur K, alors $f(K)$ est compact et en particulier f atteint ses bornes, i.e. $\exists (x, y) \in K^2 \ \sup\limits_K f = f(x)$ et $\inf\limits_K f = f(y)$.

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $f(K)$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $K^{\mathbf{N}}$ telle que $f(x_n) = y_n$. Par compacité, on peut extraire une sous-suite de x qui converge dans K. Par continuité de f, l'image par f de cette sous-suite converge vers l'image par f de la limite, i.e. vers une limite dans $f(K)$.

Si la borne supérieure n'était pas atteinte, alors $x \mapsto \dfrac{1}{\sup_K f - f(x)}$ serait continu sur K, mais non borné. En considérant $-f$ on obtient le résultat sur la borne inférieure. □

Idée

Théorème de WEIERSTRASS

Topologiquement, si on recouvre $f(K)$ par des ouverts V_i, il en va de même pour K par les ouverts $f^{-1}(V_i)$. On extrait un sous-recouvrement fini de K et alors son image par f est un sous-recouvrement fini de $f(K)$.

Remarque 3 - 1

Le théorème de BOLZANO, dit des valeurs intermédiaires, précise que dans le cadre précédent $f(K)$ est un intervalle et donc $f(K)$ est alors un segment.

Les théorèmes fondamentaux du calcul différentiel sont le théorème de ROLLE (établi en 1691 par Michel ROLLE pour les polynômes, mais démontré dans le cas qui nous intéresse en 1860 par Pierre-Ossian BONNET, en en faisant ainsi une des fondations du calcul différentiel), le théorème de LAGRANGE (inégalité ou égalité des accroissements finis), le théorème de la limite de la dérivée, le théorème de LEIBNIZ-NEWTON.

Les résultats importants sont la caractérisation des fonctions constantes, des fonctions monotones, des fonctions k-lipschitziennes, des fonctions convexes et les applications aux théorèmes de points fixes.

Théorème 3 - 3

ROLLE - 1691 & BONNET - 1860

Soit f une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles, et $[a;b]$ un segment. Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et si $f(a) = f(b)$, alors il existe c dans $]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. On utilise le théorème de WEIERSTRASS (théorème du maximum) et la caractérisation des extrema par la dérivée, si le point où est atteint l'extremum est intérieur. □

Théorème 3 - 4

LAGRANGE - 1797 - Théorème des accroissements finis

Soit f une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles, et $[a;b]$ un segment. Si f est continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$, alors il existe c dans $]a;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, i.e. une des tangentes au graphe de f est parallèle à la corde joignant les points d'abscisses a et b.

Démonstration. Il suffit de tourner la tête ! Plus précisément on applique le théorème de ROLLE à la fonction donnée par $\begin{vmatrix} f(x) & f(b)-f(a) \\ x & b-a \end{vmatrix}$. □

Corollaire 3 - 1

Inégalité des accroissements finis

Soit f une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles, et $[a;b]$ un segment. Si f est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ et f' est bornée sur $]a;b[$, alors si $\sup_{]a;b[} |f'| \leq k$, on a

$$\forall (x,y) \in [a;b]^2, |f(x)-f(y)| \leq k\,|x-y| ,$$

i.e. f est lipschitzienne de rapport k.

C'est en particulier vrai quand f est de classe C^1 sur $[a;b]$ en prenant $k = \|f'\|_{[a;b],\infty}$, dont l'existence est garantie par le théorème de WEIERSTRASS appliqué à f'.

Le théorème de LAGRANGE a de nombreuses applications directes. Soit f et g continues sur $[a;b]$ et dérivables sur $]a;b[$, à valeurs réelles :

1. Les dérivées f' et g' coïncident sur $]a;b[$ si et seulement si $f-g$ est constante sur $[a;b]$.

2. La dérivée f' de f est positive (négative) sur $]a;b[$ si et seulement si f est croissante (décroissante) sur $[a;b]$.
3. Si f' est strictement positive (négative) sur $]a;b[$, alors f est strictement croissante (décroissante) sur $[a;b]$. Plus généralement f est strictement monotone sur $[a;b]$ si et seulement si f' est de signe constant sur $]a;b[$ et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert inclus dans $]a;b[$.
4. Une fonction sur I est constante (réelle) si et seulement si elle est dérivable, de dérivée nulle.

Théorème 3 - 5

Leibniz-Newton - théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Soit f une fonction d'une variable réelle et à valeurs réelles, et $[a;b]$ un segment. Si f est continue sur $[a;b]$ elle y admet une primitive, unique à addition d'une constante près. De plus, si F est une telle primitive, on a

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)\ .$$

On déduit de l'inégalité des accroissements finis, le critère très utile suivant

Théorème 3 - 6

Limite de la dérivée

Soit f de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$ à valeurs réelles. Si, pour k dans $[\![0;n]\!]$, il existe a_k dans $\mathbf{R}$ tel que $\lim_a f^{(k)} = a_k$, alors f est prolongeable en a en une fonction de classe C^n sur I. En particulier si f est définie et continue en a, alors $a_0 = f(a)$ et f est de classe C^n sur I.

Dans le cas général, en notant $\tilde{f}$ le prolongement de f à I, on a

$$\forall k \in [\![0;n]\!]\ , \quad \tilde{f}^{(k)}(a) = a_k = \lim_a f^{(k)}\ .$$

Démonstration. Pour $k = 0$, c'est la définition de la continuité. Pour $k = 1$, c'est une conséquence directe de l'inégalité des accroissements finis puisque, pour x dans I distinct de a, on dispose de c compris entre a et x tel que

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{x-a} = \frac{f(x) - a_0}{x-a} = \tilde{f}'(c) = f'(c)$$

puisque $\tilde{f}$ est dérivable sur $]a;x[$. Or si x tend vers a, il en est de même pour c et donc $f'(c)$ tend vers a_1.

Le cas général s'obtient par une récurrence immédiate. □

On a de plus les caractérisations suivantes :

Théorème 3 - 7

Caractérisation des fonctions lipschitziennes

Soit f dérivable sur I à valeurs réelles. Alors, pour tout k dans $\mathbf{R}_+$, f est lipschitzienne de rapport k sur I si et seulement si $\|f'\|_{I,\infty} \leq k$.

Démonstration. Le sens direct s'obtient en passant à la limite dans les inégalités puisque les taux d'accroissements de f sont par définition majorés par les rapports de Lipschitz. Le sens réciproque est une conséquence de l'inégalité des accroissements finis. □

Théorème 3 - 8

(♠) Point fixe de Picard

Soit f une application contractante, i.e. k-lipschitzienne avec $k < 1$, de I dans lui-même et x_0 dans I. Alors la suite récurrente définie par $x_{n+1} = f(x_n)$, pour tout n dans $\mathbf{N}$, converge vers l'unique point fixe de f dans I et de plus, si ℓ est ce point fixe, pour tout entier n on a $|x_n - \ell| \leq k^n |x_0 - \ell|$, i.e. la suite (x_n) converge vers ℓ avec une vitesse au moins géométrique.

Démonstration. Pour n dans $\mathbf{N}$, on a $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq k\,|x_{n+1} - x_n|$, de sorte que, par une récurrence immédiate, $|x_{n+1} - x_n| \leq k^n\,|x_1 - x_0|$ et donc

$$|x_n - x_0| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| \leq \frac{1-k^n}{1-k}\,|x_1 - x_0| \leq \frac{1}{1-k}\,|x_1 - x_0|\ .$$

Il en résulte que la suite (x_n) est bornée. On note $M = \sup_n |x_n|$. De plus, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass et sa réciproque partielle, (x_n) admet une valeur d'adhérence et converge si et seulement si cette valeur d'adhérence est unique.

Soit alors p et q deux entiers. On a $|x_{p+q} - x_p| \leq k^p\,|x_q - x_0| \leq 2Mk^p$ et l'unicité de la valeur d'adhérence en résulte (en fait (x_n) est une suite de Cauchy). Soit donc ℓ la limite de (x_n). Par continuité de f, ℓ est un point fixe de f. Puisque f est contractante, ce point fixe est unique. Enfin la dernière propriété est immédiate. □

Théorème 3 - 9

(♠) Théorème de Rolle généralisé

Soit a et b, avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et f dérivable sur $]a;b[$, à valeurs réelles. On suppose $\lim_{a^+} f = \lim_{b^-} f$, alors il existe c dans $]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Soit φ une fonction de classe C^1 de $]0;1[$ sur $]a;b[$ de dérivée strictement positive. Le résultat est une conséquence du théorème de Rolle appliqué à $f \circ \varphi$, puisque φ' ne s'annule pas. □

Théorème 3 - 10

(♠) Cauchy - 1821

Soit f et g dans $C^0([a;b], \mathbf{R})$ et dérivables sur $]a;b[$. On suppose que g' ne s'annule pas, alors $g(b) \neq g(a)$ et il existe c dans $]a;b[$ tel que $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Démonstration. On considère la fonction $x \mapsto \begin{vmatrix} f(b)-f(a) & f(x) \\ g(b)-g(a) & g(x) \end{vmatrix}$ et on lui applique le théorème de Rolle. De plus $g(b) \neq g(a)$ puisque g' ne s'annule pas. □

Remarque 3 - 2

On peut se contenter d'une hypothèse plus faible, à savoir : $g(b) \neq g(a)$ et g' ne s'annule pas en même temps que f'.

Par ailleurs, d'après le théorème de Darboux, $g'(]a;b[)$ est un intervalle et donc si g' ne s'annule pas, alors elle est de signe constant, et donc g est strictement monotone. Néanmoins la stricte monotonie n'est pas suffisante pour garantir que g' ne s'annule pas.

Théorème 3 - 11

(♠) Darboux

Soit a et b deux réels avec $a < b$. On note $I = [a;b]$. Soit f une fonction dérivable sur I, i.e. dérivable à droite en a, dérivable à gauche en b et dérivable en tous les autres points de I. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Démonstration. Soit λ un réel compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$ et distinct d'eux et g la fonction sur I définie par $g(x) = f(x) - \lambda x$. Alors g est dérivable sur I et, pour démontrer l'assertion, il faut (et il suffit de) démontrer que g' s'annule.

On a $g'(a)g'(b) \leq 0$ par hypothèse sur λ. Le cas $g'(a)g'(b) = 0$ donne alors directement l'existence d'un point d'annulation de g'.

On suppose maintenant $g'(a)g'(b) < 0$. Alors, si g admet un extremum local à la fois en a et en b, ces extrema sont soit tous les deux des maxima, soit tous les deux des minima. Il en résulte que g admet nécessairement un extremum sur $]a;b[$ et donc que g' s'y annule.

L'assertion en découle. □

Remarque 3 - 3

On pourrait procéder de façon plus « topologique ».

Pour y dans I, on définit la fonction g_y sur I par $g_y(x) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ si $x \neq y$ et $g_y(y) = f'(y)$. Comme g_y est continue, $g_y(I)$ est un intervalle. De plus, comme $g_y(x) = g_x(y)$ si $x \neq y$, les intervalles $(g_y(I))_{y \in I}$ ont deux à deux une intersection et il en résulte que leur réunion est un intervalle. Or $f'(I)$ est inclus dans cette réunion par définition, puisque $g_y(y) = f'(y)$, et le théorème des accroissements finis montre que la réciproque est vraie. Il en résulte que $f'(I)$ est un intervalle.

On termine cette succession de résultats hors-programme avec le théorème de Guillaume-François-Antoine de L'Hospital, Marquis de Sainte-Mesme et du Montellier, Comte d'Antremonts, Seigneur d'Ourques et d'autres lieux. C'est en fait un résultat de Johann Bernoulli que le dit (vain) Marquis s'est attribué sans vergogne.

Théorème 3 - 12

(♠) Règle de L'Hospital - Johann Bernoulli (1692)

Soit f et g dérivables sur $]a;b[$ avec g' ne s'annulant pas (donc de signe constant). Si $\lim_{b^-} f = \lim_{b^-} g$ et que cette valeur commune est soit nulle, soit infinie. Alors

$$\lim_{b^-} \frac{f'}{g'} \text{ existe} \Rightarrow \lim_{b^-} \frac{f}{g} = \lim_{b^-} \frac{f'}{g'} .$$

La limite de f'/g' peut être prise dans $\overline{\mathbf{R}}$, tout comme a et b.

Le même résultat est vrai, mutatis mutandis, en a^+.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème de Cauchy dans le cas où la limite est nulle, et presque directe dans le cas de la limite infinie. □

2 Fonctions continues

Dans la définition d'une fonction continue d'une variable réelle et à valeurs réelles, on trouve les phrases mathématiques $|x - a| < \eta$ et $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. On peut les écrire en toute généralité, avec les notations venues de la topologie, $x \in B(a, \eta)$ et $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$. Plutôt que de se concentrer sur les points et la valeur de la fonction en ces points, on peut économiser le quantificateur $\forall x \in I$ et écrire $f(B(a,\eta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$. Toutefois être inclus dans une boule ne fournit pas la nature topologique de $f(B(a,\eta))$ et, d'autre part, c'est ε qui est quantifié le premier. On préférait donc lire la phrase précédente $B(f(a),\varepsilon)$ contient l'image d'une certaine boule par f, ce qu'il est plus naturel d'écrire $f^{-1}(B(f(a),\varepsilon)) \supset B(a,\eta) \cap I$. Or, topologiquement, la phrase $\exists \eta \in \mathbf{R}_+^* \ X \supset B(a,\eta) \cap I$ est la définition de X est un voisinage de a dans I. Ainsi la continuité en a s'énonce : l'image réciproque par f de toute boule centrée en $f(a)$ est un voisinage de a. En notant $\mathcal{V}_I(a)$ l'ensemble des voisinages de a dans I, il vient

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* \quad f^{-1}(B(f(a),\varepsilon)) \in \mathcal{V}_I(a) \ .$$

Il reste une dissymétrie entre a et $f(a)$. Dans un cas on mesure effectivement le voisinage par un ε et pas dans l'autre. Or $B(f(a),\varepsilon)$ est un voisinage particulier de $f(a)$ et si X est un voisinage quelconque de $f(a)$ alors on dispose de ε tel que $X \supset B(f(a),\varepsilon)$ et donc $f^{-1}(X) \supset f^{-1}(B(f(a),\varepsilon))$, i.e. $f^{-1}(X)$ contient un voisinage de a dans I. C'est donc également un tel voisinage. On en conclut que la continuité de f en a peut s'écrire topologiquement

$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) \quad f^{-1}(V) \in \mathcal{V}_I(a) \quad \text{ou encore} \quad f^{-1}(\mathcal{V}(f(a))) \subset \mathcal{V}_I(a) \ .$$

Cette définition se généralise immédiatement.

Définition 3 - 1

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E et $f : A \to F$, une fonction sur A à valeurs dans un espace vectoriel normé F. Soit a dans $\overline{A}$ et ℓ dans F. On dit que f admet ℓ comme **limite en** a (en précisant éventuellement selon A) et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $\lim_a f = \ell$ ou encore $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell$ si l'image réciproque par f de tout voisinage de ℓ est l'intesection avec A d'un voisinage de a. En notant $\mathcal{V}_A(a)^*$ l'ensemble de telles intersections de voisinages,

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \ell \Longleftrightarrow f^{-1}(\mathcal{V}(\ell)) \subset \mathcal{V}_A(a)^* \ ,$$

ce qui se traduit de façon moins abstraite par

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^* , \exists \eta \in \mathbf{R}_+^* , \forall x \in A \quad (\|x-a\|_E < \eta \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F < \varepsilon) \ .$$

Si, de plus, $a \in A$, on dit que f est **continue** en a.

Remarque 3 - 4

Une application f est donc continue en a si et seulement si l'image réciproque $f^{-1}(V)$ de tout ouvert contenant $f(a)$ contient un ouvert (de A) contenant a.

Remarque 3 - 5

Toutes les inégalités strictes dans les définitions de limite et de continuité peuvent aussi être prises larges. Les formulations sont équivalentes.

Aparté

On prendra garde au fait que a peut ne pas appartenir à A et donc la notion de voisinage de a dans A peut ne pas avoir de sens. On peut rajouter a à A en considérant $A \cup \{a\}$, mais comme f n'est définie que sur A, il faut donc considérer un voisinage de a dans $A \cup \{a\}$ et lui retirer éventuellement a. On parle dans ce dernier cas de voisinage épointé de a. Ainsi $\mathcal{V}_A(a)^*$ représente un voisinage de a dans A si $a \in A$, et un voisinage épointé de a dans $A \cup \{a\}$ si $a \notin A$.

Certains textes énoncent la notion de limite en considérant de toute façon un voisinage épointé de a. Ainsi la fonction caractéristique de $\{0\}$ admet une limite en 0, selon ces textes, égale à 0. Avec la définition précédente, ce n'est pas le cas et cette fonction n'a pas de limite en 0. Avec la définition modifiée, une fonction admet une limite en notre sens si elle admet une limite et si cette limite est égale à la valeur de la fonction dans le cas où elle y est définie. La définition modifiée est intéressante notamment pour parler plus facilement des fonctions continues par morceaux, des fonctions en escalier etc. Mais la composée des limites est perdue au passage. Nous faisons donc le choix de respecter le programme en prenant la définition précédente. On prendra simplement garde que dans certains textes (francophones ou non), on trouve une définition différente.

Un voisinage de l'infini dans E est le complémentaire d'une partie bornée, autrement dit c'est une partie contenant un ouvert de la forme $\{x \in | \, \|x\| > M\}$. En d'autres termes la propriété $\|x\| > M$ remplace $\|x - a\| < \eta$. Dans le cas où $E = \mathbf{R}$, on peut utiliser la structure d'ordre et considérer des voisinages de $+\infty$ ou de $-\infty$, à savoir des parties contenant des intervalles ouverts ayant $+\infty$ ou $-\infty$ comme borne, ce qui qui revient à remplacer $\|x - a\| < \eta$ par $x > M$ ou par $x < M$ (voire $x < -M$ si on veut insister sur l'aspect $-\infty$). Ainsi en utilisant la définition ci-dessus on est amené à poser les définitions suivantes :

Définition 3 - 2

Une fonction sur E admet une limite en l'infini (resp. en $+\infty$, en $-\infty$ dans le cas $E = \mathbf{R}$) si, dans la définition de limite 3 - 1, on peut remplacer le voisinage de a par un voisinage de l'infini (resp. $+\infty$, $-\infty$).

Une fonction à valeurs réelles admet $\pm\infty$ comme limite (en a ou en l'infini) si, dans la définition de limite, on peut remplacer le voisinage de ℓ par un voisinage de $\pm\infty$.

Plus généralement, on dit qu'elle tend vers l'infini si $\|f\|$ tend vers $+\infty$.

Exemple 3 - 1

Concrètement

$$\lim_{\infty} f = \ell \iff \forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists M \in \mathbf{R}, \forall x \in A \quad (\|x\| > M \Rightarrow \|f(x) - \ell\| < \varepsilon)$$
$$\lim_{a} f = -\infty \iff \forall M \in \mathbf{R}, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in A \quad (\|x - a\| < \eta \Rightarrow f(x) < M) .$$

Exercice

Écrire les autres cas avec des quantificateurs.

Proposition 3 - 1

Caractérisation séquentielle

Avec les mêmes notations que ci-dessus, $\lim_a f = \ell$ si et seulement si, pour toute suite de points de A convergeant vers a, l'image par f de cette suite converge vers ℓ.

En particulier si f est continue en a et si (x_n) est une suite convergeant vers a à valeurs dans le domaine de définition de f, alors $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.

Démonstration. Si f tend vers ℓ en a, on se donne (x_n) une suite de points de A convergeant vers a et $\varepsilon > 0$. On dispose de η comme dans la définition de la limite. Par convergence de la suite, soit n un rang à partir duquel la suite est à valeurs dans $B(a, \eta)$. Alors, à partir de ce rang la suite $(f(x_n))$ est dans $B(\ell, \varepsilon)$ et donc elle converge vers ℓ.

Si f tend vers ℓ en a, on dispose de $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout η il existe x dans A avec $\|x - a\| \leq \eta$ et $\|f(x) - \ell\| \geq \varepsilon$. Pour n dans $\mathbf{N}$, en prenant $\eta = 2^{-n}$ dans cette assertion, on dispose de x_n dans A tel que $\|x_n - a\| \leq 2^{-n}$ et $\|f(x_n) - \ell\| \geq \varepsilon$. Il en résulte que (x_n) converge vers a mais que $(f(x_n))$ ne converge pas vers ℓ. □

Définition 3 - 3

Soit F un espace vectoriel normé, A une partie d'un espace vectoriel normé E et $f : A \to F$. On dit que f est **continue** sur A si elle est continue en tout point a de A.

Proposition 3 - 2

Une application f est continue sur A si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de A. Et *mutatis mutandis* pour les fermés.

Démonstration. Soit f continue sur A, U un ouvert de F et x dans $f^{-1}(U)$, alors $f(x)$ est dans U et donc U est un voisinage de $f(x)$ dans F. Par définition de la continuité, $f^{-1}(U)$ est donc un voisinage de x dans A et donc voisinage (dans A) de tous ses points. Réciproquement si x est dans A et V dans $\mathcal{V}(f(x))$, on dipose d'un ouvert U de F vérifiant $f(x) \in U \subset V$ et alors $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$, de sorte que $f^{-1}(V)$ contient un ouvert de A contenant x, et donc f est continue en x.

La seconde propriété en résulte en passant aux complémentaires. □

Propriétés 3 - 1

— Les fonctions continues en a (respectivement admettant une limite en a ou continues sur A) forment un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $\lim\limits_a$ est une application linéaire sur cet espace.

— Si F est une $\mathbf{K}$-algèbre, alors $\lim\limits_a$ est bilinéaire, i.e. est compatible au produit de fonctions.

— En particulier si F un corps et si $\lim\limits_a f \neq 0$, alors $1/f$ est définie au voisinage de a et y admet une limite. De plus $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\lim_a f}$.

— La limite est compatible aux compositions. Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés, A et B des parties de E et F respectivement, f de A dans B et g de B dans G. Soit enfin a dans $\overline{A}$. Si $\lim\limits_a f = b$, alors $b \in \overline{B}$, et si $\lim\limits_b g = c$, alors : $g \circ f$ admet une limite en a et $\lim\limits_a g \circ f = c$.

Démonstration. Ce sont les mêmes démonstrations que dans le cas scalaire et pour les suites, grâce à la caractérisation séquentielle de la limite. Soit (a_n) une suite de points de A tendant vers a, f et g deux fonctions définies sur A, ℓ et ℓ' deux points de F et α et α' deux scalaires. On suppose $\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$.

— On a $\lim f(a_n) = \ell$ et $\lim g(a_n) = \ell'$, et donc $\lim(\alpha f + \alpha' g)(a_n) = \alpha\ell + \alpha'\ell'$, et en particulier $\alpha f + \alpha' g$ admet une limite en a. L'assertion en découle.

— Avec les mêmes notations que précédemment $\lim(fg)(a_n) = \ell\ell'$ et le résultat s'en suit.

— Si $\ell \neq 0$, en particulier on dispose d'un voisinage de a sur lequel f prend ses valeurs dans $B(\ell, \|\ell\|)$ et donc sur lequel elle ne s'annule pas. On écrit alors, pour n suffisamment grand, $\dfrac{1}{f(a_n)} - \dfrac{1}{\ell} = \dfrac{\ell - f(a_n)}{\ell \cdot f(a_n)}$. Le numérateur tend vers 0 et le dénominateur vers ℓ^2, donc on a affaire à une suite convergeant vers 0, i.e. $\lim\limits_a \dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{\ell}$.

— Comme $\lim_a f = b$, on a $b = \lim f(a_n)$ et, par définition $(f(a_n))$ est une suite à valeurs dans B, donc $b \in \overline{B}$. Soit W un voisinage de c. Alors $g^{-1}(W)$ est l'ntersection d'un voisinage V de b avec B et donc $f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right) = f^{-1}(V)$, car f est à valeurs dans B, et comme $f^{-1}(V)$ est l'intersection d'un voisinage de a avec A, il vient $\lim\limits_a g \circ f = c$.

□

Propriété 3 - 2

Soit f et g deux fonctions continues définies sur A et B une partie relativement dense dans A. Alors f et g coïncident sur A si et seulement si elles coïncident sur B.

Démonstration. Le sens direct est clair. Pour la réciproque, par densité de B dans A, tout point de a peut s'écrire comme limite de points de B, disons $a = \lim b_n$. Comme f et g coïncident sur B, les suites $(f(b_n))$ et $(g(b_n))$ sont égales et, par continuité de f et g en a, ont pour limites respectives $f(a)$ et $g(a)$. On en déduit $f(a) = g(a)$ et, finalement, $f = g$. □

Enfin, par définition de la topologie produit, la continuité d'un produit équivaut à la continuité de ses termes.

Proposition 3 - 3

Soit $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ des fonctions définies sur une partie A de E avec f_i à valeurs dans E_i. Soit $f = \prod_{i=1}^n f_i$. Alors f admet une limite en a si et seulement si les f_i en ont une. Dans ce cas, on a

$$\lim_a \prod_{i=1}^n f_i = \prod_{i=1}^n \lim_a f_i\ .$$

En particulier, si F est de dimension finie et $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ en est une base, alors f de A dans F admet une limite en a si et seulement si les composées $e_i^* \circ f$ en ont, où $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ sont les formes coordonnées par rapport à $(e_i)_{1\leq i\leq n}$.

Remarque 3 - 6

Cette dernière assertion n'est a priori valable que si F est muni de la topologie produit, i.e. de la norme infinie relativement à la base choisie. Néanmoins on verra que cette propriété est indépendante de la norme choisie quand on étudiera l'équivalence des normes.

3 Uniforme continuité

Définition 3 - 4

Rapport de Lipschitz

Soit F un espace vectoriel normé, A une partie d'un espace vectoriel normé E et $f : A \to F$. On dit que f est **lipschitzienne** de rapport k (ou encore k-lipschitzienne), avec $k \in \mathbf{R}_+$ si

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \ .$$

Si f est lipschitzienne, l'ensemble des k vérifiant l'assertion précédente forme un intervalle fermé non majoré de $\mathbf{R}_+$ et on appelle rapport de Lipschitz le minimum de cet ensemble.

On note $\mathcal{L}ip(A, B)$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes de A dans B et $\mathcal{L}ip_k(A, B)$ l'ensemble de celles de rapport k

Rudolf Lipschitz, 1832–1903.

Remarque 3 - 7

Le rapport de Lipschitz est égal, quand il existe, à $\displaystyle\sup_{\substack{(x,y)\in A^2 \\ x\neq y}} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\|x - y\|}$.

Exemples 3 - 2

— Si f est linéaire, $f \in \mathcal{L}ip_k(E, F)$ si et seulement si $\forall x \in E$, $\|f(x)\| \leq k \|x\|$.

— La trace est 1-lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_1$.

— Une norme est 1-lipschitzienne par rapport à elle-même. Tout comme la fonction $x \mapsto d(x, A)$, pour toute partie A de E.

► Soit I un intervalle réel et $f \in C^0(I, E) \cap D^1(\mathring{I}, E)$ une fonction continue sur I et dérivable sur son intérieur. Alors f est k-lipschitzienne si et seulement si $f' \in \mathcal{B}(\mathring{I}, E)$ et $\|f'\|_{\mathring{I},\infty} \leq k$.

Propriétés 3 - 3

— Pour A une partie non vide de E, $\mathcal{L}ip(A, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^A.

— Si $f \in \mathcal{L}ip_k(A, B)$ et $g \in \mathcal{L}ip_\ell(B, C)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}ip_{k\ell}(A, C)$.

— On a $\mathcal{L}ip(A, F) \subset C^0(A, F)$.

En particulier la norme est continue puisque 1-lipschitzienne et on en déduit directement

Remarque 3 - 8

Si (x_n) est une suite convergente, alors $(\|x_n\|)$ aussi et $\lim \|x_n\| = \|\lim x_n\|$.

Les fonctions lipschitziennes sont un cas particulier d'une classe de fonctions particulièrement importante, les fonctions uniformément continues. La notion d'uniforme continuité est proche de celle de compacité.

Définition 3 - 5

Soit f une fonction d'une partie A de E dans F. On dit que f est **uniformément continue** sur A si la mesure de la continuité ne dépend pas du point d'étude, i.e.

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbf{R}_+^*, \forall (x,y) \in A^2, \ (\|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon) \ .$$

♠

On peut le dire en termes de module de continuité. On introduit ω_f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$, avec

$$\omega_f(\eta) = \sup_{\|x-y\| \leq \eta} \|f(x)-f(y)\| \ .$$

On a alors : f est uniformément continue si et seulement si ω_f est continue en 0.

Stricto sensu un module de continuité est une fonction nulle et continue en 0, définie sur $\mathbf{R}_+$ et telle que, pour x et y dans A, $\|f(x)-f(y)\| \leq \omega(\|x-y\|)$. Une fonction est alors uniformément continue si et seulement si elle admet un module de continuité. Les fonctions lipschitziennes correspondent à un module donné par une homothétie, une fonction höldérienne correspond à $\omega(t) = kt^\alpha$, une famille de fonctions partageant le même module de continuité est dite uniformément équicontinue.

Proposition 3 - 4

Critère séquentiel

Soit f de A dans F. Elle **n'est pas** uniformément continue si et seulement s'il existe deux suites (u_n) et (v_n) de points de A telles que $\lim(u_n - v_n) = 0$ mais $f(u_n) - f(v_n)$ ne tend pas vers 0.

Démonstration. Le sens direct résulte de la définition de l'uniforme continuité. On se donne ε dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $\forall \eta \in \mathbf{R}_+^*\ \exists (x,y) \in A^2\ \|x-y\| \leq \eta$ et $\|f(x)-f(y)\| > \varepsilon$. Soit n dans $\mathbf{N}$. On lui associe (u_n, v_n) obtenu grâce à l'assertion précédente appliquée à $\eta = 2^{-n}$ en posant $x = u_n$ et $y = v_n$. Alors $u_n - v_n = \mathrm{o}(1)$ et $B(0,\varepsilon)$ ne contient aucun terme de $(f(u_n) - f(v_n))$, ce qui montre que cette dernière suite ne converge pas vers 0.

Réciproquement, puisque $f(u_n) - f(v_n)$ ne tend pas vers 0, on dispose de ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et de φ strictement croissante, de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, telle que $(f(u_{\varphi(n)}) - f(v_{\varphi(n)}))$ soit à valeurs en dehors de $B(0,\varepsilon)$.

Mézalor, si f était uniformément continue, on disposerait de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, $\forall (x,y) \in A^2$, $(\|x-y\| \leq \eta \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon)$. Comme $(u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)})$ est extraite de $(u_n - v_n)$, elle tend vers 0 et donc, pour n assez grand, $\left\|u_{\varphi(n)} - v_{\varphi(n)}\right\| \leq \eta$ et ceci aboutit à une contradiction. □

Théorème 3 - 13

Théorème de Heine

Toute fonction continue sur un compact y est uniformément continue.

Heinrich Eduard Heine, 1821–1881.

Démonstration. La démonstration est identique au cas de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$!

Soit f une fonction continue sur un compact K. Si elle n'était pas uniformément continue, on disposerait de ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et de deux suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans K telles que $\|x_n - y_n\| \leq 2^{-n}$ et $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$. Par compacité de $K \times K$, on peut supposer les deux suites convergentes (quitte à extraire une sous-suite de

$((x_n, y_n))_{n\in\mathbf{N}})$. Mézalor les deux suites convergent vers la même limite, disons ℓ, et la propriété $\|f(x_n) - f(y_n)\| \geq \varepsilon$ contredit la continuité au point ℓ. □

Théorème 3 - 14

Théorème de Weierstrass

Soit f continue sur un compact. Alors

1. $f(K)$ est compact ;
2. f atteint ses bornes, i.e. $\|f\|_\infty = \|f(x)\|$ pour un certain x dans K.

Démonstration. Une fois encore la démonstration est identique au cas de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$!

Soit $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $f(K)$ et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $K^{\mathbf{N}}$ telle que $f(x_n) = y_n$. Par compacité, on peut extraire une sous-suite de x qui converge dans K. Par continuité de f, l'image par f de cette sous-suite converge vers l'image par f de la limite, i.e. vers une limite dans $f(K)$.

Si la borne n'était pas atteinte, alors $x \mapsto \dfrac{1}{\|f\|_\infty - \|f(x)\|}$ serait continue sur K, mais non bornée.

On peut aussi appliquer le résultat dans $\mathbf{R}$ et considérer $x \mapsto \|f(x)\|$. □

Théorème 3 - 15

Applications linéaires

Soit u dans $\mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. C'est une application continue sur E si et seulement si $\exists C \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq C\|x\|$. Plus précisément (♠) on a équivalence entre les propriétés suivantes :

1. $u \in \mathcal{L}ip(E,F)$,
2. u est uniformément continue sur E,
3. u est continue sur E,
4. u est continue en 0,
5. $u(\overline{B}(0,1))$ est bornée,
6. $\sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\| < +\infty$.
7. $\sup\limits_{x\neq 0} \dfrac{\|u(x)\|}{\|x\|} < +\infty$,
8. $\exists C \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall x \in E$, $\|u(x)\| \leq C\|x\|$,

Dans ce cas les deux derniers suprema sont égaux.

On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. C'est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Démonstration. Comme lipschitzien entraîne uniformément continu, qui entraîne continu, qui entraîne continu en 0, on a (1) $\Longrightarrow$ (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longrightarrow$ (4). Cette dernière propriété permet de disposer de $r > 0$ tel que $u(\overline{B}(0,r)) \subset \overline{B}(0,1)$ et donc, par linéarité, $u(\overline{B}(0,1)) \subset \overline{B}(0,1/r)$ d'où (5), qui entraîne à son tour (6). Comme, pour $x \neq 0$, $u(x)/\|x\| = u(x/\|x\|)$, on en déduit (7), puis (8) puisque par linéarité $u(0) = 0$. Enfin si on a (8), alors pour tous x et y dans E, $\|u(x-y)\| \leq C\|x-y\|$ et donc par linéarité de u, on en déduit (1).

Enfin $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel en tant qu'intersection de deux espaces vectoriels : celui des applications linéaires de E dans F et celui des applications continues sur E. □

♠

Norme subordonnée

L'application $u \mapsto \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\|$ définit une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, dite norme subordonnée aux deux normes sur E et F. Elle est notée $\|u\|$ ou encore $|||u|||$ (on parle alors de norme triple).

Si $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}_c(F,G)$, alors $v \circ u \in \mathscr{L}_c(E,G)$ et $\|v \circ u\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

En particulier $\mathrm{End}_c(E)$ est une algèbre normée.

Théorème 3 - 16

Équivalence des normes

Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. On prend pour N une norme quelconque et pour N_∞ une norme infinie par rapport à une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ quelconque mais fixée. On note $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ les formes coordonnées par rapport à cette base. Par inégalité triangulaire, il vient, pour x dans E,

$$N(x) \leq \sum_{i=1}^{n} |e_i^*(x)|\, N(e_i) \leq N_\infty(x) \sum_{i=1}^{n} N(e_i)$$

et donc $N \prec N_\infty$ et N est une application de (E, N_∞) vers $(\mathbf{R}, |\cdot|)$ lipschitzienne de rapport $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(e_i)$.

Soit S la sphère unité pour N_∞ de E. C'est un fermé borné dans (E, N_∞) et donc, d'après le théorème de HEINE-BOREL, S est compact pour cette norme.

Par le théorème de WEIERSTRASS, $N(S)$ est donc compact et, par séparation, ne contient pas 0. Il en résulte qu'il existe α dans $\mathbf{R}_+^*$ minorant $N(S)$, i.e. $\alpha N_\infty \leq N$ sur S et donc sur E par homogénéité. D'où $N_\infty \prec N$ et donc $N \sim N_\infty$. Comme N était arbitraire, par transitivité de l'équivalence, toutes les normes sont équivalentes à N_∞ et donc entre elles. □

Remarque 3 - 9

Les notions de fonctions lipschitziennes ou de fonctions continues ne dépendent pas de la norme, de même que la notion de continuité ou de limite pour les fonctions à valeurs dans E.

Aparté

Deux normes N_1 et N_2 sur E sont équivalentes si et seulement si l'identité est un homéomorphisme de E muni de N_1 sur E muni de N_2.

Proposition 3 - 5

Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}_c(E,F)$, i.e. toute application linéaire dont la source est E est continue, quelque soit la dimension de F.

Démonstration. Par équivalence des normes, on suppose E muni de la norme infinie pour une base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. Alors u est lipschitzienne de rapport $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|$, donc continue. □

Corollaire 3 - 2

Les sous-espaces vectoriels d'un espace de dimension finie sont fermés.

Démonstration. Soit F un sous-espace vectoriel de E, avec E de dimension finie. On dispose d'un supplémentaire de F et donc aussi du projecteur sur G parallèlement à

F. Ce projecteur est linéaire donc continu. En particulier l'image réciproque du fermé $\{0\}$ est fermée, i.e. F est fermé. □

Proposition 3 - 6

Soit $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ des espaces vectoriels normés et u une application multi-linéaire de $\prod_{i=1}^{n} E_i$, muni de la topologie produit, dans F. Alors u est continue si et seulement s'il existe K dans $\mathbf{R}_+$ tel que, pour tout x avec $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$, on ait

$$\|u(x)\| \leq K \|x_1\| \cdots \|x_n\| \ .$$

En particulier si tous les E_i sont de dimension finie, alors u est continue, i.e. $\mathscr{L}_c\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right) = \mathscr{L}\left(\prod_{i=1}^{n} E_i, F\right)$.

Démonstration. On procède comme pour le cas $n = 1$. □

Corollaire 3 - 3

Les applications polynomiales sont continues.

Démonstration. Pour n entier non nul, $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^{n} x_i$ est multilinéaire de $\mathbf{K}^n$ dans $\mathbf{K}$, donc continue. De plus l'application de $\mathbf{K}^k$ dans $\mathbf{K}^n$

$$(x_1, \ldots, x_k) \mapsto (\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{i_1}, \ldots, \underbrace{x_k, \ldots, x_k}_{i_k}) \ ,$$

avec (i_j) des entiers naturels de somme n, est également linéaire donc continue, et il en résulte que l'application monomiale $(x_1, \ldots, x_k) \mapsto \prod_{j=1}^{k} x_j^{i_j}$ est continue. Par stabilité des applications continues par combinaison linéaire, on en déduit que les applications polynomiales sont continues. □

Exemples 3 - 3

— Soit f une fonction polynomiale à coefficients dans $\mathbf{K}$ et a dans $\mathbf{K}$. Alors f est continue et donc $f^{-1}(a)$ est fermé et $f^{-1}(\mathbf{K} \setminus \{a\})$ est ouvert.

— Une fonction rationnelle est donc définie et continue sur un ouvert, à savoir $\mathbf{K}$ privé des zéros de son dénominateur.

— La fonction déterminant sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ou sur $\mathscr{L}(E)$ (avec E de *dimension finie*) est polynomiale donc continue. Il en résulte (sous les mêmes hypothèses) que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{GL}(E)$ sont ouverts, $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}(E)$ sont fermés et enfin qu'on a $\overline{\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})} = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ et $\overline{\mathrm{GL}(E)} = \mathscr{L}(E)$.

— Plus avant la fonction $M \mapsto {}^{\mathrm{t}}\mathrm{com}(M)$ est polynomiale et donc $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$. Il en résulte que les applications $u \mapsto u^k$ et $M \mapsto M^k$ sont continues là où elles sont définies (pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$).

4 Intégration dans les EVN de dimension finie

Rappel

Intégration sur un segment, à valeur dans un EVN de dimension finie
Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E, et $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E. On note $(e_i^*)_{1\leq i\leq p}$ les formes coordonnées relativement à cette base et on pose

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_I (e_i^* \circ f)\right) e_i \ .$$

On admet que cette définition est indépendante du choix de la base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$.

Remarque 3 - 10

L'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ est linéaire sur $C^0_{mcx}(I,E)$ et sa valeur ne change pas si on modifie f en un nombre fini de points.

Propriété 3 - 4

Soit E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, u dans $\mathscr{L}(E,F)$ et f dans $C^0_{mcx}(I,E)$, alors $u\circ f \in C^0_{mcx}(I,F)$ et $\displaystyle\int_I u\circ f = u\left(\int_I f\right)$.

Démonstration. Soit $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E et $(e_i^*)_{1\leq i\leq p}$ les formes coordonnées associées, et $(f_j)_{1\leq j\leq q}$ une base de F et $(f_j^*)_{1\leq j\leq q}$ les formes coordonnées associées. Par définition des formes coordonnées, on a

$$f = \sum_{i=1}^{p} (e_i^*\circ f)e_i \quad \text{et donc} \quad f_j^*\circ u\circ f = \sum_{i=1}^{p}(e_i^*\circ f)f_j^*(u(e_i))$$

d'où, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_I u\circ f = \sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}\left(\int_I (e_i^*\circ f)\right) f_j^*(u(e_i))f_j$$

et donc, en intervertissant les signes somme

$$\int_I u\circ f = \sum_{i=1}^{p}\left(\int_I (e_i^*\circ f)\right)\sum_{j=1}^{q} f_j^*(u(e_i))f_j$$

et, par définition des formes coordonnées, cette dernière somme est égale à

$$\sum_{i=1}^{p}\left(\int_I (e_i^*\circ f)\right) u(e_i)\,, \quad \text{i.e. } u\left(\int_I f\right)\ .$$

□

Propriété 3 - 5

Soit f dans $C^0(I,E)$ avec $I = [a;b]$, σ une subdivision de I donnée par $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$, $(\xi_k)_{1\leq k\leq n}$ dans I^n avec, pour tout k dans $[\![1;n]\!]$, $a_{k-1} \leq \xi_k \leq a_k$. On note $\delta_k = a_k - a_{k-1}$, $\delta(\sigma) = \max_k \delta_k$ et $S(f,\sigma,(\xi_k))$ la somme de RIEMANN définie par

$$S(f,\sigma,(\xi_k)) = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})f(\xi_k)\ .$$

Alors

$$\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{\substack{\sigma\\ \delta(\sigma)\leq\delta}} \left\| \int_I f - S(f,\sigma,(\xi_k)) \right\| = 0\ .$$

Démonstration. C'est une conséquence de la convergence des sommes de RIEMANN dans le cas des fonctions à valeurs réelles puisque, si $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ est une base de E, on a $e_i^*(S(f,\sigma,(\xi_k))) = S(e_i^*(f),\sigma,(\xi_k))$. □

Le théorème de la moyenne, version intégrale du théorème de LAGRANGE (Joseph-Louis LAGRANGE, 1736–1813), n'est pas vrai pour les fonctions à valeurs vectorielles, mais l'inégalité perdure, ce qui est suffisant pour obtenir de bonnes approximations, comme par exemple par des sommes de RIEMANN.

Théorème 3 - 17

Inégalité triangulaire

Soit $I = [a;b]$ et f dans $C^0(I,E)$. Alors $x \mapsto \|f(x)\|$ est continue sur I et à valeurs positives. De plus

$$\left\| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|\,\mathrm{d}x\ .$$

De plus ce résultat s'étend aux fonctions continues par morceaux ($x \mapsto \|f(x)\|$ étant alors continue par morceaux).

Démonstration. La norme étant continue car 1-lipschitzienne, la première assertion résulte du fait que la composée de deux fonctions continues l'est aussi. On note g la composée. Si $(\sigma,(\xi_k))$ une subdivision pointée de I, alors par inégalité triangulaire sur $\mathbf{K}$ on a $\|S(f,\sigma,(\xi_k))\| \leq S(g,\sigma,(\xi_k))$ et la seconde assertion en résulte par passage à la limite.

Le cas des fonctions continues par morceaux s'en déduit par relation de CHASLES. □

Un argument plus élégant de Frigyes RIESZ utilise le théorème de HAHN-BANACH. Soit $s = \displaystyle\int_I f$. Si s est nul, l'inégalité résulte de la positivité de la norme. Sinon on dispose d'une forme linéaire sur $\mathbf{K}s$ valant $\|s\|$ sur s et elle est de norme 1. Par prolongement des applications linéaires (voir l'exercice 3 - 18), on dispose ainsi d'une forme linéaire u définie sur E, valant $\|s\|$ sur s et de norme 1. Il vient alors

$$\left\| \int_I f \right\| = u(s) = \int_I u(f) \leq \int_I |u(f)| \leq \int_I \|f\|$$

puisque u est de norme 1 et par positivité de l'intégrale à valeurs réelles.

Dans le cas particulier où f est à valeurs complexes ou à valeurs dans un espace préhilbertien une forme linéaire est donnée, en vertu du théorème de représentation de Frigyes RIESZ, par le produit scalaire. La forme linéaire la plus naturelle est ici $x \mapsto \langle s \,|\, x\rangle$ ou, dans le cas $E = \mathbf{C}$, $x \mapsto \mathrm{Re}(\overline{s}x)$. On considère donc la fonction g donnée par $g(t) = \mathrm{Re}(\overline{s}f(t)) = \dfrac{1}{2}\left(\overline{s}f(t) + s\overline{f(t)}\right)$ et il vient

$$|s|^2 = \frac{1}{2}(\overline{s}s + s\overline{s}) = \frac{1}{2}\left(\overline{s}\int_I f + s\overline{\int_I f}\right) = \int_I g \leq \int_I |\overline{s}f| = |s| \int_I |f|$$

par croissance de l'intégrale (sur $\mathbf{R}$) et puisque $\mathrm{Re}(z) \leq |z|$ pour tout nombre complexe z. Il ne reste plus qu'à diviser par $|s|$ après avoir écarté le cas trivial $s = 0$.

Corollaire 3 - 4

Inégalité de la moyenne

Soit $I = [\,a; b\,]$ et f dans $C^0_{mcx}(I, E)$. Alors $\left\|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\| \leq (b-a)\sup_I \|f\|$.

Propriété 3 - 6

Méthode des rectangles

Si f est lipschitzienne sur I, alors

$$\int_I f = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{kb + (n-k)a}{n}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Démonstration. Si $S(f, \sigma, (\xi_k))$ est une somme de RIEMMAN associée à f, on a, par relation de CHASLES et inégalité triangulaire

$$\left\|\int_I f - S(f, \sigma, (\xi_k))\right\| \leq \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} \|f(x) - f(\xi_k)\|\,\mathrm{d}x$$

et donc si f est λ-lipschitzienne il vient

$$\left\|\int_I f - S(f, \sigma, (\xi_k))\right\| \leq |\lambda| \sum_{k=1}^{n}\int_{a_{k-1}}^{a_k} |x - \xi_k|\,\mathrm{d}x\,.$$

Or, dans le cas de la subdivision régulière, chacune des intégrales ci-dessus vaut $\dfrac{(b-a)^2}{2n^2}$ et on obtient une majoration totale par $|\lambda|\,(b-a)^2/2n$, i.e. par $\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.
□

Aparté

La démonstration précédente permet d'obtenir l'approximation de l'intégrale par les sommes de RIEMANN en utilisant l'inégalité triangulaire et l'uniforme continuité comme dans le cas réel. Pour ne pas tourner en rond, il faut alors démontrer l'inégalité triangulaire sans les sommes de RIEMANN.

Remarque 3 - 11

La formule des rectangles (à droite) peut s'améliorer en formule du point médian ou des trapèzes (exactes pour les applications affines) ou plus généralement en formules de NEWTON-COTES, dite de SIMPSON pour l'ordre 3 (Roger COTES, 1682–1716, Thomas SIMPSON, 1710–1761). Mais ces formules ne conduisent pas nécessairement à une bonne convergence, en raison du phénomène mis au jour par Carl RUNGE (1856–1927).

5 Dérivation

Il existe plusieurs façons d'envisager la notion de dérivée : l'interprétation comme une vitesse, i.e. comme la pente d'une tangente à une courbe paramétrée et l'interprétation comme un développement limité en sont deux exemples. On peut également utiliser l'interprétation de Constantin CARATHÉODORY (1873–1950) comme un prolongement par continuité de la fonction pente. C'est l'approche la plus moderne et sans doute la plus puissante d'un point de vue théorique, mais elle n'est pas citée par le programme.

Dans la suite f est une fonction définie sur un intervalle réel I et à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E.

Définition 3 - 6

CAUCHY (1821) et WEIERSTRASS (1861)

Soit a dans I. On dit que f est **dérivable** au point a si l'une des deux propriétés équivalentes suivantes est vérifiée :

— la limite de son taux d'accroissement en a admet une limite pour x tendant vers a, i.e.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in I\setminus\{a\}}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \text{ existe.}$$

— l'application f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, i.e. il existe α et β dans E tels que

$$f(x) = \alpha + (x-a)\beta + \mathrm{o}\,(x-a)$$

où $\mathrm{o}\,(x-a)$ désigne une fonction g, définie dans un voisinage de a, vérifiant $\|g\| = \mathrm{o}_a\,(x-a)$.

Dans ce cas cette limite est notée $f'(a)$, $Df(a)$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ ou encore $\dot{f}(a)$, et est appelée dérivée de f en a. Par ailleurs, dans la seconde propriété, on a alors $\alpha = f(a)$ et $\beta = f'(a)$.

Définition 3 - 7

Si la limite est prise à gauche ou, de façon équivalente, si g est définie dans un voisinage de a dans $]-\infty; a]$, on dit que f est **dérivable à gauche** en a, et on note $f'_g(a)$ cette limite.

De façon similaire, on définit le fait que f soit **dérivable à droite**, et on note $f'_d(a)$ sa dérivée à droite en a.

Corollaire 3 - 5

En particulier la dérivabilité (resp. à gauche, à droite) en a impose la continuité (resp. à gauche, à droite) en a.

Proposition 3 - 7

CARATHÉODORY - 1950 (♠)

Soit a dans I. Alors f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction φ_f définie sur I, à valeurs dans E et continue en a telle que

$$f(x) = f(a) + (x-a)\varphi_f(x)\ .$$

Dans ce cas on a $\varphi_f(a) = f'(a)$.

Remarques 3 - 12

1. La fonction f est dérivable en a si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas on a $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.
2. Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq p}$ les formes coordonnées associées. Alors f est dérivable en a si et seulement si, pour tout entier i entre 1 et p, $e_i^* \circ f$ est dérivable en a. Dans ce cas
$$f'(a) = \sum_{i=1}^{p} (e_i^* \circ f)'(a) e_i \ .$$

Démonstration. Les assertions résultent de la définition de limite l'une dans $\mathbf{R}$, l'autre dans E. □

Exemples 3 - 4

1. Pour f de I dans $\mathbf{C}$, dérivable en a, on a $f'(a) = (\mathrm{Re}(f))'(a) + i\,(\mathrm{Im}(f))'(a)$.
2. Pour A de I dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, dérivable en t, on a $A'(t) = (a'_{ij}(t))$.

Définition 3 - 8

On définit par récurrence, sous réserve d'existence, les dérivées n^{e} de f, avec $n \geq 1$, par $f^{(1)} = f'$ et $f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$ (en un point de I).

On note $D^n(I, E)$, $C^n(I, E)$, $C^n_{mcx}(I, E)$, $C^\infty(I, E)$ les espaces vectoriels formés des fonctions n-fois dérivables, n-fois continûment dérivables, n-fois continûment dérivables par morceaux, indéfiniment dérivables en tout point de I.

Si E est une $\mathbf{K}$-algèbre, ces espaces sont des $\mathbf{K}$-algèbres.

Remarque 3 - 13

Pour que la dérivée seconde de f en a existe, il faut que f' soit définie sur un voisinage de a et, plus généralement, la question de l'existence d'une dérivée n^{e} en a ne se pose que pour les fonctions ayant déjà des dérivées à tous les ordres précédents sur un voisinage de a.

Proposition 3 - 8

Linéarité de la dérivation

1. La dérivation est une application linéaire : si f et g sont définies sur I et dérivables en a, alors pour tout couple de scalaires (α, β), $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$. En particulier $f \mapsto f'$ est linéaire de $D^1(I, E)$ dans E^I et de $D^{n+1}(I, E)$ dans $D^n(I, E)$, pour $n \geq 1$.
2. Soit f dérivable en a et à valeurs dans E. Pour u dans $\mathscr{L}_c(E, F)$, $u \circ f$ est dérivable en a et on a :
$$(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a) \ .$$
3. Soit f de I dans E, $(e_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de E et $(e_i^*)_{1 \leq i \leq p}$ les formes coordonnées associées. Alors f est n-fois dérivable en a si et seulement si, pour tout i dans $[\![1; p]\!]$, $e_i^* \circ f$ l'est. On a alors
$$f^{(n)}(a) = \sum_{i=1}^{p} \left(e_i^* \circ f\right)^{(n)}(a) e_i \ .$$

Démonstration. D'une façon générale on écrit $f(x) = f(a) + (x - a)\varphi_f(x)$ pour x

dans un voisinage de a et φ_f définie sur ce voisinage. L'application φ_f étant choisie continue en a si f est dérivable en a.

On commence par démontrer la linéarité. On écrit, pour x dans un voisinage de a :

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha f(a) + \beta g(a) + (x-a)\left(\alpha\varphi_f(x) + \beta\varphi_g(x)\right)$$

et donc par stabilité des fonctions continues en a par combinaison linéaire, l'assertion en découle.

Pour u dans $\mathscr{L}_c(E,F)$, il vient

$$u \circ f(x) = u \circ f(a) + (x-a) u \circ \varphi_f(x)$$

et, par composition des fonctions continues, $u \circ \varphi_f$ est continue en a et $u \circ f$ y est dérivable et $(u \circ f)'(a) = u \circ f'(a)$.

On écrit ensuite, par définition des formes coordonnées,

$$f = \sum_{i=1}^{n} (e_i^* \circ f) e_i \ .$$

Si f est n-fois dérivable, il en va de même pour $e_i^* \circ f$ d'après ce qui précède et on a $(e_i^* \circ f)^{(n)} = e_i^* \circ f^{(n)}$, ce qui est la formule recherchée.

Réciproquement si les fonctions $e_i^* \circ f$ sont n-fois dérivables, alors f aussi en tant que combinaison linéaire de telles fonctions. □

Théorème 3 - 18

Règle de Leibniz

1. Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés de dimension finie et ψ une application bilinéaire de $E \times F$ dans G. Soit f et g n-fois dérivables en a, avec $n \geq 1$, et à valeurs respectivement dans E et F. La fonction h donnée par $h(x) = \psi(f(x), g(x))$, encore notée $\psi \circ (f \otimes g)$, est n-fois dérivable en a et satisfait à la règle de Leibniz :

$$h^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \psi(f^{(n-k)}(a), g^{(k)}(a)) \ .$$

2. En particulier si E est une $\mathbf{K}$-algèbre, alors la dérivation en a est une dérivation au sens suivant : si f et g sont dérivables en a, alors fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \ .$$

Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646–1716.

Démonstration. La première assertion se démontre par récurrence. Pour $n = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\psi(f(x), g(x)) \quad &= \quad \psi(f(a), g(a)) \\
&\quad\ + (x-a)\left(\psi(\varphi_f(x), g(a)) + \psi(f(a), \varphi_g(x))\right) \\
&\quad\ + (x-a)^2 \psi(\varphi_f(x), \varphi_g(x)) \ .
\end{aligned}$$

On peut donc poser

$$\varphi_{\psi\circ(f\otimes g)}(x) = \psi(\varphi_f(x), g(a)) + \psi(f(a), \varphi_g(x)) + (x-a)\psi(\varphi_f(x), \varphi_g(x)) \ .$$

Par continuité en a de φ_f et φ_g, par hypothèse, et de ψ car les espaces considérés sont de dimensions finies, $\varphi_{\psi\circ(f\otimes g)}$ est défini au voisinage de a et y est continu. De plus, pour la même raison, le dernier terme est dans $\mathrm{O}\,(x-a)$, donc dans $\mathrm{o}\,(1)$. Il en résulte $\varphi_{\psi\circ(f\otimes g)}(a) = \psi(f'(a), g(a)) + \psi(f(a), g'(a))$ et la formule est donc vraie au rang 1.

Supposons la formule vraie au rang n, alors par linéarité et en utilisant la formule au rang 1, il vient

$$h^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[\psi(f^{(n-k+1)}, g^{(k)}) + \psi(f^{(n-k)}, g^{(k+1)})\right]$$

et la formule en découle après réindexation en utilisant la relation de Pascal :

$$\begin{aligned} h^{(n+1)}(x) &= \psi(f^{(n+1)}, g) + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] \psi(f^{(n-k+1)}, g^{(k)}) + \psi(f, g^{(n+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n=1}{k} \psi(f^{(n-k+1)}, g^{(k)})\,. \end{aligned}$$

La propriété de dérivation résulte de ce qui précède en l'appliquant à ψ donné par $\psi(f,g) = fg$. □

Corollaire 3 - 6

Produit scalaire

1. Si f et g sont dérivables sur I et à valeurs dans un espace euclidien E, alors $\langle f \mid g\rangle$ est dérivable, de dérivée donnée par $\langle f' \mid g\rangle + \langle f \mid g'\rangle$.
2. Si f est dérivable et de norme constante égale à 1 (avec f à valeurs dans un espace euclidien), alors f' et f sont orthogonaux.

Corollaire 3 - 7

Produit vectoriel

Si E est euclidien orienté de dimension 3, et f et g sont dérivables sur I, alors $f \wedge g$ aussi et sa dérivée est $f' \wedge g + f \wedge g'$.

Proposition 3 - 9

Soit f dans $D^1(I, E)$ et g dans $D^1(I, \mathbf{R})$ ne s'annulant pas. Alors f/g est dans $D^1(I, F)$ et $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{gf' - g'f}{g^2}$.

Démonstration. Il s'agit de la dérivation d'un produit appliquée à f et $1/g$ et ce dernier cas est déjà connu. □

Remarque 3 - 14

Soit f continue sur I, dérivable sur $\mathring{I}$, et à valeurs dans E. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur $\mathring{I}$.

En effet le résultat est vrai coordonnée par coordonnée et toutes les propriétés sont linéaires.

De plus, comme dans le cas de dimension 1, le résultat est encore vrai en supposant f continue et dérivable par morceaux sur I.

6 Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral

Définition 3 - 9

Soit f dans $C^0(I,E)$. On dit que F est une primitive de f sur I si $F \in D^1(I,E)$ et $F' = f$.

On obtient, comme dans le cas réel, les résultats suivants.

Théorème 3 - 19

Leibniz-Newton - Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral
Soit f dans $C^0(I,E)$. Alors f admet des primitives sur I et deux primitives de f sur I diffèrent d'une constante.

L'unique primitive de f s'annulant en a est $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

De plus, pour toute primitive F de f, et $[a;b] \subset I$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$.

En particulier, si f est dans $C^1([a;b],E)$, alors pour x dans $[a;b]$, on a $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$.

Enfin si f est dans $C^n(I,E)$, alors toute primitive de f est dans $C^{n+1}(I,E)$.

Démonstration. On l'obtient coordonnée par coordonnée ou bien en appliquant la remarque 3 - 14. □

Théorème 3 - 20

Lagrange - Inégalité des accroissements finis
Soit f de classe C^1 sur $[a;b]$, à valeurs dans E. Soit M tel que $\forall x \in \,]a;b[$, $\|f'(x)\| \leq M$. Alors

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M(b-a)\ .$$

Démonstration. On a d'après le théorème de Leibniz-Newton et l'inégalité triangulaire

$$\|f(b) - f(a)\| = \left\| \int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f'(t)\|\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)\ .$$

□

Pour aller plus loin

En fait la dérivabilité sur $]a;b[$ suffit, à condition d'avoir un majorant de $\|f'\|$ sur cet intervalle ouvert. En effet, pour x et y tels que $a < x < y < b$, on a d'après le cas déjà traité $\|f(y) - f(x)\| \leq M(y-x) \leq M(b-a)$et le théorème s'en déduit en passant à la limite, par continuité de f en a et b et continuité de la norme.

On en déduit les différentes formes du reste de la série de Taylor (Brook Taylor, 1865–1731) permettant des contrôles de nature différente. La seule forme exacte est celle obtenue via la formule d'intégration par parties, i.e. avec reste intégral, obtenue par Pierre-Simon de Laplace (1749–1827). C'est celle qui permet le plus de finesse.

Une forme souvent suffisante est celle développée par Lagrange, dans l'espoir de démontrer que toute fonction est somme de sa série de Taylor, i.e. que le reste de la série tend vers 0, ce qui n'est pas vrai en général.

Enfin une forme purement locale, i.e. qui ne donne aucun renseignement ailleurs qu'en a et donc, en particulier, qui ne sert absolument à rien pour étudier le reste de la série, est la formule de TAYLOR-YOUNG (William textscYoung et Grace CHISHOLM-YOUNG). Cette formule permet surtout de comparer des fonctions entre elles au voisinage d'un point ou de les tracer.

Théorème 3 - 21

Formules de TAYLOR globales

Soit f de I dans E et a et x dans I.

1. Formule de TAYLOR-LAPLACE (avec reste intégral).
   Si f est de classe C^n et de classe C^{n+1} par morceaux, alors

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

   ou encore (reste intégral normalisé par homotopie)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+t(x-a))\,\mathrm{d}t\,.$$

2. Formule de TAYLOR-LAGRANGE.
   Si f est de classe C^{n+1}, alors

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right\| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \left\| f^{(n+1)} \right\|_{I,\infty}\,.$$

Démonstration. La formule de TAYLOR-LAPLACE résulte de l'intégration par parties, comme dans le cas réel.

On en déduit la formule de TAYLOR-LAGRANGE grâce à l'inégalité de la moyenne.

□

Théorème 3 - 22

Formule de TAYLOR locale

Formule de TAYLOR-YOUNG. Soit f une fonction de classe C^n de I dans E et a et x dans I. On a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^n)\,,$$

où $o((x-a)^n)$ désigne une fonction g définie au voisinage de a telle que, au voisinage de a on ait $\|g(x)\| = o((x-a)^n)$.

Démonstration. La formule de TAYLOR-YOUNG s'obtient en l'écrivant coordonnée par coordonnée puisque tout est linéaire. □

Danger

La formule de TAYLOR-YOUNG est de nature locale, par opposition aux deux autres qui sont globales. En particulier la formule de TAYLOR-YOUNG ne donne aucun renseignement sur f en dehors du point a.

7 Compléments

7 1 Critère de Cauchy

Les suites de Cauchy permettent une caractérisation de l'existence de limite sans utiliser explicitement cette limite, au moins pour les fonctions à valeurs dans un espace de Banach i.e. un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge (on dit que l'espace est complet).

Théorème 3 - 23

Critère de Cauchy

Soit F un espace de Banach, A une partie d'un espace vectoriel normé E, a dans $\overline{A}$ et $f : A \to F$. Alors f admet une limite en a si et seulement si

$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $\exists \eta \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall (x,y) \in A$

$$(\|x-a\| \leq \eta \wedge \|y-a\| \leq \eta) \Rightarrow \|f(x)-f(y)\| \leq \varepsilon \ .$$

Démonstration. On applique le caractérisation séquentielle. Si f vérifie le critère de Cauchy et si (x_n) est une suite de points de A convergeant vers a, alors $(f(x_n))$ est de Cauchy, donc convergente, puisque F est complet. Soit ℓ sa limite et soit (y_n) une suite quelconque de points de A tendant vers a. La suite donnée par $u_{2n} = x_n$ et $u_{2n+1} = y_n$ converge vers a et donc $(f(u_n))$ converge d'après ce qui précède. Sa limite est nécessairement celle de sa suite extraite $(f(x_n))$, i.e. ℓ et donc $\lim f(y_n) = \ell$. Par caractérisation séquentielle, on a donc $\lim_a f = \ell$.

La réciproque résulte de l'inégalité triangulaire. □

L'utilisation principale est dans le théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Proposition 3 - 10

Soit f de A dans F, uniformément continue, et (u_n) une suite de Cauchy, alors $f(u_n)$ l'est aussi. Autrement dit l'uniforme continuité préserve les suites de Cauchy.

Théorème 3 - 24

Prolongement des applications uniformément continues

Soit f de A dans F, uniformément continue, avec F de Banach. Soit B tel que $A \subset B \subset \overline{A}$. Alors il existe un unique prolongement de f à B par continuité (i.e. $\tilde{f}_{|A} = f$ et $\tilde{f} \in C^0(B,F)$). De plus $\tilde{f}$ est alors uniformément continue sur B.

Démonstration. Soit a dans B. Alors f admet une limite en a d'après le critère de Cauchy. La fonction ainsi prolongée est alors continue. L'uniforme continuité s'obtient par passage à la limite.

Soit $\varepsilon > 0$. On dispose de η comme dans la définition de l'uniforme continuité sur A. Soit maintenant a et b dans B avec $\|a-b\| \leq \eta/2$. On dispose alors de suites de points de A, (a_n) et (b_n) tendant respectivement vers a et b et telles que $\|a_n - b_n\| \leq \eta$. On a alors $\|f(a_n) - f(b_n)\| \leq \varepsilon$ et donc, par passage à la limite, $\|f(a) - f(b)\| \leq \varepsilon$. □

7 2 Homéomorphie

Définition 3 - 10

Homéomorphisme

Soit A et B deux parties d'espaces vectoriels normés. Une fonction f de A dans B est appelée homéomorphisme de A sur B si f est continue, bijective et de fonction réciproque continue.

Un homéomorphisme est donc un isomorphisme d'espaces topologiques : les ouverts de A et de B se correspondent par f. Il en est donc de même des fermés.

Danger

Dans le cas $E = \mathbf{R}$ toute bijection continue sur un intervalle de $\mathbf{R}$ est strictement monotone et sa bijection réciproque est automatiquement continue, i.e. les homéomorphismes sur un intervalle de $\mathbf{R}$ sont exactement les applications strictement monotones continues.

Cette remarquable propriété ne se propage pas au cas général, mais on pourra étudier l'exercice 3 - 53

Exercices

Continuité

Dans la suite A est une partie de E et F est un espace vectoriel normé.

3 - 1 Ⓢ ★ Points fixes

Soit f continue du segment $[a;b]$ dans lui-même.

a. Montrer, en considérant $f(x)-x$, que f admet un point fixe (i.e. tel que $f(c)=c$).

b. Montrer que ce point fixe est unique lorsque f est décroissante.

c. Montrer que c'est encore le cas si f est k-lipschitzienne avec $k<1$ (i.e. $|f(x)-f(y)| \leqslant k\,|x-y|$).

3 - 2 Ⓢ X ★ Équation fonctionnelle

Soit f de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ continue telle que $f(0)=f(1)$.

a. Montrer que pour n entier strictement positif, il existe x dans $\left[0;1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que $f(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$.

b. Soit a dans $[0;1]$.
Existe-t-il au moins un x dans $[0,1-a]$ tel que $f(x)=f(x+a)$?

3 - 3 Ⓢ ★ Accroissement symétrique

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour tout x réel, on ait $\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x-h))=0$. La fonction est-elle continue ?

3 - 4 Ⓢ ★ Adhérence

Soit f une fonction continue de A dans F. Soit X dans A. Montrer $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$ et donner un exemple pour lequel l'inclusion est stricte. Réciproquement montrer que si, pour tout X dans A, $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$, alors f est continue sur A.

3 - 5 Ⓢ ★ Densité

Soit f et g deux fonctions continues de A dans F et X une partie dense dans A. Montrer que $f(X)$ est dense dans $f(A)$ et que si f et g coïncident sur X, elles sont égales.

3 - 6 Ⓢ ★★ Fonctions additives continues ♥

Soit a un réel et f une fonction continue de $\mathbf{R}$ dans lui-même telle que $f(1)=a$ et, pour tous réels x et y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

a. Montrer $f(n)=na$ pour n dans $\mathbf{Z}$, puis $f(1/q)=a/q$ pour q dans $\mathbf{N}^*$ et enfin $f(r)=ra$ pour $r\in\mathbf{Q}$.

b. Conclure que f est linéaire.

3 - 7 Ⓢ ★★ Homomorphismes continus de $(\mathbf{R}_+^*,\times)$ dans $(\mathbf{R},+)$

Soit f de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$, continue en 1 et vérifiant $f(xy)=f(x)+f(y)$.

a. Montrer $f(1)=0$ et $f(1/x)=-f(x)$ pour $x>0$.

b. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ (on écrira $x+h=x(1+h/x)$).

c. En posant $f(2)=a$, calculer $f(2^n)$, $f(2^{1/q})$ et enfin $f(2^{p/q})$ pour n, p et q entiers ($q\neq 0$).

d. En déduire qu'il existe une constante C telle que $f=C\ln$.

3 - 8 Ⓢ M ★★ Uniforme continuité

Soit $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ de classe C^1.

a. Montrer que si f' est bornée, alors f est uniformément continue.

b. Montrer que si $\lim\limits_{+\infty}|f'|=+\infty$, alors f n'est pas uniformément continue.

3 - 9 Ⓢ ★★ Graphe

Soit f une fonction de K dans F où K est un compact et F un espace vectoriel normé. Son graphe est défini par $\{(x,f(x))\,|\,x\in K\}$. Montrer que f est continue sur K si et seulement si son graphe est compact.

3 - 10 Ⓢ M 2018 ★★ Point fixe

Soit f et g de $[0;1]$ dans lui-même, continues et telles que $f\circ g=g\circ f$.

a. Montrer que g admet au moins un point fixe que l'on note a.

b. On suppose maintenant $\forall x\in[0;1]$, $f(x)>g(x)$. Montrer que la suite $(f^n(a))_{n\in\mathbf{N}}$ est strictement croissante.

c. En déduire qu'il existe c dans $[0;1]$ tel que $f(c)=g(c)$.

3 - 11 Ⓢ X 2018 ★★ Point fixe

Soit I un segment non vide de $\mathbf{R}$ et f de I dans I, 1-lipschitzienne. Soit a un point de I et $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite d'éléments de I définie par $x_0=a$ et $x_{n+1}=\dfrac{f(x_n)+x_n}{2}$. Montrer que (x_n) converge vers un point fixe de f.

Indication : On pourra remarquer que $f+\mathrm{Id}$ est croissante.

3 - 12 Ⓢ ★★ Graphe

Soit f une fonction de A dans F. Son graphe est défini par $\{(x,f(x))\,|\,x\in A\}$.

a. Montrer que si f est continue sur A alors son graphe est fermé (en tant que partie de $A\times F$.

b. Montrer que la réciproque est fausse en général.

c. Montrer que la réciproque est vraie si $f(A)$ est inclus dans un compact.

3 - 13 Ⓢ ★★ Norme sur $\mathbf{R}[X]$

Soit A une partie de $\mathbf{R}$. On définit sur $\mathbf{R}[X]$, $N(P) = \sup_{x \in A} |P(x)|$.

a. À quelle condition sur A, N est-elle une norme ?

b. Si tel est le cas, à quelle condition $P \mapsto P(0)$ est-elle continue ?

3 - 14 Ⓢ ★★ Forme linéaire continue

On considère $\mathbf{R}[X]$ et a dans $\mathbf{R}$. L'évaluation en a (i.e. $P \mapsto P(a)$) est-elle continue pour la norme uniforme sur $[0;1]$, i.e. $\|P\| = \sup_{[0;1]} |P|$? pour la norme 1 sur $[0;1]$, i.e. $\|P\| = \displaystyle\int_0^1 |P|$?

3 - 15 Ⓢ ★★★ Forme linéaire continue

Soit φ une forme linéaire sur E. Montrer que φ est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé.

Généraliser au cas où φ est une application linéaire à valeurs dans un espace vectoriel de dimension finie.

3 - 16 Ⓢ ★★★ Point fixe de Banach ♥

Soit K un compact dans un espace vectoriel normé et f une application de K dans K vérifiant pour tous x et y dans K, distincts, $\|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

a. Montrer que f admet un unique point fixe.

b. Soit u_0 dans K et la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans $K^{\mathbf{N}}$ défine par $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer qu'elle converge vers le point fixe de f.

c. On suppose seulement f contractante (i.e. 1-lipschitzienne). Montrer que si K est convexe alors f admet un point fixe (non nécessairement unique). *Indication : on pourra considérer la suite de fonctions définie par* $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) f(x) + \dfrac{1}{n} f(x_0)$ *pour un x_0 quelconque de K.*

3 - 17 Ⓢ ENS L ★★★ Fonctions contractantes

On note Lip_1 l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$.

a. Soit x_0 et y_0 dans $\mathbf{R}$. Montrer qu'il existe f^+ et f^- dans Lip_1 tels que $f^{\pm}(x_0) = y_0$ et vérifiant : pour tout f dans Lip_1 telle que $f(x_0) = y_0$, on ait $f^- \leq f \leq f^+$.

b. Soit F un fermé de $\mathbf{R}$, et $f_0 : F \to \mathbf{R}$ 1-lipschitzienne. Montrer qu'il existe f^+ et f^- dans Lip_1 tels que $f^{\pm}_{|F} = f_0$ et vérifiant : pour toute f dans Lip_1 telle que $f_{|F} = f_0$, on ait $f^- \leq f \leq f^+$.

3 - 18 Ⓢ ★★★ Théorème de Hahn-Banach ♠

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Montrer que toute forme linéaire continue d'un sous-espace vectoriel de E peut être prolongée en une forme linéaire continue sur E et de même norme.

Hans Hahn, 1879–1934 et Stefan Banach, 1892–1945.

3 - 19 Ⓢ C 2013 ★★★ Monotonie

Existe-t-il une fonction continue de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ telle que f ne soit monotone sur aucun segment de $[0;1]$?

Intégration

3 - 20 Ⓢ M 2017 ★

Soit p un entier naturel. Montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p \sim \frac{n^{p+1}}{p+1}$ quand n tend vers $+\infty$.

3 - 21 Ⓢ M 2017 ★

Soit $f : [0;1] \to \mathbf{R}$ continue et d dans $\mathbf{N}^*$. Montrer $\lim \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{d} \displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ avec $S_n = \displaystyle\sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ d | k}} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

3 - 22 Ⓢ ★ Approximation uniforme

Montrer que la suite de fonctions en escalier définie par $\varphi_n(x) = 0$ si $|x| > \dfrac{1}{2n}$ et $\varphi_n(x) = n$ sinon, vérifie, pour toute fonction continue f nulle en dehors d'un intervalle compact $[a;b]$ et à valeurs dans E

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{a \leq \xi \leq b} \left\| \int_a^b f(x) \varphi_n(\xi - x)\,\mathrm{d}x - f(\xi) \right\| = 0\,.$$

3 - 23 Ⓢ ★★ Suite de Dirac

Une **suite de** Dirac est une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant

i. $\forall x \in \mathbf{R}$, $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(0)$.

ii. $\lim_n \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

iii. $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall \delta \in]0;1[$, $\exists N \in \mathbf{N}^*$, $\forall n \geq N$

$$1 - \varepsilon < \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \leq 1$$

et

$$0 \leq \int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{+\infty} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\,.$$

Déterminer les constantes c_n telle que les fonctions définies par $\varphi_n(x) = 0$ si $|x| > 1$ et $\varphi_n(x) = c_n \left(\cos\left(\dfrac{\pi x}{2}\right)\right)^n$ sinon, forment une suite de Dirac. Montrer qu'alors c'est effectivement une suite de Dirac.

Cette suite est la base d'une démonstration de la version trigonométrique du théorème de WEIERSTRASS.

3 - 24 Ⓢ ★★ ♥♥

Soit f continue de $[a;b]$ dans $\mathbf{R}$ et, pour n dans $\mathbf{N}$, $I_n = \int_a^b f(t)t^n\,\mathrm{d}t$. Montrer que si $I_0 = \cdots = I_n = 0$, alors f s'annule au moins $n+1$ fois sur $]a;b[$.

Développements limités

3 - 25 ★

a. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos(x))^{\ln(x)}$.

b. DL d'ordre 3 en 0 de : $(x^3+1)\sqrt{1-x}$.

c. DL d'ordre 3 en 0 de : $(x^3+1)\sqrt{1-x^2}$.

d. DL d'ordre 3 en 0 de : $\dfrac{1}{1-x^3}\sqrt{1-4x^3}$.

e. DL d'ordre 3 en 0 de : $(1-x^3)\ln(1-4x^2)$.

f. DL d'ordre 5 en 0 de : $\cos(\arcsin(t))$.

g. DL d'ordre 2 en 0 de : $\dfrac{\sin(x)-1}{1+\cos(x)}$.

h. DL d'ordre 3 en 0 de : $\cos(x)\ln(1+x)$.

i. Équivalent simple en $+\infty$ de $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$.

3 - 26 ★★

a. Limite en 0 de : $\dfrac{2x}{\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)} - \cos(x)$.

b. DL d'ordre 2 en 0 de : $\ln\left(\alpha^t+\beta^t\right)$.

c. DL d'ordre 2 en 0 de :

$$(x^9 - 4x^7 + 11x^5 - x^3 - x^2 + 1)\sqrt{1+x}\ .$$

d. DL d'ordre 2 en 0 de :

$$(x^9 + 4x^7 + 11x^5 - 3x^3 - x + 1)\sqrt{1+2x^2}\ .$$

e. DL d'ordre 3 en 0 de : $\dfrac{1+x^2}{3+x}$.

f. DL d'ordre 3 en $\pi/4$ de : $\sqrt{\tan(t)}$.

g. DL d'ordre 6 en 0 de : $\sin(x)\cos(2x)$.

h. DL d'ordre 3 en 0 de : $(1+x)^{1/x}$.

i. DL d'ordre 3 en 0 de : $(1+\tan(x))^{1/x}$.

j. DL d'ordre 2 en 0 de : $\sqrt{1+\sqrt{1+t}}$.

k. Équivalent simple en 0 de : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\mathrm{sh}(x)}$.

l. Équivalent simple en 0 de : $\dfrac{1}{\ln(1+x)} - \dfrac{1}{x}$.

m. Équivalent simple en 0 de : $\dfrac{1}{\ln(1-x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}$.

n. DL d'ordre 3 en 0 de :

$$\operatorname{argsh}(\exp(t)) - \exp(\operatorname{argsh}(t))\ .$$

o. Équivalent simple en 0 de :

$$\tan(\sin(t)) - \sin(\tan(t)))\ .$$

p. DL d'ordre 4 en 0 de :

$$\sin(\ln(1+t)) - \ln(1+\sin(t))\ .$$

q. Soit $f(x) = \sin(x-x^2)$. Déterminer un DL d'ordre 3 en 0 de : $f(2x) - f(x)$.

3 - 27 Ⓢ ★★ **Développement limité implicite**

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, tan a un unique point fixe, noté x_n, dans l'intervalle $\left]n\pi - \dfrac{\pi}{2}; n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[$.

b. Quelle relation lie x_n et $\arctan(x_n)$?

c. Donner un développement asymptotique de x_n en fonction de n à l'ordre 0 pour $n\to\infty$.

d. En déduire un développement asymptotique de x_n à l'ordre 2.

3 - 28 Ⓢ ★★ **Développement limité implicite**

Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = x\cos^n(x)$ et x_n la valeur où elle atteint son maximum au sein de l'intervalle $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

a. Démontrer l'existence et unicité de x_n.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

c. Montrer $x_n^2 \sim \dfrac{1}{n}$.

d. Donner un équivalent de $f_n(x_n)$.

3 - 29 Ⓢ **X 2000** ★★ **Développement limité implicite**

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{\ln|x-2|}{\ln|x|}$.

a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, il existe un unique réel x_n vérifiant $f(x_n) = 1 - \dfrac{1}{n}$.

b. Trouver la limite et un équivalent de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$.

3 - 30 ★★★

a. Limite éventuelle en 2 de :

$$\frac{2^t - t^2}{\log_2(t) - \log_t(2)}\ .$$

b. Équivalent simple en 0 de :

$$\exp(\arcsin(x)) - \ln\left(\frac{e}{1-x}\right)\ .$$

c. DL d'ordre 7 en 0 de : $\tan(t)$.

d. DL d'ordre 7 en 0 de : $\operatorname{th}(t)$.

e. DL d'ordre 3 en 0 de : $\dfrac{1}{t}\ln(\operatorname{ch}(t))$.

f. DL d'ordre 2 en 0 de : $(1+\arctan(x))^{x/\sin(x)}$.

g. DL d'ordre 2 en 0 de : $(1+\arctan(x))^{x/\sin^2(x)}$.

h. DL d'ordre 2 en 0 de : $(1+\tan(x))^{x/\sin^2(x)}$.

i. DL d'ordre 3 en $\pi/4$ de : $(\tan(t))^{\tan(2t)}$.

j. DL d'ordre 4 en 0 de : $\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch}(\sqrt{t})}{\cos(\sqrt{t})}\right)$.

k. DL d'ordre 4 en 0 de : $\ln\left(\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right)$.

l. DL d'ordre 5 en 0 de : $\exp(\sin(t)/t)$.

m. DL d'ordre 5 en 0 de :

$$\exp(\sin(t)/t)-\exp(t/\sin(t)).$$

n. Limite en 0 de :

$$\frac{\sin(\operatorname{sh}(x))-\operatorname{sh}(\sin(x))}{\tan(\operatorname{th}(x))-\operatorname{th}(\tan(x))}.$$

o. DL d'ordre 3 en 0 de : $\exp(\arcsin(x))$.

p. DL d'ordre 4 en 0 de : $x\,(\operatorname{ch}(x))^{1/x}$.

q. DL d'ordre 3 en 0 de :

$$\operatorname{sh}(x)-\ln\left(\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

3 - 31 Ⓢ ★★★ Développement limité de f^{-1}

a. Soit P dans $\mathbf{R}[X]$ de valuation 1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, il existe deux polynômes Q_n et R_n uniques tels que :

$$\begin{cases} X=Q_n\circ P+R_n \\ \deg(Q)_n\leq n<\operatorname{val}(R_n). \end{cases}$$

b. Soit f une bijection de I dans J, avec I et J deux intervalles contenant 0, et telle que $f(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\mathrm{o}(x^n))$, avec $a_1\neq 0$, au voisinage de 0.

Démontrer que f^{-1} admet un développement limité en 0 à l'ordre n, et en donner les deux premiers termes.

3 - 32 Ⓢ M 2001 ★★★ Développement limité implicite

a. Montrer que, pour n entier naturel non nul, l'équation $e^x=n-x$ admet une unique solution positive x_n.

b. Déterminer les trois premiers termes du développement asymptotique de x_n en fonction de n.

3 - 33 Ⓢ C 2001 ★★★ Développement limité implicite

Pour tout entier naturel non nul n, on pose $f_n(x)=nx^{n+1}-(n+1)x^n-\dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que f_n admet une unique racine positive notée x_n.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge vers une limite ℓ et trouver un équivalent de $x_n-\ell$.

3 - 34 Ⓢ ★★★ Constantes de n-nacci

a. Pour n supérieur à 2, on note P_n le polynôme $X^n-X^{n-1}-\cdots-X-1$. Montrer qu'il admet une unique racine positive.

b. On note cette racine x_n (appelé nombre de métal ou constante de n-nacci). Montrer $x_n=2-2^{-n}+\mathrm{o}\left(2^{-n}\right)$.

c. Donner un développement asymptotique de x_n à l'ordre $n^2 2^{-3n}$.

3 - 35 Ⓢ ENS 2001 ★★★ ♠

Soit P et Q deux polynômes à coefficients réels, non constants, de coefficients dominants positifs.

On note $(x_i)_{1\leq i\leq p}$ les racines de P', avec $x_1<x_2<\cdots<x_p$, et $m_1,\ldots,m_p$ leurs multiplicités respectives. De même pour Q', on note $(y_i)_{1\leq i\leq q}$ ses racines, avec $y_1<y_2<\cdots<y_q$, et $n_1,\cdots,n_q$ leurs multiplicités.

Montrer qu'il existe un C^1-difféomorphisme croissant f de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ tel que $P\circ f=Q$ si et seulement si : $p=q$ et, pour tout entier i dans $[\![1;p]\!]$, on a $P(x_i)=Q(y_i)$ et $m_i=n_i$.

Fonctions à valeurs vectorielles

3 - 36 Ⓢ ★ Vecteurs liés

Soit f et g deux applications d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans un espace vectoriel E, de dimension finie, de classe C^1.

a. On suppose que, pour tout t dans I, $(f(t),g(t))$ est liée. En est-il de même pour $(f'(t),g'(t))$?

b. On suppose que, pour tout t dans I, $(f'(t),g'(t))$ est liée. Existe-t-il un vecteur c de E tel que $f-c$ et g sont colinéaires ?

3 - 37 Ⓢ ★★ Repère mobile ♠

Soit e_1,, e_2, e_3 trois applications d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$ et de classe C^1 telles que pour tout t dans I, $\mathcal{B}_t$ définie par $\mathcal{B}_t=(e_1(t),e_2(t),e_3(t))$, soit une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$.

a. Soit $M(t)$ la matrice 3×3 des vecteurs dérivés $(e_1'(t),e_2'(t),e_3'(t))$ exprimés dans $\mathcal{B}_t$. Montrer que $M(t)$ est antisymétrique.

b. En déduire qu'il existe un vecteur $\Omega(t)$ tel que, pour i entre 1 et 3 et t dans I, on ait $e_i'(t)=\Omega(t)\wedge e_i(t)$.

c. Si e_1, e_2, e_3 sont de classe C^2, montrer que Ω est de classe C^1 et calculer e_i'' en fonction de Ω, Ω' et e_i.

3 - 38 Ⓢ ★★ Accélération centrale ♠

Soit f une fonction de classe C^2 d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$ et telle que, pour tout t dans I, la famille $(f(t), f''(t))$ soit liée. On pose $\sigma(t) = f(t) \wedge f'(t)$.

a. Montrer que σ est constant.

b. Montrer que, s'il existe t_0 dans I tel que $(f(t_0), f'(t_0))$ soit libre, alors $f(I)$ est inclus dans un plan.

3 - 39 Ⓢ ★★ Direction constante

Soit f une fonction de classe C^1 d'un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}^3$ euclidien et telle que, pour tout t dans I, on ait $f(t) \neq 0$ et la famille $(f(t), f'(t))$ soit liée. On pose $g(t) = \dfrac{f(t)}{\|f(t)\|}$.

a. Montrer que g est de classe C^1 et que $g'(t)$ est à la fois orthogonal et colinéaire à $g(t)$.

b. En déduire que $f(t)$ garde une direction constante.

c. Chercher un contre-exemple lorsqu'on retire la propriété : $\forall t \in I,\ f(t) \neq 0$.

3 - 40 Ⓢ ★★ Déterminants

Calculer par dérivation $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x \\ x & x+a_2 & x \\ x & x & x+a_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 1 & \cos(x+a) & \sin(x+a) \\ 1 & \cos(x+b) & \sin(x+b) \end{vmatrix}$ et $\left| \dfrac{x^{i-j+1}\delta_{i+1\geq j}}{(i-j+1)!} \right|$.

3 - 41 Ⓢ ★★ Trace

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $t \mapsto \det(I_n + tA)$ est dérivable en 0 et calculer sa dérivée en 0.

3 - 42 Ⓢ ★★ Centre de gravité

Soit f de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 de longueur non nulle. On note indifféremment M_t ou $f(t)$. Le centre de gravité de la courbe est le point G défini par $\int_a^b \|f'(t)\| \ \overrightarrow{GM_t}\, dt = \overrightarrow{0}$.

a. Montrer l'existence et l'unicité de G. Montrer qu'il est indépendant du paramétrage choisi.

b. Déterminer le centre de gravité d'un demi-cercle.

c. ★★★ Montrer que G appartient à l'enveloppe convexe de la courbe.

d. Soit u une isométrie affine. Montrer que si G est le centre de gravité de f, alors $u(G)$ est le centre de gravité de $u \circ f$.

e. Montrer que si la courbe admet un axe de symétrie, Δ, alors $G \in \Delta$.

Formules de Taylor

3 - 43 Ⓢ ★ Déterminant

Soit f une fonction de $\mathbf{R}$ dans lui-même et trois fois continûment dérivable en a. Étudier $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h^4} \begin{vmatrix} 1 & f(a) & f(a+h) \\ 1 & f(a+h) & f(a+2h) \\ 1 & f(a+2h) & f(a+3h) \end{vmatrix}$.

3 - 44 Ⓢ ★★ Fonction nulle

Soit f dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et λ dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que, pour tout entier naturel n, on ait $f^{(n)}(0) = 0$ et $\left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq \lambda^n n!$.

Montrer que f est nulle sur l'intervalle $\left] -\frac{1}{\lambda}; \frac{1}{\lambda} \right[$, puis sur $\mathbf{R}$.

3 - 45 Ⓢ ★★ Fonctions absolument monotones

Soit f dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ telle que, pour tout entier naturel n et tout réel x, on ait $f^{(n)}(x) > 0$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{f(x)}{x^n} = +\infty$.

3 - 46 Ⓢ ★★ Formule de Simpson

Soit f dans $C^5(\mathbf{R},\mathbf{R})$ dont la dérivée cinquième est bornée sur $\mathbf{R}$ par un réel M.

a. On suppose f impaire et telle que $f'(0) = 0$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad \left| f(x) - \frac{x}{3} f'(x) \right| \leq \lambda M \left| x^5 \right| .$$

b. On suppose $f'(a) = f'(b) = f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = 0$. Montrer $|f(b) - f(a)| \leq \dfrac{M(b-a)^5}{2880}$.

3 - 47 Ⓢ ★★ Minoration

a. Soit f dans $C^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Montrer que, pour a dans $[-x; x]$, on a

$$\left|f'(a)\right| \leq \frac{1}{2x} |f(x) - f(-x)| + \frac{a^2 + x^2}{2x} \sup_{]-x;x[} \left|f''\right| .$$

b. Montrer que, si $0 \leq x \leq \pi/2$, on a $\sin(x) \geq x\cos(x) - x^2$.

3 - 48 Ⓢ ★★★ Différences finies ♥

Soit f dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et h un réel strictement positif. On pose :

$$\Delta_h f(x) = \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)}{h},$$

$$\Delta_h^2 f(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}$$

et, plus généralement,

$$\Delta_h^p = \underbrace{\Delta_h \circ \Delta_h \circ \cdots \circ \Delta_h}_{p \text{ fois}}.$$

a. Montrer $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists \theta \in \left]-1;1\right[$,

$$\Delta_h f(x) = f'\left(x + \frac{\theta h}{2}\right) .$$

b. Montrer $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists \theta' \in \left]-1;1\right[$,

$$\Delta_h f(x) = f'(x) + \frac{h^2}{24} f^{(3)}\left(x + \frac{\theta' h}{2}\right) .$$

c. Montrer par récurrence sur l'entier naturel p : $\forall x \in \mathbf{R}$, $\exists \theta_p \in \left]-p;p\right[$,

$$\Delta_h^p f(x) = f^{(p)}(x) + \frac{ph^2}{24} f^{(p+2)}\left(x + \frac{\theta_p h}{2}\right) .$$

3 - 49 Ⓢ ★★★ Inégalités de Kolmogorov ♥

a. Soit f dans $C^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}_+)$ avec $\|f''\|_\infty \leq M$.

i. Montrer que, pour tous réels x et y, on a $f(x) + yf'(x) + \dfrac{y^2}{2}M \geq 0$.

ii. En déduire que, pour tout réel x, on a $|f'(x)| \leq \sqrt{2Mf(x)}$.

iii. Que dire de f si, pour tout réel x, on a $|f'(x)| = \sqrt{2Mf(x)}$?

b. Soit n un entier naturel supérieur à 2 et f dans $C^n(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ telle que f et $f^{(n)}$ soient bornées sur $\mathbf{R}$. On veut montrer que les dérivées intermédiaires sont également bornées sur $\mathbf{R}$.

i. On suppose $n = 2$. Montrer que, pour x réel tout h strictement positif, on a $|f'(x)| \leq \dfrac{2\|f\|_\infty}{h} + \dfrac{h\|f''\|_\infty}{2}$.

ii. Pour quelle valeur de h obtient-on la meilleure inégalité ?

iii. Traiter le cas général en utilisant l'exercice précédent.

Compléments

3 - 50 ★★★ Théorème de Tietze

a. Soit A et B deux fermés disjoints de E, montrer qu'il existe une fonction continue de E dans $[0;1]$ dont la restriction est nulle sur A et identiquement égale à 1 sur B.

b. Soit A un fermé de E et f une fonction continue de A dans $\mathbf{R}$. Montrer que f admet un prolongement continu à E, i.e. il existe g de E dans $\mathbf{R}$ continue et telle que $g_{|A} = f$.

c. En n'utilisant pas la métrique sur E, montrer la réciproque du théorème de Tietze : si toute fonction continue sur un fermé de E admet un prolongement continu à E tout entier, alors, étant donné deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V disjoints contenant chacun un des deux fermés.

d. Démontrer la version générale du théorème de Tietze-Urysohn. En utilisant uniquement la propriété précédente de E (voir aussi exercice 2 - 9), i.e. « *étant donné deux fermés disjoints de E, il existe deux ouverts U et V disjoints contenant chacun un des deux fermés* », démontrer que les conclusions des questions **a.** et **b.** sont encore valides.

i. Pour la première question (lemme d'Urysohn), on pourra procéder par dichotomies successives.

ii. En ce qui concerne la seconde question, montrer l'existence d'un prolongement si f est à valeurs dans un segment $[-a;a]$ en construisant une série de fonctions continues prolongeant f et à valeurs dans le même segment. Puis étendre le résultat au cas d'un intervalle ouvert $\left]-a;a\right[$ et enfin retirer l'hypothèse f bornée.

Pavel Samouilovitch Urysohn, 1898–1924, s'est noyé le long des côtes bretonnes. Heinrich Tietze, 1880–1964.

3 - 51 Ⓢ ★★★ Points de continuité de la dérivée

a. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans un espace vectoriel normé F. On suppose que la famille converge simplement vers une fonction f, i.e. pour tout x dans $\mathbf{R}$, $\lim f_n(x) = f(x)$. Montrer, en utilisant 2 - 38, que f est continue sur une partie dense de $\mathbf{R}$.

<u>Indication</u> : on pourra considérer, pour n et m entiers naturels, l'ensemble des x dans $\mathbf{R}$ tels que, pour tous p et q supérieurs à n, $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq 2^{-m}$ et montrer que la réunion à m fixé de l'intérieur ces fermés est un ouvert dense de $\mathbf{R}$. Puis montrer que l'intersection de ces ouverts denses, pour m variant, est dense.

b. En déduire que les points de continuité de la dérivée d'une fonction dérivable de $\mathbf{R}$ dans lui-même forment une partie dense dans $\mathbf{R}$.

3 - 52 ★★★ Complétude

Soit E et F deux espaces vectoriels normés.

a. Montrer que si F est complet, $\mathscr{L}_c(E,F)$ aussi.

b. On admet le théorème de Hahn-Banach général, i.e. que toute forme linéaire continue d'un sous-espace vectoriel de E peut être prolongée en une forme linéaire continue sur E et de même norme. Montrer la réciproque de l'assertion précédente.

3 - 53 Ⓢ ★★★ Théorème de Banach

Soit E et F deux espaces de Banach et u dans $\mathscr{L}_c(E,F)$, surjective.

a. Montrer qu'il existe un entier k tel que A_k défini par

$$A_k = \{u(x) \,|\, x \in E\,, \|x\| \leq k\}$$

est tel que l'intérieur de son adhérence est non vide.

b. Montrer qu'il existe η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour tout élément y de F avec $\|y\| \leq \eta$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $E^{\mathbf{N}}$ vérifiant $\|x_n\| \leq 2k$ et $y = \lim u(x_n)$.

c. On pose $\delta = \eta/(2k)$. Montrer que, pour y dans F et ε dans $\mathbf{R}_+^*$, il existe x dans E vérifiant $\delta\,\|x\| \leq \|y\|$ et $\|y - u(x)\| \leq \varepsilon$.

d. Pour de tels y et ε, avec $\|y\| < \delta$, en déduire l'existence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $E^{\mathbf{N}}$ vérifiant :

- $\|x_1\| < 1$,
- $\|x_{n+1}\| \leq 2^{-n}\varepsilon$, pour $n \in \mathbf{N}^*$,
- $\|y - u(x_1) - \cdots - u(x_n)\| \leq 2^{-n}\delta\varepsilon$, pour $n \in \mathbf{N}^*$.

e. En déduire que pour de tels y, il existe x dans E de norme inférieure à 1 et tel que $y = u(x)$.

f. En déduire le théorème de Banach : si u est une application linéaire continue et bijective entre deux espaces de Banach, alors sa réciproque est continue.

3 - 54 ★★★ Limite nulle

Soit f dans $\mathcal{C}(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ vérifiant, pour tout x dans $\mathbf{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(nx) = 0$. Montrer, en utilisant 2 - 38, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Indication : on introduira l'ensemble des x dans $\mathbf{R}_+^*$ tels que, pour tout k supérieur à n, on a $|f(kx)| \leq \varepsilon$.