CHAPITRE

2

Topologie et normes

Maryam Mirzakhani naît le 12 mai 1977 à Téhéran. Elle est repérée par un programme iranien de développement des talents exceptionnels et y rencontre Roya Behesti. Les deux jeunes filles sympathisent, achètent au hasard des livres et se confrontent à des problèmes stimulants. Elles intègrent le lycée Farzanean et convainquent la directrice de les préparer aux Olympiades internationales de mathématiques. Elles deviennent les premières femmes à représenter l'Iran à cette compétition et Mirzakhani la première personne de nationalité iranienne à obtenir un score parfait. Quelques années plus tard, après un Bachelor of Science en Iran et un doctorat à Harvard (USA), elle devient la première femme lauréate de la médaille Fields. Elle a alors 37 ans.

Son domaine de prédilection est la géométrie hyperbolique et notamment l'étude des trajectoires périodiques sur les surfaces hyperboliques. Sa thèse donne trois résultats de première importance : compter le nombre de ces trajectoires sans point doubles, relier ce problème à l'étude des espaces de modules (qui classifient les structures que l'on peut associer à une surface) et donner une nouvelle démonstration d'une conjecture d'Edward Witten, après celle donnée par Maxim Kontsevich (tous deux médaillés Fields). Après sa thèse elle obtient une bourse Clay, ce qui lui permet de réfléchir librement à des problèmes difficiles. Elle se décrit comme lente : *il faut du temps pour apprécier la beauté des mathématiques.*

Après l'obtention son résultat majeur, en collaboration avec Alex Eskin, elle commente : *« si nous avions su que les choses seraient si compliquées, je pense que nous aurions abandonné. Je ne sais pas. En fait, je ne sais pas, je n'abandonne pas facilement. »*

Introduction

Programme

On prolonge les notions de limites de suites et on introduit la topologie des espaces vectoriels normés. L'objectif est d'introduire le vocabulaire de la topologie, la notion de compacité dans un espace vectoriel normé et de donner, à travers l'étude des espaces vectoriels normés de dimension finie, un cadre commode pour traiter diverses applications à l'analyse (fonctions vectorielles, équations différentielles linéaires, suites et séries de fonctions).

— Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe, structure et distance associées à une norme, boules, sphères. Parties, suites, fonctions bornées. Norme associée à un produit scalaire, normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbf{K}^n$. Produit fini d'espaces vectoriels normés.

— Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Suites extraites, valeurs d'adhérence.

— Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie. Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente. Linéarité de la somme. Terme général d'une série convergente. Lien suite-série.

— Intégrale d'une fonction f continue par morceaux sur un segment de $\mathbf{R}$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

— Intégration sur un intervalle quelconque pour f continue par morceaux à valeurs dans $\mathbf{K}$, convergence de l'intégrale. Linéarité, positivité, dérivation si f est continue. Relation de Chasles. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

— Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion, par intersection d'une famille finie. Voisinage. Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Ouvert, fermé et voisinage relatif.

— Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.

— Normes équivalentes. La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiant(e)s. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente. Équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Dans tout ce chapitre $\mathbf{K}$ désigne le corps des réels $\mathbf{R}$ ou celui des complexes $\mathbf{C}$ et E désigne un $\mathbf{K}$-espace vectoriel muni d'une norme ou, plus généralement, d'un moyen de mesurer les longueurs. La notion d'espace métrique est hors-programme et repose sur la définition générale de distance :

♠

On appelle distance sur un E une application $d : E^2 \to \mathbf{R}_+$ telle que, pour tous x, y et z dans E, on ait

1. $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Le programme se concentre sur les espaces normés. Les seuls espaces métriques que nous rencontrerons seront les parties A d'un espace vectoriel normé : ce ne sont pas des espaces vectoriels et on ne peut donc pas parler de norme sur A, mais les propriétés précédentes restent vraies tant qu'elles sont définies.

Voici quelques exemples d'espaces dont on aimerait traiter la théorie de façon unifiée :

Exemples 2 - 1

— Un espace muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ est muni de la norme associée à ce produit scalaire : $\|x\| = \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$.

— Pour x dans $\mathbf{K}^n$, on peut poser $\|x\|_p^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$. Pour $p \geq 1$, on obtient alors une norme par convexité.

Voici des variantes du dernier exemple :

Exemples 2 - 2

— Pour A dans $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{K})$, on peut poser $\|A\|_p^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^p$.

— Lorsque E est de dimension finie, on définit pour x dans E et pour $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base de E, $\|x\|_p^p = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p$, avec $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

En voici d'autres, en dimension infinie :

Exemples 2 - 3

— Pour P dans $\mathbf{K}[X]$, on peut poser $\|P\|_p^p = \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} |a_i|^p$, lorsque $P = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$. C'est encore une variante du premier exemple.

— Pour f dans $C^0([a,b],\mathbf{K})$, avec a et b réels vérifiant $a < b$, on peut poser $\|f\|_p^p = \displaystyle\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x$. Toujours par convexité, on obtient une norme pour $p \geq 1$.

1 Espaces vectoriels normés

Définition 2 - 1

Une **norme** sur un espace vectoriel E est une application N de E dans $\mathbf{R}_+$ vérifiant

Séparation - $\forall x \in E,\ N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

Inégalité triangulaire - $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x+y) \leq N(x) + N(y)$;

Homogénéité - $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{K},\ N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$.

On dit alors que E est muni d'une structure d'**espace vectoriel normé** ou que le couple (E, N) est un espace vectoriel normé. Un vecteur de norme 1 est appelé **unitaire**.

Dans la suite (E, N) est un espace vectoriel normé. On déduit de la définition les propriétés élémentaires suivantes :

Propriétés 2 - 1

1. Pour $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in E^n$, on a $N\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} N(x_i)$.
2. Pour x et y dans E, $|N(x) - N(y)| \leq N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.
3. Pour tout x dans E, on peut trouver u dans E unitaire tel que $x = N(x)u$. Un tel u est unique si x est non nul.
4. Si F est un sous-espace vectoriel de E, $N_{|F}$ est une norme sur F, ce qui en fait un espace vectoriel normé.
5. On peut associer une distance à la norme N en posant, pour x et y dans E, $d(x, y) = N(x - y)$.

Les propriétés 1 et 2 sont également appelées **Inégalité triangulaire**.

La notion de distance s'étend naturellement aux parties de E.

Définition 2 - 2

Soit x dans E et A et B des parties *non vides* de E. On définit

Distance d'un point à une partie - $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

Distance entre deux parties - $d(A, B) = \inf_{(a,b) \in A \times B} d(a, b)$.

Remarques 2 - 1

— Ces infima sont des réels positifs, mais on prendra garde au fait qu'ils ne sont pas, en général, atteints. De plus, même s'ils sont atteints, ils peuvent être atteints en plusieurs endroits.

— On a directement $d(A, B) = \inf_{a \in A} d(a, B)$ et $d(A, B) = d(B, A)$.

— On peut avoir $d(x, A) = 0$ sans pour autant avoir $x \in A$: on verra que ce n'est équivalent que pour les parties A qui sont fermées dans E.

— La notion de distance entre parties de E ne donne pas naissance à une structure d'espace métrique, i.e. ce n'est pas une distance sur $\mathscr{P}(E)$.

— Si F est un sous-espace vectoriel de E avec E préhilbertien, on a $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Dans le chapitre sur les espaces vectoriels préhilbertiens (ceux que l'on obtient par exemple en faisant $p = 2$ dans les exemples introductifs), on démontre les propriétés importantes suivantes, spécifiques à ces espaces

Danger

Les propriétés suivantes sont vraies dans les espaces vectoriels préhilbertiens mais ne le sont pas en général :

Dualité - $\forall x \in E,\ \|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} |\langle x \mid y\rangle|$;

Égalité triangulaire - $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\| = \|x\| + \|y\| \Leftrightarrow x$ et y sont positivement liés ;

Identité du parallélogramme - $\forall (x,y) \in E^2,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.

La notion de norme permet de définir les objets de base de la topologie des espaces vectoriels normés, i.e. les formes élémentaires obtenues en mesurant.

Définition 2 - 3

Soit a dans E et r un réel. On pose

— $B_a(r) = B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) < r\}$, la **boule ouverte** de centre a et de rayon r, avec $r > 0$.

— $\overline{B}_a(r) = \overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) \leq r\}$, la **boule fermée** de centre a et de rayon r, avec $r \geq 0$.

— $S_a(r) = S(a,r) = \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = \{x \in E \mid d(x,a) = r\}$, la **sphère** de centre a et de rayon r, avec $r \geq 0$.

Remarque 2 - 2

Par homogénéité, les boules et sphères de rayon r se déduisent de celles de rayon 1 par une homothétie de rapport r.

Les boules (ouvertes ou fermées) sont convexes, i.e. contiennent tout segment dont les extrémités sont dans la boule. Soit a, x et y dans E et t dans $[0;1]$, on a

$$tx + (1-t)y - a = t(x-a) + (1-t)(y-a)$$

et donc en prenant les normes et en utilisant l'inégalité triangulaire, il vient

$$\|tx + (1-t)y - a\| \leq t\,\|x-a\| + (1-t)\,\|y-a\|$$

et la propriété cherchée en découle.

Définition 2 - 4

On dit qu'une partie est **bornée** si elle est incluse dans une boule (de centre 0 ou de centre quelconque car c'est équivalent).

On définit le **diamètre** d'une partie bornée A par $\delta(A) = \sup_{(x,y) \in A^2} d(x,y)$.

Exemples 2 - 4

— Une boule ou une sphère est bornée. Son diamètre est deux fois son rayon.

— Toute partie incluse dans une partie bornée est bornée.

— D'après l'inégalité triangulaire, une union finie de parties bornées est bornée.

Les normes les plus courantes sur $\mathbf{K}^n$ sont celles qu'on a rencontrées dans l'introduction, ainsi qu'un cas limite. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on pose :

Norme 1 : $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$,

Norme 2 : $\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2}$ et

Norme infinie : $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$.

2 Applications, suites, produits

Les notions précédentes se transfèrent au niveau fonctionnel. On parle donc de fonctions bornées et de suites bornées.

Définition 2 - 5

Soit X un ensemble non vide. Une application f de X dans E est dite bornée si $f_*(X)$ l'est, i.e. si $\sup_{x \in X} \|f(x)\|$ existe. On note $\mathscr{B}(X, E)$ le sous-espace vectoriel de E^X formées des **applications bornées**.

Lorsque $X = \mathbf{N}$, on a affaire à l'espace des **suites bornées** que l'on note plus souvent $\ell^\infty(E)$.

Danger

La notation peut être trompeuse car ces espaces dépendent de la norme choisie sur E.

Proposition 2 - 1

Soit X un ensemble non vide. Alors $\mathscr{B}(X, E)$ est un espace vectoriel normé pour la **norme de la convergence uniforme** (on dit aussi norme du sup ou norme infinie) donnée par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \ .$$

Démonstration. La démonstration est directe et résulte des propriétés de la norme sur E, par passage au supremum dans les (in)égalités et puisqu'un supremum de nombres positifs n'est nul que si tous ces nombres sont nuls. □

♠

Par ailleurs $\mathscr{B}(X, \mathbf{K})$ a une structure d'algèbre normée, i.e. en sus d'être un espace vectoriel normé, c'est un anneau et la norme est sous-multiplicative :

$$\forall (f, g) \in (\mathscr{B}(X, \mathbf{K}))^2 , \quad \|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty \ .$$

On dit qu'on a affaire à une norme d'algèbre. Bien que très utile, cette notion est hors-programme.

Proposition 2 - 2

Soit $E = C^0(I, \mathbf{K})$ où I est un segment. On peut le munir des normes $\|\cdot\|_1$, dite de la convergence en moyenne, et $\|\cdot\|_2$, dite de la convergence en moyenne quadratique.

Démonstration. Ce sont des cas particuliers des exemples de l'introduction pour $p = 1$ et $p = 2$. L'axiome de séparation résulte de la continuité, puisque l'intégrale d'une fonction positive et continue n'est nulle que si la fonction est nulle. L'homogénéité est directe et l'inégalité triangulaire résulte de la même propriété pour les sommes de RIEMANN, dans le cas de $\|\cdot\|_1$, et est un cas particulier d'espace préhilbertien pour $\|\cdot\|_2$. Elle résulte donc de l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ. □

Les propriétés usuelles des suites, limites etc. se propagent sans souci aux espaces vectoriels normés.

Définition 2 - 6

Une suite u dans $E^{\mathbf{N}}$ converge vers une limite ℓ si, pour toute boule ouverte centrée en ℓ, tous les termes de la suite sont à valeurs dans cette boule sauf peut-être un nombre fini d'entre eux. Mathématiquement :

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists N \in \mathbf{N}\,, \forall n \in \mathbf{N} \quad (n \geq N \Rightarrow \|u_n - \ell\| \leq \varepsilon)\ .$$

Les inégalités peuvent bien sûr être prises strictes et on peut changer ε en $K\varepsilon$ si K est une constante *indépendante* de n et ε.

On dit alors que u est **convergente** et on écrit alors indifféremment : $u \to \ell$, $u_n \to \ell$, $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} \ell$, $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \to \ell$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, $\lim u_n = \ell$.

L'ensemble des suites convergentes (pour une norme donnée) se note $\mathcal{C}(E)$. Le sous-ensemble des suites convergeant vers 0 se note $\mathcal{C}_0(E)$. Ils dépendent de la norme choisie.

Remarques 2 - 3

— Modifier un nombre fini de termes d'une suite ne modifie ni son caractère convergent, ni sa limite.

— Une autre façon d'écrire $u \to \ell$ est

$$\forall r > 0\,, \exists N \in \mathbf{N}\,, \forall n \in \mathbf{N} \quad (n \geq N \Rightarrow u_n \in B(\ell, r))\ .$$

Ou, encore mieux, pour toute boule ouverte B contenant ℓ, $\exists N \in \mathbf{N}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $(n \geq N \Rightarrow u_n \in B)$.

— Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**. Mathématiquement la définition est

$$\forall \ell \in E\,, \exists \varepsilon > 0\,, \forall N \in \mathbf{N}\,, \exists n \in \mathbf{N} \quad (n \geq N \wedge \|u_n - \ell\| \geq \varepsilon)\ .$$

Proposition 2 - 3

On a $u_n \to \ell$ si et seulement si l'une des trois propriétés suivantes est vraies :

1. $u_n - \ell \to 0$,
2. $\|u_n - \ell\| \to 0$,
3. $\exists (\alpha_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{C}_0(\mathbf{R})$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\|u_n - \ell\| \leq \alpha_n$.

Démonstration. L'équivalence des deux premières propriétés résulte de la définition de la limite. Si l'une des deux premières propriétés est vraie, la troisième l'est avec $\alpha_n = \|u_n - \ell\|$. La réciproque résulte du théorème d'encadrement des limites et de la positivité de la norme. □

Proposition 2 - 4

Si une suite dans $E^{\mathbf{N}}$ converge, sa limite est unique. De plus une telle suite est bornée, i.e. $\mathcal{C}(E) \subset \ell^\infty(E)$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire, comme dans le cas réel. En effet, si ℓ et ℓ' sont deux points disctincts dans E, alors $\|\ell-\ell'\|\neq 0$ et, en posant $r=\frac{1}{2}\|\ell-\ell'\|$, les boules ouvertes $B(\ell,r)$ et $B(\ell',r)$ sont disjointes et ne peuvent donc contenir presque tous les termes de la suite simultanément.

Soit ℓ la limite d'une suite (u_n) et r un réel strictement positif. On dispose alors de N tel que tous les termes d'indice supérieur à N de (u_n) appartiennent à $B(\ell,r)$. Alors ces derniers sont tous de norme inférieure à $\|\ell\|+r$ par inégalité triangulaire et donc la suite est bornée par le maximum entre ce nombre et $\max_{n\leq N}\|u_n\|$. □

Remarque 2 - 4

La suite de terme général $(-1)^n$ est un exemple de suite bornée divergente. L'inclusion précédente est donc stricte.

Propriété 2 - 2

Espace vectoriel des suites convergentes

L'ensemble $\mathcal{C}(E)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, l'opérateur lim est une application linéaire sur cet espace et $\mathcal{C}_0(E)$ est le noyau de cette application linéaire.

Démonstration. Par inégalité triangulaire on a

$$\|\alpha u_n+\alpha' u'_n-\alpha\ell-\alpha'\ell'\|\leq|\alpha|\cdot\|u_n-\ell\|+|\alpha'|\cdot\|u'_n-\ell'\|\ ,$$

et il en résulte que, si $\lim u=\ell$ et $\lim u'=\ell'$, alors $\alpha u+\alpha' u'$ est convergente, de limite $\alpha\ell+\alpha'\ell'$. D'où l'assertion. □

Exemple 2 - 5

La suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}$ est une somme de Riemann et converge donc vers $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$, à savoir $\frac{1}{2}$. On en déduit que la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ converge aussi vers $\frac{1}{2}$.

En effet, il découle de la formule de Taylor-Laplace (ou de l'inégalité de Taylor-Lagrange) qu'on a $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin(x)\leq x$ pour x dans $[0,1]$ et donc la différence des deux suites est majorée par la suite de terme général $\displaystyle\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^6}$, ce qui est $1/n^2$ fois une somme de Riemann convergeant vers $\displaystyle\frac{1}{6}\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$. La différence est donc majorée par une suite équivalente à $\frac{1}{24n^2}$ et est donc convergente vers 0.

Propriétés 2 - 3

- L'application $((\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}},(u_n)_{n\in\mathbf{N}})\to(\alpha_n u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de $\mathcal{C}(\mathbf{K})\times\mathcal{C}(E)$ dans $\mathcal{C}(E)$ est une application bilinéaire compatible à lim.
- En particulier $\mathcal{C}(\mathbf{K})$ est une sous-algèbre de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ et lim est un morphisme d'algèbre (i.e. une application linéaire compatible à la multiplication).
- Le produit d'une suite bornée avec une suite convergeant vers 0 est une suite convergeant vers 0. En particulier si $E=\mathbf{K}$, $\mathcal{C}_0(\mathbf{K})$ est un idéal de $\ell^\infty(\mathbf{K})$.

Démonstration. Ces propriétés se démontrent comme pour les suites réelles, mutatis mutandis. Soit u et u' deux suites à valeurs dans E, ℓ et ℓ' deux points de E, (α_n) une suite scalaire et α et α' deux scalaires. On note n un entier naturel.

— On a $\|\alpha_n u_n - \alpha\ell\| \leq |\alpha_n - \alpha| \cdot \|u_n\| + |\alpha| \cdot \|u_n - \ell\|$ et donc, si $\lim \alpha_n = \alpha$ et $\lim u = \ell$, le terme de droite est une somme de deux termes, chacun étant le produit d'une suite réelle bornée par une suite réelle tendant vers 0. Il en résulte que c'est le terme général d'une suite tendant vers 0 et donc $\lim \alpha_n u_n = \alpha\ell$. Par linéarité de la limite par rapport à chacune des deux variables, on a bien affaire à une application bilinéaire. L'assertion suivante est le cas $E = \mathbf{K}$.

— On a $\|\alpha_n u_n\| = |\alpha_n| \cdot \|u_n\|$, de sorte que si l'une des deux suites est bornée et l'autre tend vers 0, leur produit tend vers 0.

□

Remarques 2 - 5

— Si E est préhilbertien, le produit scalaire s'étend en une forme bilinéaire symétrique sur $\mathcal{C}(E)$, commutant à lim.

— Si E est euclidien de dimension 3, le produit vectoriel s'étend en une forme bilinéaire alternée sur $\mathcal{C}(E)$, commutant à lim.

En effet on peut majorer, par inégalité de Cauchy-Schwarz ou par propriété du produit vectoriel, les quantités $|\langle u_n - \ell \mid u'_n - \ell'\rangle|$ et $\|(u_n - \ell) \wedge (u'_n - \ell')\|$ par $\|u_n - \ell\| \cdot \|u'_n - \ell'\|$.

Remarque 2 - 6

Si $\mathbf{A}$ est une algèbre normée (i.e. un $\mathbf{K}$-algèbre munie d'une norme sous-multiplicative), alors le produit des suites (terme à terme) donne naissance à une application bilinéaire commutant avec lim.

En effet on peut majorer, par sous-multiplicativité de la norme la quantité $\|u_n u'_n - \ell\ell'\|$ par $\|u_n - \ell\| \sup_k \|u'_k\| + \|\ell\| \cdot \|u'_n - \ell'\|$.

Exemple 2 - 6

L'algèbre $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ munie de la norme donnée par

$$\|A\| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \ ,$$

est une algèbre normée, i.e. on a $\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$.

Le fait que ce soit une norme provient des propriétés des espaces produits. Pour la sous-multiplicativité, on écrit

$$\sum_k |c_{ik}| \leq \sum_j \sum_k |a_{ij} b_{jk}| \leq \sum_j |a_{ij}| \cdot \|B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| \ .$$

Il en résulte que si (A_n) et (B_n) sont deux suites convergentes à valeurs dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\lim A_n B_n = \lim A_n \cdot \lim B_n$. On verra, de plus, que cette propriété ne dépend pas de la norme choisie quand E est de dimension finie, comme c'est le cas pour $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Définition 2 - 7

Soit $(E_i, N_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés. On définit sur E, avec $E = \prod_{i\in I} E_i$ une norme, dite norme infinie, par

$$\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i\,, \qquad \|(x_i)_{i\in I}\| = \sup_{i\in I} N_i(x_i)\ .$$

On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est l'**espace vectoriel normé produit** de $(E_i, N_i)_{i\in I}$.

Propriétés 2 - 4

Soit $(E_i, N_i)_{i\in I}$ une famille finie d'espaces vectoriels normés et $E = \prod_{i\in I} E_i$, muni de la norme infinie.

1. Les projections canoniques $p_i : (x_i)_{i\in I} \mapsto x_i$ sont linéaires et contractantes (i.e. lipschitziennes de rapport 1 – on dit aussi non-expansives).
2. Pour $a = (a_i)_{i\in I}$ dans E et r dans $\mathbf{R}_+$, on a $\overline{B}(a, r) = \prod\limits_{i\in I} \overline{B}(a_i, r)$ et, pour $r > 0$, $B(a, r) = \prod\limits_{i\in I} B(a_i, r)$.
3. Les parties bornées X de E sont celles dont les projections $p_i(X)$ le sont.
4. Une suite u dans $E^{\mathbf{N}}$ est convergente si et seulement si ses projections $p_i(u)$ le sont et alors $\lim(u) = \prod_{i\in I} \lim(p_i(u))$.

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition d'un maximum. □

Remarque 2 - 7

Convergence dans $(\mathbf{K}^n, \|\cdot\|_\infty)$

En notant $(e_i)_{1\leq k\leq n}$ et $(e_i^*)_{1\leq k\leq n}$ la base et les formes coordonnées canoniques sur $\mathbf{K}^n$, la dernière propriété peut s'écrire :

$(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite convergente dans $\mathbf{K}^n$ *si et seulement si* les suites $(e_i^*(x_k))_{k\in\mathbf{N}}$ sont des suites scalaires convergentes pour $1 \leq k \leq n$, et alors $\lim x_k = \sum\limits_{i=1}^{n} \lim(e_i^*(x_k))e_i$ ou encore $e_i^*(\lim x_k) = \lim(e_i^*(x_k))$.

On verra que cette propriété ne dépend en fait pas de la norme choisie.

L'étude des séries s'en déduit directement.

Définition 2 - 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans E. On appelle série de terme général u_n, que l'on note $\sum u_n$, la suite $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$, dite suite des sommes partielles de (u_n).

On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite des sommes partielles converge. On note alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_k$ sa limite, que l'on appelle somme de la série.

Dans le cas contraire, on dit que la série diverge.

Exemple 2 - 7

La série géométrique $\sum q^n$ est convergente (pour q dans $\mathbf{C}$) si et seulement si $|q| < 1$. Sa somme est alors $\dfrac{1}{1-q}$.

Aparté

Techniquement une série est en fait une suite de couples $\left(u_n, \sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbf{N}}$. Elle est entièrement déterminée par son terme général ou par ses sommes partielles. Elle converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles converge et c'est pourquoi, dans la suite, on identifie la série à la suite des sommes partielles.

Remarques 2 - 8

1. On définit de même les séries $\sum_{n\geq n_0} u_n$ et leur somme éventuelle : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.
2. Les séries $\sum u_n$ et $\sum_{n\geq n_0} u_n$ sont de même nature, i.e. si l'une converge, l'autre converge et réciproquement.
3. La question de la convergence d'une série, tout comme celle d'une suite, dépend de la norme utilisée, i.e. dépend de la topologie. Comme E est supposé de dimension finie, par équivalence des normes la nature de la série est en fait indépendante de la norme.

Propriétés 2 - 5

Espace vectoriel des séries convergentes

1. L'ensemble des séries convergentes à termes dans E est un espace vectoriel et l'application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.
2. Si $E = \mathbf{K}^n$ ou si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ relativement à une base $(e_i)_{i\in I}$ alors, en notant $(e_i^*)_{i\in I}$ les formes coordonnées associées, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum e_i^*(u_n)$ converge pour tout i dans I et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{i\in I} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e_i^*(u_n)\right) e_i$$

.

Démonstration. C'est la traduction en termes de série des mêmes propriétés pour les suites. On pose, pour α et β scalaires et $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries, $\sum(\alpha a_n + \beta b_n)$ la série dont le terme général est $\alpha a_n + \beta b_n$ et dont la suite des sommes partielles est alors $\left(\sum_{k=0}^{n}(\alpha a_k + \beta b_k)\right)_{n\in\mathbf{N}}$, i.e. $\alpha\left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{n} b_k\right)$. □

La théorie de l'intégration sur un segment résulte du théorème de Heine, via les sommes de Darboux, celles de Riemann ou encore l'approximation par fonctions en escalier. Pour l'étendre de $\mathbf{R}$ à un espace vectoriel de dimension finie on peut refaire cette construction, mais il est équivalent de la définir coordonnées par coordonnées, ce qui est le choix du programme.

Définition 2 - 9

Intégration sur un segment, à valeurs dans un EVN de dimension finie

Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E, et $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ une base de E. On note $(e_i^*)_{1\leq i\leq p}$ les formes coordonnées relativement à cette base et on pose

$$\int_I f = \sum_{i=1}^{p} \left(\int_I (e_i^* \circ f)\right) e_i \ .$$

On admet que cette définition est indépendante du choix de la base $(e_i)_{1\leq i\leq p}$.

Propriété 2 - 6

Soit I un segment. L'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ est une application linéaire sur $C^0_{mcx}(I, E)$.

Démonstration. Puisque les formes coordonnées sont contractantes, les composées $e_i^* \circ f$ sont continues par morceaux et, de plus $f \mapsto e_i^* \circ f$ est linéaire. Par composition $f \mapsto \displaystyle\int_I (e_i^* \circ f)$ est également linéaire et l'assertion s'ensuit. □

Remarque 2 - 9

Relation de Chasles

Puisque cette propriété est vraie sur les coordonnées, si f appartient à $C^0_{mcx}([a;b], E)$ et c à $]a;b[$, alors on a

$$\int_{[a;b]} f = \int_{[a;c]} f + \int_{[c;b]} f \ .$$

Michel Chasles, 1793–1880, portait le prénom de Floréal à sa naissance.

Notation

Si $I = [a;b]$, on écrit indifféremment $\displaystyle\int_I f$, $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Si $a > b$, on pose $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

On étudie maintenant les intégrales impropres, i.e. définies sur un intervalle qui n'est pas un segment. Le programme se restreint au cas des fonctions à valeurs réelles ou complexes. On n'a pas défini de norme sur une espace vectoriel complexe mais ce n'est pas gênant puisqu'on dispose du module sur $\mathbf{C}$. Comme on a besoin de la linéarité sur $\mathbf{C}$, on prendra garde à ne pas hâtivement considérer $\mathbf{C}$ comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On a vu précédemment que l'étude des intégrales peut se ramener, coordonnées par coordonnées, au cas de la dimension 1 et donc tout ce qui suit pourrait s'énoncer dans un espace de dimension plus grande sans beaucoup de difficulté.

Il semble naturel d'imiter la méthode de calcul par intervalles exhaustifs, i.e.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1 \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha} = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{\alpha - 1}$$

si $\alpha > 1$. De plus, contrairement à ce qui se passe dans le cas des fonctions positives, repartir de la définition poserait un problème : les limites ne sont pas des bornes supérieures. De plus on ne peut plus approcher uniformément par une fonction en escalier, les intégrandes ne sont plus nécessairement bornés, ni les intervalles d'intégration !

Définition 2 - 10

Intégration sur un intervalle quelconque

Soit I un intervalle réel ; une fonction f de I dans $\mathbf{K}$ est dite localement intégrable sur I si f est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Si b est une des bornes de I (finie ou infinie), on dit que l'intégrale de f converge au voisinage de b (sur I) s'il existe c dans I tel que la limite $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x\in I}} \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe.

Si f est **localement intégrable** sur I et que son intégrale converge au voisinage de **chacune des deux bornes** de I, on dit que l'intégrale généralisée (ou impropre) $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (ou qu'elle est semi-convergente).

Remarques 2 - 10

Si I contient une de ses bornes, on peut prendre c égal à celle-ci et l'intégrabilité au voisinage de cette borne est automatique. En particulier sur les segments la notion est identique à celle déjà développée.

Si f est à valeurs positives, l'existence des limites est équivalente au caractère borné et par relation de Chasles revient à la notion déjà développée dans ce cadre.

Aparté

L'usage est de noter $L^1_{loc}(I,\mathbf{K})$ l'ensemble des fonctions localement intégrables sur I et à valeurs réelles, mais ce n'est pas une notation au programme.

Plus généralement une intégrale généralisée peut être définie pour toute fonction pour laquelle I peut se découper en un nombre fini d'intervalles disjoints sur lesquels l'intégrale impropre est définie au sens précédent : par exemple $\int_{\mathbf{R}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x|}}$.

Par passage à la limite ou relation de Chasles, les propriétés fondamentales sont préservées.

Propriété 2 - 7

Linéarité

Soit I un intervalle réel, f et g dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{K})$ et α et β des scalaires. Si $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, il en va de même pour $\displaystyle\int_I (\alpha f+\beta g)$ et on a

$$\int_I (\alpha f+\beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha\int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \beta\int_I g(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Propriété 2 - 8

Positivité

Soit I un intervalle réel et f dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{R}_+)$. Si l'intégrale sur I converge, cette dernière est positive, de sorte que la forme linéaire $f\mapsto \displaystyle\int_I f$ est positive.

Propriété 2 - 9

Croissance

Soit I un intervalle réel, f et g dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{R})$ telles que $f\leq g$. Si **les deux** intégrales $\displaystyle\int_I f$ et $\displaystyle\int_I g$ convergent, alors on a $\displaystyle\int_I f \leq \int_I g$.

Propriété 2 - 10

Dérivation

Soit I un intervalle réel et f **continue** sur I, telle que $\int_I f$ converge. Soit b une borne de I, alors $x \mapsto \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dérivable sur I, de dérivée $-f$.

3 Topologie des EVN

La topologie s'intéresse aux notions de convergence et plus généralement à la description des ouverts et des fermés.

Définition 2 - 11

Topologie

Soit a dans E et A une partie de E. On dit que

— A est un **voisinage** de a s'il contient une boule ouverte centrée en a. On dit alors que a est **intérieur** à A.

— a est **adhérent** à A si toute boule ouverte centrée en a rencontre A, i.e. s'il est limite de points de A.

— A est **ouvert** s'il est voisinage de tous ses points.

— A est **fermé** si son complémentaire est ouvert.

Exemples 2 - 8

Les parties $\emptyset$ et E sont à la fois ouvertes et fermées.

Dans la suite A est une partie de E et a un point de E.

Remarque 2 - 11

Si a est dans E et r est un réel strictement positif. Pour x dans $B(a, r)$ et y dans E on a, par inégalité triangulaire, $d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y)$, de sorte que $B(x, r - d(a, x))$ est incluse dans $B(a, r)$. En particulier les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.

Par conséquent a est intérieur à A si et seulement si A contient une boule fermée centrée en a et de rayon non nul, ou encore si et seulement si A contient une boule ouverte contenant a, car dans les deux cas on peut exhiber une boule ouverte centrée en a incluse dans la boule considérée.

Si a est adhérent à A, en considérant les boules $B(a, 2^{-n})$, on constate qu'on peut construire une suite (a_n) de points de A vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}$, $d(a, a_n) \leq 2^{-n}$ et, en particulier $\lim a_n = a$. Réciproquement, par définition d'une limite, si a est limite de points de A, alors a est adhérent à A. Plus généralement on en déduit

Proposition 2 - 5

Caractérisation séquentielle des fermés

Un point a est adhérent à A si et seulement s'il est limite d'une suite de points de A.

Une partie A est fermée si et seulement si toute suite **convergente** de points de A converge vers un point de A.

Danger

On ne saurait trop insister sur la nécessité de considérer des suites convergentes a priori, et non pas des suites de points de A arbitraires.

Démonstration. Le premier point a déjà été évoqué. Pour le second, considérons une partie fermée A et une suite (a_n) convergeant vers un point a. Si a n'appartient pas à A, il appartient à son complémentaire, qui est ouvert. On dispose donc de r strictement positif tel que $B(a,r)$ ne rencontre pas A et en particulier ne contient aucun point de (a_n). Ceci contredit la définition de limite et on en conclut $a \in A$.

Réciproquement soit a un point du complémentaire de A. Si pour tout entier n on peut trouver un point de A dans $B(a, 2^{-n})$, alors on peut construire une suite de points de A convergeant vers a et ceci contredit $a \notin A$. Donc on dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que la boule $B(a, 2^{-n})$ soit totalement incluse dans le complémentaire de A qui, de ce fait, est un ouvert. $\square$

Proposition 2 - 6

Une réunion quelconque d'ouverts est ouverte, de même qu'une intersection finie d'ouverts.

Une intersection quelconque de fermés est fermée, de même qu'une réunion finie de fermés.

Démonstration. Les propriétés des fermés se déduisent de celles des ouverts par passage au complémentaire en utilisant les lois de de Morgan. Le cas de la réunion est direct puisqu'une boule incluse dans un ensemble est aussi incluse dans une réunion contenant cet ensemble.

Pour l'intersection, une intersection finie de boules centrées en a est une boule centrée en a et de rayon le plus petit des rayons. C'est pour que ce minimum existe (et soit strictement positif) qu'on a besoin de la finitude. $\square$

Définition 2 - 12

Soit A une partie de E. On appelle **intérieur** (respectivement **adhérence**) de A, et on le note $\mathring{A}$ (respectivement $\overline{A}$), l'ensemble des points de E intérieurs à A (respectivement adhérents à A).

On appelle **frontière** de A, l'ensemble $\mathrm{Fr}(A)$ donné par $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$.

Proposition 2 - 7

L'intérieur d'une partie A est la réunion des boules ouvertes incluses dans A, ou encore la réunion des ouverts inclus dans A, ou enfin le plus grand ouvert inclus dans A. En particulier : A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$, et on a $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.

L'adhérence de A est l'intersection des fermés contenant A, ou encore le petit fermé contenant A. En particulier A est fermé si et seulement si $\overline{A} = A$, et on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Démonstration. Soit B une boule ouverte incluse dans A, tous ses éléments sont donc dans $\mathring{A}$ d'après la remarque 2 - 11. Réciproquement tout point intérieur appartient à une telle boule ouverte et donc à leur réunion.

La réunion des ouverts inclus dans A contient la réunion des boules ouvertes incluses dans A et donc $\mathring{A}$. Elle lui est donc égale.

Comme les ouverts sont stables par réunion quelconque, la dernière propriété de l'intérieur résulte de ce qui précède.

Les propriétés des fermés en résultent par passage au complémentaire $\square$

Danger

En général $\overline{\mathring{A}} \neq \mathring{\overline{A}}$.

On définit naturellement une topologie sur les parties de E en prenant la « trace » de celle sur E.

Définition 2 - 13

Soit A une partie de E et a dans A. Soit enfin une partie B de A.

On dit que B est un **voisinage de a dans A** s'il peut s'écrire $B = V \cap A$, avec V un voisinage de a dans E.

On dit que B est **ouvert relativement à (ou dans)** A s'il existe un ouvert U de E tel que $B = A \cap U$. De même on dit qu'il est **fermé dans (ou relativement à)** A s'il existe un fermé F de E tel que $B = A \cap F$.

Pour aller plus loin

On dit qu'un point a de A est isolé si a n'est limite que de suites stationnaires de points de A, i.e. n'est pas limite de suites de points de A distincts de a : $a \in A$ et $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$ ou encore si $\{a\}$ est ouvert dans A.

On dit au contraire que c'est un point d'accumulation – ou point limite – de A (qu'il soit ou non dans A) s'il appartient à $\overline{A \setminus \{a\}}$.

Un ensemble est dit parfait s'il est fermé et sans point isolé.

Exemple 2 - 9

L'intervalle $[0; 1[$ est ouvert dans $\mathbf{R}_+$.

Définition 2 - 14

On dit qu'une partie B de A est **dense** dans A si $A \subset \overline{B}$, i.e. si son adhérence relativement à A est égale à A. Une partie dense, sans précision, est une partie dense dans E.

Avec tout ce vocabulaire, on peut étudier les suites de façon plus abstraite.

Proposition 2 - 8

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de $E^{\mathbf{N}}$ converge vers une limite ℓ si et seulement si : pour tout voisinage V de ℓ, il existe un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbf{N}$ tel que, pour n dans ce voisinage, on ait $u_n \in V$.

Ici un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbf{N}$ est un ensemble de la forme $[\![n_0; +\infty]\!]$.

Démonstration. En effet le sens réciproque est immédiat puisqu'une boule ouverte centrée en ℓ est un voisinage de ℓ.

Pour le sens direct, soit V un voisinage de ℓ. On dispose donc d'un réel strictement positif r tel que la boule $B(\ell, r)$ soit incluse dans V. Cette dernière contenant presque tous les termes de la suite, il en va de même pour V par inclusion. □

4 Compacité

Définition 2 - 15

On appelle **suite extraite** de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ avec φ strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même.

Cette notion est identique à celle de suite extraite dans le cas réel ou complexe. Bien sûr, dans le cas des espaces vectoriels normés généraux, on ne dispose pas des notions liées à l'ordre, i.e. les notions de suite monotone, de suites adjacentes, d'encadrement de suite (et donc du théorème d'encadrement des limites), du passage à la limite dans les inégalités larges, ni de la « convergence » dans $\overline{\mathbf{R}}$. On va donc s'attacher à définir les notions relatives aux suites à partir de la topologie, comme on l'a fait pour la limite.

Définition 2 - 16

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $E^{\mathbf{N}}$ et a dans E. On dit que a est une **valeur d'adhérence** de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si a est limite d'une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

Autrement dit, pour tout voisinage de a, l'image réciproque de ce voisinage par la suite (i.e. les indices n tels que u_n appartient à ce voisinage) est infini ou encore tout voisinage de a contient une infinité de termes de la suites.

Proposition 2 - 9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $E^{\mathbf{N}}$ et a dans E.

1. Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, alors elle admet comme unique valeur d'adhérence sa limite et toute suite extraite converge vers cette limite.
2. Un point a est valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si, soit il existe une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ stationnaire égale à a, soit il existe une suite extraite v de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $\|v_n - a\|$ décroissant strictement vers 0.

Démonstration.

— Supposons $\ell = \lim u$ et considérons a dans E distinct de ℓ. Soit alors $r = \dfrac{1}{2}d(a,\ell)$, de sorte que les boules ouvertes $B(\ell, r)$ et $B(a, r)$ sont disjointes. Comme la première contient presque tous les termes de la suite u, la seconde ne peut en contenir qu'un nombre fini et donc a ne saurait être valeur d'adhérence de u.

— Si la suite u prend une infinité de fois la valeur a, alors on peut en extraire une suite stationnaire (et même constante) égale à a. Sinon on définit v_0 comme égal à u_n avec $n = \min\{p \in \mathbf{N} \mid \forall q \geq p\ u_q \neq a\}$, ce qui est licite car cet ensemble est non vide. Ensuite on définit v par récurrence : pour p dans $\mathbf{N}$, la boule ouverte de centre a et de rayon $\min(d(a, v_p), 2^{-p})$ contient un terme de la suite et on en choisit un que l'on nomme v_{p+1}. Par construction $(d(a, v_p))$ est strictement décroissante et est majorée par (2^{-p}) à partir du rang 1 au moins. Il en résulte $\lim v = a$ et l'assertion s'ensuit.

□

Théorème 2 - 1

Bolzano-Weierstrass

Soit $E = (\mathbf{R}^p, \|\cdot\|_\infty)$. Toute suite bornée à valeurs dans E admet une valeur d'adhérence.

Démonstration. On note $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $E^{\mathbf{N}}$. Le cas de la dimension nulle est direct puisqu'alors toute suite est constante donc convergente. On suppose donc dans la suite qu'on a $1 \leq p < +\infty$ et on commence par rappeler une démonstration dans le cas $p = 1$.

Soit $X = \{a \in \mathbf{R} \mid \exists n \in \mathbf{N}, \forall k \geq n, u_k \leq a\}$, i.e. X est l'ensemble des réels majorant tous les termes de la suite à l'exception peut-être d'un nombre fini d'entre eux. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée, X est minoré par $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ et est non vide puisqu'il contient $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$. Soit donc $\alpha = \inf(X)$, alors α est une valeur d'adhérence de la suite (et c'est même la plus grande). En effet, soit ε un réel strictement positif. Puisque $\alpha+\varepsilon > \alpha$, ce n'est pas un minorant de X et on peut donc trouver a dans $[\alpha;\alpha+\varepsilon\,]\cap X$ et donc n dans $\mathbf{N}$ tel que, pour $k \geq n$, $u_k \leq a \leq \alpha+\varepsilon$. De plus comme $\alpha-\varepsilon$ n'est pas dans X, il y a une infinité de termes de la suite plus grands que $\alpha-\varepsilon$ et donc aussi une infinité de termes dans $[\,\alpha-\varepsilon;\alpha+\varepsilon\,]$, ce qui montre que α est une valeur d'adhérence.

Remarquons que pour $\beta > \alpha$, β n'est pas une valeur d'adhérence car sinon il y aurait une infinité de termes de la suite dans l'intervalle centré en β et de longueur $\beta-\alpha$, i.e. dans $]\alpha;2\beta-\alpha[$, et ils seraient donc tous strictement plus grands que α. Ceci contredirait la définition de α.

On démontre ensuite la propriété par récurrence sur l'entier naturel p. On introduit $(u_n^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ la suite définie par $u_n^{(i)} = e_i^*(u_n)$, pour $1 \leq i \leq p$, où $(e_i^*)_{1\leq i\leq n}$ sont les formes coordonnées canoniques sur $\mathbf{R}^p$. Ces suites sont bornées par hypothèse sur u et par définition de la norme produit.

D'après ce qui précède $u^{(1)}$ admet une valeur d'adhérence, i.e. il existe φ_1 de $\mathbf{N}$ dans lui-même strictement croissante telle que $(u_{\varphi_1(n)}^{(1)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge dans $\mathbf{R}$. On introduit alors la suite de $\mathbf{R}^{p-1}$ dont les composantes sont $(u_{\varphi_1(n)}^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ pour $2 \leq i \leq p$. Encore par définition de la norme produit, cette suite est bornée. Si on suppose la propriété de Bolzano-Weierstrass vraie en dimension $p-1$, elle admet donc une valeur d'adhérence et on peut trouver φ_2 de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, strictement croissante telle que, en posant $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$, les suites $(u_{\varphi(n)}^{(i)})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent toutes pour $2 \leq i \leq p$. Comme on a également la convergence pour $i = 1$ puisque toute suite extraite d'une suite convergente l'est aussi, il en résulte, par définition de la topologie produit que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge et qu'on a

$$\lim u_{\varphi(n)} = \sum_{i=1}^{p} \left(\lim u^{(i)}\right) e_i \ .$$

La fonction φ étant strictement croissante en tant que composée de telles fonctions, la propriété de Bolzano-Weierstrass en découle dans ce cas.

L'assertion en découle en vertu du principe de récurrence. □

Remarque 2 - 12

On verra, sans utiliser la propriété de Bolzano-Weierstrass (Bernhard Bolzano, 1781–1848, et Karl Weierstrass, 1815–1897) dans un autre cadre que celui de la topologie produit, que toutes les topologies d'espace vectoriel normé sur un espace E de dimension finie sont équivalentes et donc que la suite extraite que l'on vient d'exhiber converge pour toute norme de $\mathbf{R}^p$, et aussi que la propriété est vraie sur un espace vectoriel normé E de dimension finie quelconque.

Exercice

Trouver un contre-exemple à cette propriété dans le cas de la dimension infinie.

Définition 2 - 17

On dit qu'une partie X d'un espace vectoriel normé E est compacte si toute suite à valeurs dans X admet au moins une valeur d'adhérence dans X.

♠

La compacité est une propriété intrinsèque et on peut la définir sans faire référence à un ensemble plus gros dans sa définition, i.e. juste en utilisant sa propre topologie, grâce à la propriété de Borel-Lebesgue (Émile Borel, 1871–1956, et Henri Lebesgue, 1875–1941). Elle est, ici, équivalente à la définition du programme.

Les compacts sont des objets essentiels en topologie, presque plus importants que les ouverts ou les fermés ! Ils sont la généralisation des parties finies. On peut se dire que toute propriété qui est vraie pour les ensembles finis le sera pour les compacts. En voici quelques une immédiates :

Proposition 2 - 10

1. Si K est une partie compacte de E, elle est fermée et bornée.
2. Si $X \subset K$ avec K compact, alors X est compact si et seulement si X est fermé (dans K et donc dans E).
3. Si F est fermé et K compact, $F \cap K$ est compact.
4. Si $(K_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille finie de compacts, $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} K_i$ est compact dans l'espace vectoriel produit.

Démonstration.

1. Si K n'est pas borné, on peut construire une suite dont la norme tend vers l'infini. Une telle suite ne peut avoir de valeurs d'adhérences. Par contraposée, un compact est donc borné.

   Soit x une suite convergente de points K. Elle admet donc une unique valeur d'adhérence. Par compacité de K, elle admet une valeur d'adhérence dans K et donc $\lim u \in K$. Il en résulte que K est fermé.
2. Si X est fermé dans K, il s'écrit comme intersection d'un fermé de E avec K et il est donc fermé dans E car K est fermé, et réciproquement si X est fermé dans E, il est fermé dans K. Pour une partie de K, être fermé dans K ou dans E sont donc deux notions identiques.

   De plus si X est fermé dans E et si x est une suite de points de X, alors, puisque X est inclus dans K, x est une suite de points de K et admet une valeur d'adhérence dans K. Soit y une suite extraite de x convergeant dans K. Puisque X est fermé, la limite de y est dans X et donc x admet une valeur d'adhérence dans X. Il en résulte que X est compact.

   Réciproquement si X est compact, il est fermé dans E, donc dans K.
3. Comme F est fermé, $F \cap K$ est fermé dans K. D'après ce qui précède, il est compact.
4. Soit $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ une suite de points à valeurs dans $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} K_i$. On écrit $x_k = \left(x_k^{(i)}\right)_{i \in I}$ et on définit φ_i strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même par récurrence comme suit.

   Puisque K_1 est compact, on dispose de φ_1 telle que $x^{(1)}_{\varphi_1(k)}$ soit convergente. Supposons $(\varphi_j)_{1 \leq j \leq i}$ construites de sorte que $x^{(j)}_{\varphi_i(k)}$ soit convergente pour $1 \leq j \leq i$, avec $1 \leq i \leq n-1$. Alors, par compacité de K_{i+1}, on peut extraire une sous-suite convergente de $x^{(i+1)}_{\varphi_i(k)}$. On dispose donc de f strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même telle que $x^{(i+1)}_{\varphi_i(k) \circ f}$ soit convergente. On pose alors $\varphi_{i+1} = \varphi_i \circ f$. En tant que suites extraites de suites convergentes les suites $x^{(j)}_{\varphi_{i+1}(k)}$, $1 \leq j \leq i$ sont alors convergentes. Par construction la suite $x_{\varphi_n(k)}$ est convergente, i.e. x admet une valeur d'adhérence dans $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} K_i$, qui est par conséquent compact.

□

Exemple 2 - 10

Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, une boule pour la norme infinie est compacte.

En effet une telle boule est un produit de segments.

Pour aller plus loin

Le théorème de Tychonov (Andreï Nikolaïevitch Tychonov, 1906-1933), vraiment hors-programme, assure qu'en fait tout produit de compacts est compact, qu'il soit fini, dénombrable ou quelconque. Il utilise l'axiome du choix et fait usage de la notion de filtre et surtout d'ultra-filtre, qui sont des notions permettant de généraliser celle de suite.

Théorème 2 - 2

Heine-Borel

Soit E de dimension finie et A une partie de E. Alors A est compact pour $\|\cdot\|_\infty$ si et seulement si A est fermé et borné.

Démonstration. Le sens direct a déjà été vu. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans un fermé borné A. Puisque A est borné, cette suite est bornée et admet donc une sous-suite convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass. Puisque A est fermé, cette sous-suite converge dans A et il en résulte que A est compact. $\square$

On a vu que toute suite convergente admet une unique valeur d'adhérence. Une réciproque partielle, utilisant la compacité, existe et est très utile. En effet, en vertu du théorème de Bolzano-Weierstrass, toute suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence est convergente.

Théorème 2 - 3

Réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass

Une suite à valeurs dans un compact K converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Démonstration. Pour le voir, considérons α l'unique valeur d'adhérence de la suite u ainsi que ε un réel strictement positif. S'il y avait une infinité de termes de la suite en dehors de la boule $B(\alpha,\varepsilon)$, on en déduirait une suite extraite de u prenant ses valeurs en dehors de $B(\alpha,\varepsilon)$, i.e. dans $K\cap(E\setminus B(\alpha,\varepsilon))$. Or ce dernier ensemble est l'intersection d'un compact avec le complémentaire d'un ouvert et est donc compact. La suite extraite que l'on vient de construire admettrait donc une valeur d'adhérence dans ce compact, en particulier distincte de α, et cela fournirait une seconde valeur d'adhérence pour u. $\square$

Exemple 2 - 11

Compacité locale

En particulier, dans $\mathbf{R}^n$, toute suite bornée n'ayant qu'une seule valeur d'adhérence est convergente, et converge vers cette valeur d'adhérence.

5 Normes

Définition 2 - 18

Soit N_1 et N_2 sont deux normes sur E.

On dit que N_1 est dominée par N_2 (ou encore que N_2 est plus fine que N_1, voire que la topologie induite par N_2 est plus fine que celle induite par N_1), et on note $N_1 \prec N_2$, si $\exists a \in \mathbf{R}_+^*$, $N_1 \leq aN_2$.

On dit qu'elles sont équivalentes, et on note $N_1 \sim N_2$ si $N_1 \prec N_2$ et $N_2 \prec N_1$, i.e. si $\exists (a,b) \in (\mathbf{R}_+^*)^2$, $aN_1 \leq N_2 \leq bN_1$.

Remarque 2 - 13

La relation $\prec$ est un pré-ordre (réflexivité et transitivité). La relation $\sim$ est sa relation d'équivalence associée : le pré-ordre $\prec$ induit un ordre sur les classes d'équivalences pour $\sim$.

Propriété 2 - 11

Il résulte de la définition que si $N_1 \prec N_2$, alors toute boule pour N_1 contient une boule pour N_2. En effet $B_{N_1}(x_0, ar) \supset B_{N_2}(x_0, r)$ car $N_1(x_0 - x) \leq aN_2(x_0 - x)$.

Aparté

Soit alors U un ouvert de E lorsqu'il est muni de N_1 et a dans U. On peut trouver une boule pour N_1 centrée en a et incluse dans U. Si $N_1 \prec N_2$, il en est alors de même pour N_2 et donc tout ouvert pour la topologie induite par la norme N_1 est ouvert pour la topologie induite par la norme N_2. Cette dernière a donc plus d'ouverts que la première et c'est pourquoi elle est plus fine : plus il y a d'ouverts, plus on peut séparer les points.

Proposition 2 - 11

Soit N_1 et N_2 deux normes sur E avec $N_1 \prec N_2$. Toute suite convergente au sens de N_2 converge pour N_1 et ce vers la même limite.

La réciproque est également vraie et il suffit de la supposer pour les suites tendant vers 0.

Démonstration. Le sens direct résulte de la définition : si $N_2(x_n - x) \leq \varepsilon$, alors $N_1(x_n - x) \leq a\varepsilon$.

Si l'assertion $N_1 \prec N_2$ est fausse, on dispose de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $E^{\mathbf{N}}$ telle que $2^n N_2(x_n) < N_1(x_n)$, et en particulier cette suite ne s'annule pas. On pose alors $y_n = 2^{-n/2} N_2(x_n)^{-1} x_n$ de sorte qu'on a $N_2(y_n) = 2^{-n/2}$ et donc $\lim y_n = 0$ au sens de N_2. Mais, d'un autre côté, on a $N_1(y_n) \geq 2^{n/2}$ et donc (y_n) est divergente au sens de N_1.

Le fait de pouvoir se ramener en 0 résulte des propriétés de linéarité. □

Remarque 2 - 14

Deux normes sont donc équivalentes si et seulement si leurs ouverts, leurs fermés, leurs suites convergentes, leurs limites de suites ou encore leurs valeurs d'adhérence de suites sont les mêmes.

De plus, dans ce cas, leurs parties bornées, leurs applications bornées, lipschitziennes ou continues etc. sont les mêmes.

Proposition 2 - 12

Si $N_1 \sim N_2$, alors la propriété de BOLZANO-WEIERSTRASS (i.e. de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente) est vraie pour N_1 si et seulement si elle l'est pour N_2.

On admet temporairement le résultat crucial suivant.

Théorème 2 - 4

Équivalence des normes
Si E est de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

On déduit de ce théorème qu'en dimension finie on dipose de plein d'outils.

Théorème 2 - 5

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie.

Théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS : toute suite bornée admet une sous-suite convergente. De plus une suite bornée n'admettant qu'une seule valeur d'adhérence est convergente.

Théorème de HEINE-BOREL : une partie de E est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Un produit fini de compacts est compact.

Les espaces $\mathcal{B}(X, E)$, $\ell^\infty(E)$, $\mathcal{C}(E)$, $\mathcal{C}_0(E)$ ne dépendent pas de la norme, de même que les limites, les valeurs d'adhérence, les ouverts, les fermés, les compacts, l'intérieur, l'adhérence, la frontière.

Une suite dans $E^{\mathbf{N}}$ est convergente si et seulement si ses coordonnées dans une base quelconque le sont.

6 Compléments

6 1 Complétude

Si une suite est convergente, son taux d'accroissement tend vers 0, i.e. si u est convergente, Δu tend vers 0 où, comme d'habitude, Δ est l'opérateur des différences (de NEWTON), défini par $\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$. La réciproque est fausse, mais on peut trouver une propriété plus contraignante qui est équivalente à la convergence de la suite. Il s'agit du critère de CAUCHY, énoncé avant lui par José Anastácio DA CUNHA (1744-1787). Il semblerait même qu'un de ses manuscrits ait été en possession de CAUCHY qui s'est tout simplement approprié la paternité de la définition sans jamais citer DA CUNHA.

Définition 2 - 19

Suites de CAUCHY
Soit u une suite dans $E^{\mathbf{N}}$. On dit que c'est une suite de CAUCHY (ou simplement qu'elle est de CAUCHY) si elle vérifie la propriété

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \forall (n,p) \in \mathbf{N}^2 \quad n \geq n_0 \Rightarrow \|u_{n+p} - u_n\| \leq \varepsilon\,.$$

Danger

Cette notion dépend a priori de la norme choisie, mais en dimension finie elle n'en dépend en fait pas, par équivalence des normes.

Remarque 2 - 15

On peut reformuler la définition de suite de Cauchy : u est de Cauchy si et seulement s'il existe α dans $\mathcal{C}_0(\mathbf{R})$ tel que, pour tout entier naturel p,

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \|u_{n+p} - u_n\| \leq \alpha_n .$$

Il suffit par exemple de prendre $\alpha_n = \sup_{p \in \mathbf{N}} \|u_{n+p} - u_n\|$.

On déduit directement de cette définition trois propriétés :

Propriétés 2 - 12

1. Toute suite convergente est de Cauchy.
2. Toute suite de Cauchy est bornée.
3. Toute suite de Cauchy admet au plus une valeur d'adhérence.

Démonstration.

1. Soit $\ell = \lim u_n$, alors pour tout ε, il existe un rang à partir duquel la suite est à valeurs dans $B(\ell, \varepsilon/2)$. Comme cette boule est de diamètre ε, tous ces termes sont distants deux à deux d'au plus ε.
2. À partir d'un certain rang, u est à valeurs dans une boule (disons de centre u_n et de rayon 1, pour un n fixé dépendant de la suite) donc u est bornée à partir d'un certain rang. Elle est donc bornée.
3. Soit ℓ et ℓ' deux valeurs d'adhérence de u, avec $\ell \neq \ell'$. Soit $\varepsilon = \|\ell - \ell'\|/3$. Il existe une infinité de termes de u dans $B(\ell, \varepsilon)$ et aussi dans $B(\ell', \varepsilon)$. Or deux éléments de ceux des deux boules sont distants de plus de ε puisque, d'après l'inégalité triangulaire, pour x et y dans E,

$$\|x - y\| \geq \|\ell - \ell'\| - \|\ell - x\| - \|y - \ell'\| .$$

Ceci contredit la définition de suite de Cauchy.

□

Réciproquement les suites de Cauchy ne sont pas nécessairement convergentes. Cette notion sert à « compléter » les trous éventuels :

Exemple 2 - 12

1. La suite définie par $u_n = (1 + 1/n)^n$ est une suite de rationnels. Elle est de Cauchy puisqu'elle converge en tant que suite de nombres réels. Mais sa limite, e, n'est pas rationnelle et donc elle ne converge pas en tant que suite dans $\mathbf{Q}^{\mathbf{N}}$.
2. D'une façon générale l'utilisation des nombres réels est rapidement nécessaire quand on étudie des suites, fussent-elles de nombres rationnels.

Mais ce n'est pas le seul problème qui peut apparaître : il faut parfois changer de point de vue.

Exemple 2 - 13

Dans $\mathbf{R}[X]$, la suite donnée par $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$ est de CAUCHY pour la norme infinie puisque $\|P_n - P_m\|_\infty \leqslant \frac{1}{\min(n!, m!)}$. Néanmoins elle ne converge pas et il faut passer aux séries formelles ou bien aux séries entières pour donner un sens à sa limite, à savoir $\exp(X)$. On peut aussi, plus prosaïquement, considérer les fonctions polynomiales associées et voir la limite comme une fonction. Mais il reste un problème : qu'est-ce donc que la norme infinie sur les coefficients polynomiaux dans le cas d'une fonction générale ?

Définition 2 - 20

On dit qu'un espace est complet si toute suite de CAUCHY à valeurs dans cet espace est convergente. Ceci nécessite donc que les limites de ces suites soient dans l'espace considéré.

Un espace vectoriel normé complet est appelé espace de BANACH.

Un espace préhilbertien complet est appelé espace de HILBERT.

Stefan BANACH, 1892–1945, et David HILBERT, 1862–1943.

Théorème 2 - 6

Tout espace vectoriel normé de dimension finie est de BANACH.

Démonstration. En effet, soit u une suite de CAUCHY dans $E^{\mathbf{N}}$, avec $\dim(E) < +\infty$. Puisqu'elle est de CAUCHY, elle est bornée. D'après le théorème de BOLZANO-WEIERSTRASS, elle admet donc une valeur d'adhérence. Comme elle en admet au plus une, il en résulte qu'elle converge. □

Exemple 2 - 14

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $E^{\mathbf{N}}$, E espace de BANACH, et $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ dans $(\mathbf{R}_+)^{\mathbf{N}}$ de telle sorte que les boules $\overline{B}(a_n, r_n)$ soient emboitées, i.e. $\overline{B}(a_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B}(a_n, r_n)$. Alors les suites $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ convergent et, en notant $\lim a_n = a$ et $\lim r_n = r$, alors l'intersection $\cap_{n\in\mathbf{N}}\overline{B}(a_n, r_n)$ est $\overline{B}(a, r)$.

En effet la suite des rayons est décroissante puisque le rayon d'une boule est relié au diamètre et que le diamètre est une fonction décroissante au sens de l'inclusion : le diamètre d'une boule incluse dans une autre est inférieur au diamètre de cette boule. Il en résulte qu'on peut trouver r dans $\mathbf{R}_+$ avec $\lim r_n = r$ et que la suite $(r_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de CAUCHY.

Le fait que les boules soient incluses l'une dans l'autre implique en particulier $\|a_{n+p} - a_n\| + r_{n+p} \leqslant r_n$ en considérant le point $a_{n+p} + r_{n+p}u$ avec u tel que $a_{n+p} - a_n = \|a_{n+p} - a_n\|\, u$. Il en résulte $\|a_{n+p} - a_n\| \leqslant r_n - r_{n+p}$ et donc $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est également de CAUCHY. Puisque E est de BANACH, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge. Soit a sa limite. En passant à la limite en p dans l'inégalité $\|a_{n+p} - a_n\| \leqslant r_n - r_{n+p}$, il vient $\|a - a_n\| \leqslant r_n - r$.

Il en résulte que $\overline{B}(a, r)$ est inclus dans tous les $\overline{B}(a_n, r_n)$, et donc dans leur intersection. Réciproquement si $\|x - a_n\| \leqslant r_n$ pour tout n, alors en passant à la limite il vient $\|x - a\| \leqslant r$ et donc $\cap_{n\in\mathbf{N}}\overline{B}(a_n, r_n) = \overline{B}(a, r)$.

Remarque 2 - 16

Cet exemple est une généralisation de la propriété des segments emboités, bien qu'elle n'utilise pas la compacité des boules fermées (fausse en dimension infinie).

Pour la continuité, la dimension de l'espace de départ est importante. Pour la complétude, c'est l'espace d'arrivée qui compte.

Théorème 2 - 7

Si F est un espace de BANACH, alors $\mathscr{L}_c(E,F)$ est complet, i.e. est un espace de BANACH.

6 2 Compacité

Proposition 2 - 13

Nombres de LEBESGUE

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E recouvrant le compact K. Alors il existe un rayon r dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que toute boule ouverte centrée en un point de K et de rayon r soit incluse dans l'un des V_i.

Démonstration. Par l'aburde. Sinon on pourrait construire $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite à valeurs dans K telle que, pour tout n dans $\mathbf{N}$ et i dans I, $B(x_n, 2^{-n}) \not\subset V_i$. Soit x une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, φ une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans lui-même telle que $\lim x_{\varphi(n)} = x$, i tel que $x \in V_i$ et ε in $\mathbf{R}_+^*$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset V_i$. Comme $\lim(\|x_{\varphi(n)} - x\| + 2^{-\varphi(n)}) = 0$, à partir d'un certain rang $B(x_{\varphi(n)}, 2^{-\varphi(n)}) \subset V_i$. Contradiction. □

Proposition 2 - 14

Précompacité

Soit K un compact de E et r dans $\mathbf{R}_+^*$. Alors K peut être recouvert par un nombre fini de boules ouvertes de centres dans K et de rayon r.

Démonstration. Par l'absurde. Sinon, pour r dans $\mathbf{R}_+^*$ donné, on pourrait construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans K et telle que x_{n+1} n'appartienne pas aux boules $B(x_k, r)$ pour $k \leq n$. Une telle suite n'admettrait pas de valeur d'adhérence. □

Théorème 2 - 8

BOREL-LEBESGUE

Soit $(V_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts de E et K un compact. On suppose K recouvert par la famille d'ouverts, i.e. $K \subset \cup_{i\in I} V_i$. Alors il existe J une partie finie de I telle que K soit recouvert par $(V_i)_{i\in J}$.

Démonstration. Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement du compact K. D'après ce qui précède on peut trouver r dans $\mathbf{R}_+^*$ telle que, à tout x de K, on peut associer i_x dans I avec $B(x,r) \subset V_{i_x}$. Mais K est recouvert par un nombre fini de $B(x,r)$, donc de V_i. □

Proposition 2 - 15

Intersection de compacts

Soit $(K_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de compacts telle que, pour toute sous-partie J finie d'indices dans I, on ait $\cap_{j\in J} K_j$ est non vide, alors $\cap_{i\in I} K_i$ est compact et non vide.

Démonstration. Puisqu'une intersection quelconque de fermés est fermée, $\cap_{i\in I} K_i$ est fermé et donc, d'après 2 - 10, compact. Il résulte de la propriété de BOREL-LEBESGUE que cette intersection est non vide. En effet sinon son complémentaire est E tout entier et donc $E = \cup_{i\in I}(E \setminus K_i)$ et en particulier K_1 est recouvert par la famille d'ouverts $(E\setminus K_i)_{i\in I}$. Mais alors on peut en extraire un sous-recouvrement fini, disons $(E\setminus K_i)_{i\in J}$. La famille obtenue en rajoutant K_1 à $(K_i)_{i\in J}$ est alors d'intersection vide, quoique finie. Cette contradiction assure que $\cap_{i\in I} K_i$ est non vide. □

Exercices

Dans la suite E désigne un espace vectoriel normé.

Topologie

2 - 1 Ⓢ ★ **Ouverts**

Soit A une partie de E et U un ouvert non vide. Montrer que $A+U$ est ouvert.

2 - 2 Ⓢ ★ **Diamètre**

Soit A et B deux parties bornées non vides de E. Montrer que $A \cup B$ est une partie bornée non vide et qu'on a $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + d(A, B) + \delta(B)$.

2 - 3 Ⓢ ★ **Densité fonctionnelle ♥**

Soit K un segment de $\mathbf{R}$ et F un espace vectoriel normé.

a. Montrer que l'ensemble des fonctions en escalier sur K est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur K pour la norme uniforme (les fonctions sont à valeurs dans F).

b. Même résultat pour les fonctions continues et affines par morceaux au sein des fonctions continues (de K dans F).

2 - 4 Ⓢ ★★ **Adhérence d'un sous-espace vectoriel**

Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est également un sous-espace vectoriel de E.

2 - 5 Ⓢ ★★ **Ouverts et fermés**

Montrer que tout ouvert de E est réunion d'une suite de fermés.

2 - 6 Ⓢ ★★ **Intérieur d'un sous-espace vectoriel**

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Que dire de l'intérieur de F ?

2 - 7 Ⓢ **CCP 2013** ★★ **Distance à un fermé**

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$, muni de la norme de la convergence uniforme. On considère la partie de E donnée par $A = \left\{ f \in E \;\middle|\; f(0)=0 \text{ et } \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \geq 1 \right\}$.

a. Montrer que A est une partie fermée de E.

b. Montrer que si f dans E vérifie $f(0)=0$ et $\|f\|_\infty = 1$, alors $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t < 1$.

c. Soit α un réel. On considère la fonction f_n affine par morceaux définie par $f_n(x) = 1 + \dfrac{1}{n}$ si $x \geq \alpha$ et $f(0)=0$. Montrer que l'on peut choisir α entre 0 et 1 tel qu'on ait $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \geq 1$. En déduire $d(0, A)$.

2 - 8 Ⓢ ★★ **Intérieur et adhérence**

Soit A une partie de E. Combien d'ensembles différents peut-on obtenir à partir de A en utilisant successivement l'opération de prendre l'intérieur et celle de prendre l'adhérence ?

2 - 9 Ⓢ ★★ **Lemme d'Urysohn**

Soit A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe U et V deux ouverts disjoints tels que $A \subset U$ et $B \subset V$.

Pavel Samouilovitch Urysohn, 1898–1924, s'est noyé le long des côtes bretonnes.

2 - 10 Ⓢ ★★ **Sous-groupes de R ♥♥**

a. Montrer qu'un sous-groupe de $\mathbf{R}$ est soit discret, soit dense.

b. Soit a et b dans $\mathbf{R}$, que dire du sous-groupe $a\mathbf{Z} + b\mathbf{Z}$ de $\mathbf{R}$?

2 - 11 Ⓢ ★★ **Densité ♠**

Soit X une partie dense dans A. On suppose que X n'a pas de points isolés et on se donne Y un ensemble discret (i.e. dont tous les points sont isolés). Montrer que $X \setminus Y$ est dense dans A.

2 - 12 Ⓢ ★★★ **Topologie et matrices**

Déterminer l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathrm{SL}_n(\mathbf{K})$, en tant que parties de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

2 - 13 Ⓢ ★★★ **Topologie et groupes**

Soit G un sous-groupe additif non nul de $\mathbf{C}$. On définit alors le diamètre et le rang de G par :

$$\begin{aligned} \delta(G) &= \inf\{|a| \mid a \in G,\ a \neq 0\} \\ \operatorname{rg} G &= \dim \operatorname{Vect}(G). \end{aligned}$$

a. Établir l'équivalence : $\delta(G) > 0 \Leftrightarrow G$ fermé et ne contient aucune droite.

b. On suppose $\delta(G) > 0$. Montrer

i. ou bien $\operatorname{rg} G = 1$ auquel cas G est du type $G = \mathbf{Z}e_1$;

ii. ou bien $\operatorname{rg} G = 2$ auquel cas G est du type $G = \mathbf{Z}e_1 \bigoplus \mathbf{Z}e_2$.

Compacité

2 - 14 Ⓢ ★ Recouvrement

Donner un exemple de recouvrement de $]0;1[$ par des ouverts tel qu'on ne puisse pas en extraire un sous-recouvrement fini.

2 - 15 Ⓢ X 2018 ★ Longueur

Pour A une partie de $\mathbf{R}$, on pose lorsque ceci est bien défini, $\ell(A) = \inf \sum_{i \in I} (b_i - a_i)$, où $(]a_i; b_i[)_{i\in I}$ parcourt les recouvrements de A formés d'intervalles ouverts.

a. Déterminer $\ell(A)$ lorsque A est un segment $[a;b]$. (On pourra supposer le recouvrement fini, ou utiliser la propriété de Borel-Lebesgue.)

b. Déterminer $\ell(\mathbf{Q})$.

2 - 16 Ⓢ ★ Somme ♥

Soit X et Y deux parties de E. On définit l'ensemble $X+Y$ par $\{x+y \mid (x,y) \in X \times Y\}$. Cet ensemble est-il fermé ? compact ? dans les cas suivants :

a. X et Y sont compacts.

b. X et Y sont l'un un compact et l'autre fermé.

c. X et Y sont fermés.

2 - 17 Ⓢ ★ Valeurs d'adhérence

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est un fermé.

2 - 18 Ⓢ ★★ Boule minimale

Soit K un compact dans $\mathbf{R}^n$. Montrer qu'il existe une boule de rayon minimal contenant K.

2 - 19 Ⓢ ★★ Distance

Soit K et F deux parties non vides d'un espace vectoriel normé de dimension finie, avec K compacte et F fermée. Montrer que $d(K,F)$ est atteinte.

2 - 20 Ⓢ ★★ Boule compacte ♥

La boule unité fermée de $\mathbf{R}[X]$ muni de la norme infinie est-elle compacte ?

2 - 21 C 2019 ★★ Sous-groupes de R^2

a. Soit u et v deux vecteurs non colinéaires de $\mathbf{R}^2$. Montrer que $\left\{pu+qv \;\middle|\; (p,q) \in \mathbf{Z}^2\right\}$ est un sous-groupe de $(\mathbf{R}^2,+)$ isomorphe à $(\mathbf{Z}^2,+)$.

b. Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}^2,+)$. Montrer l'équivalence entre « pour tout compact K, $G \cap K$ est un ensemble fini » et « pour tout a dans G, il existe une boule ouverte B centrée en a telle que $G \cap B$ soit un singleton ».

2 - 22 ENS 2017 ★★★ Points isolés

a. Soit X une partie de $\mathbf{R}$ dont tous les points sont isolés. Montrer que X est au plus dénombrable.

b. Soit X une partie fermée de $\mathbf{R}$, non vide, dont aucun point n'est isolé. Montrer que X contient une partie qui est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$.

<u>Indication</u> : On note $\{0,1\}^{<\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites finies à valeurs dans $\{0,1\}$. Considérer $(U_s)_{s\in\{0,1\}^{<\mathbf{N}}}$ des boules ouvertes de $\mathbf{R}$ telles que l'intersection de U_s et X est non vide, $\overline{U_t} \subset U_s$ si t est un prolongement de s (i.e. $t = s \times t'$), $U_s \cap U_t = \emptyset$ si ni s ni t n'est le prolongement de l'autre et enfin $\delta(U_s) < 2^{-|s|}$ (où δ désigne le diamètre et $|\cdot|$ le cardinal). De plus, on peut remarquer qu'il suffit de trouver une injection de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ dans X.

2 - 23 Ⓢ ★★★ Théorème de Riesz ♥

a. Soit F un sous-espace vectoriel fermé de E, distinct de E. Montrer qu'il existe x dans E de norme 1 tel que $d(x,F) \geq \frac{1}{2}$.

b. En déduire que la boule unité fermée de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.

Frigyes Riesz, 1880–1956.

2 - 24 Ⓢ C 2018 ★★★ Surjections sur un compact

Soit E un espace vectoriel normé, K un compact de E et $g : K \to K$ une application 1-lipschitzienne. On cherche à montrer que g est surjective si, et seulement si, c'est une isométrie.

a. On commence par supposer g surjective. On considère x et y dans K et x_n, y_n des antécédents par g^n de x et y respectivement. On note (x',y') une valeur d'adhérence de la suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Montrer que $x-y$ est une valeur d'adhérence de la suite $(g^n(x') - g^n(y'))_{n\in\mathbf{N}}$.

b. Montrer que la suite $(\|g^n(x') - g^n(y')\|)_{n\in\mathbf{N}}$ tend vers $\|x-y\|$. En déduire que g est une isométrie.

c. On suppose maintenant que g est une isométrie. Montrer que g est surjective. Donner un contre-exemple lorsque K est seulement borné.

2 - 25 Ⓢ ★★★ Borel-Lebesgue ♠

a. Montrer que $\mathbf{R}^n$ est séparable, i.e. il contient une partie dénombrable et dense.

b. Montrer que tout espace métrique séparable admet une base d'ouverts dénombrable, i.e. il existe une famille dénombrable d'ouverts $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que pour tout élément x et tout ouvert U vérifiant $x \in U$, il existe un entier n tel que $x \in V_n \subset U$.

c. Montrer que dans tout espace admettant une base d'ouverts dénombrable tout ouvert est réunion d'un nombre dénombrable d'ouverts de la base d'ouverts.

d. Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

Indication : on recouvrera l'espace par des boules de rayon $1/n$ en nombre fini.

e. En déduire qu'un tel espace vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Indication : on extraira un recouvrement dénombrable de tout recouvrement quelconque.

f. En déduire que les deux définitions de la compacité sont équivalentes pour un espace métrique.

Normes

2 - 26 Ⓢ ★ Convexité

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé, i.e. contenant tout segment dont les extrémités sont des éléments de C. Montrer que son intérieur et son adhérence sont convexes.

2 - 27 Ⓢ ENSAE 2012 ★★ Uniforme convexité

Un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé E est dit uniformément convexe si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall (x, y) \in E^2$, $(\|x\| \le 1,\ \|y\| \le 1$ et $\|x - y\| \ge \varepsilon \Rightarrow \|(x + y)/2\| \le 1 - \delta)$.

Étudier si $\mathbf{R}^2$ pour les trois normes usuelles $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ est uniformément convexe.

2 - 28 Ⓢ ★★ Normes multiplicatives ♥

Existe-t-il des normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui soient

1. multiplicative, i.e. $N(AB) = N(A)N(B)$?
2. commutative, i.e. $N(AB) = N(BA)$?
3. invariante par conjugaison, i.e. $N(P^{-1}AP) = N(A)$?

2 - 29 Ⓢ ★★ Équivalence

Soit E donné par $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbf{R}) \;\middle|\; f(0) = 0 \right\}$. Pour f dans E on pose $\|f\| = \sup_{[0;1]} |f(t) + f'(t)|$.

a. Montrer que c'est bien une norme sur E.

b. Est-elle équivalente à la restriction à E de $\|\cdot\|_\infty$?

2 - 30 Ⓢ ★★ Norme opérateur

On munit $\mathbf{K}^n$ de la norme infinie et on l'identifie à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Montrer qu'on a, pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$:

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \left\| (\|(a_{ij})_{1\le j\le n}\|_1)_{1\le i\le n} \right\|_\infty .$$

2 - 31 Ⓢ MR 2019 ★★ Normes équivalentes

Soit E l'espace des fonctions réelles de classe C^2 sur $[0;1]$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$. On définit pour f dans E la quantité $N(f) = \sup_{[0;1]} \left| f'' + 2f' + f \right|$.

a. Montrer que N est une norme.

b. Montrer que N domine $\|\cdot\|_\infty$. On pourra considérer $h = \exp \times f$. Trouver la constante minimale qui permette la domination.

c. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

2 - 32 Ⓢ ★★ Norme opérateur

On munit $\mathbf{R}_n[X]$ de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^n |P(k)|$. Calculer $\sup_{\|P\|=1} \|P(X+2)\|$.

2 - 33 Ⓢ ★★★ Normes classiques ♥

a. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbf{K}^n$.

b. Soit (p, q) dans $\mathbf{R}^2$ avec $1 \le p \le q$. Montrer :

$$\forall x \in \mathbf{K}^n \quad \|x\|_p \le n^{1/p - 1/q} \|x\|_q .$$

c. Montrer par récurrence qu'on a, pour $r \ge 1$ et $(a_1, \cdots, a_n)$ dans $\mathbf{R}_+^n$,

$$\sum_{k=1}^n a_k^r \le \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^r .$$

En déduire, pour x dans $\mathbf{K}^n$, $\|x\|_q \le \|x\|_p$.

d. Montrer, pour x dans $\mathbf{K}^n$ et $p \ge 1$,

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le n^{1/p} \|x\|_\infty$$

et en déduire $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.

Compléments

2 - 34 Ⓢ ★ Suites de Cauchy ♠

Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est de Cauchy, elle l'est aussi en moyenne, i.e. v est de Cauchy avec $v_n = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^n u_k$.

2 - 35 Ⓢ X 94 ★★ Développement p-adique ♠

Soit $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{p^n}$ le développement p-adique propre de x dans $]0;1[$, i.e. $0 \le \alpha_n \le p-1$ et la suite (α_n) n'est pas stationnaire égale à $p - 1$. Montrer que x est rationnel si et seulement si $(\alpha_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

2 - 36 ★★ Suites de Cauchy et développement décimal ♠

a. Soit x et y des réels et $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ dans $[\![0;9]\!]^{\mathbf{N}}$ tels que $x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x_k 10^{-k}$ et $y = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} y_k 10^{-k}$, i.e. des développements décimaux non nécessairement propres de x et y. Pour r dans $\mathbf{N}$ décrire la condition $|x - y| < 10^{-r}$ en termes des suites $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ et $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

b. Montrer que x réel admet deux développements décimaux distincts si et seulement s'il est décimal, i.e. qu'il existe r dans $\mathbf{N}$ tel que $10^r x \in \mathbf{Z}$.

c. Soit (u_n) une suite de CAUCHY positive. On note $(u_{n,k})_{k\in\mathbf{N}}$ un développement décimal de u_n, non nécessairement propre, comme ci-dessus. Montrer qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout entier r, il existe un entier N tel que pour tout entier n supérieur à N la suite $(u_{n,k})_{k<r}$ coïncide avec les r premiers termes de l'un des développements décimaux de ℓ, puis que (u_n) converge vers ℓ et en particulier que $\mathbf{R}$ est complet.

d. En déduire que si ℓ n'est pas décimal la suite des décimales de (u_n) se stabilise, i.e. les suites $(u_{n,k})_{n\in\mathbf{N}}$ sont toutes stationnaires.

2 - 37 Ⓢ ★★★ Boréliens

En utilisant l'exercice 1 - 70, on note $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ la tribu sur $\mathbf{R}$ engendrée par les intervalles de $\mathbf{R}$, i.e.si F désigne l'ensemble de tous les intervalles de $\mathbf{R}$ (bornés ou non, fermés ou non), alors $\mathcal{B}(\mathbf{R}) = \sigma(F)$. On l'appelle **tribu des boréliens** de $\mathbf{R}$.

a. Montrer que c'est aussi la tribu engendrée par les intervalles de la forme $]-\infty; a\,]$.

b. ►Montrer que c'est aussi la tribu engendrée par les ouverts de $\mathbf{R}$.

2 - 38 Ⓢ ★★★ Théorème de Baire ♠

Soit E un espace de BANACH et $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une famille de parties ouvertes et denses de E. Montrer que $\cap_{n\in\mathbf{N}} V_n$ est dense dans E.

René BAIRE, 1874–1932.

2 - 39 Ⓢ ★★★ Ensemble rare ♠

On appelle ensemble rare toute partie d'un espace de BANACH dont l'adhérence est d'intérieur vide. Montrer, en utilisant 2 - 38, qu'un espace de BANACH n'est pas réunion dénombrable d'ensembles rares.

En déduire que si un espace de BANACH est réunion dénombrable de fermés F_n, alors la réunion $\cup_{n\in\mathbf{N}} \mathring{F}_n$ est un ouvert dense.

2 - 40 Ⓢ ★★★ Fractions continues

Soit r un rationnel non entier de représentant irréductible $\dfrac{p}{q}$, i.e. $p \wedge q = 1$, $p \in \mathbf{Z}$ et $q \geq 2$.

a. Soit les suites $(q_n)_{0\leq n\leq d}$ et $(r_n)_{1\leq n\leq d}$ définies selon l'algorithme d'EUCLIDE, dans lequel r_d est le dernier reste non nul. On a donc $r_d = p \wedge q = 1$.

i. Vérifier l'égalité :

$$r = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{q_{d-1} + \cfrac{1}{r_{d-1}.}}}}$$

ii. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites finies du type $(a_0, a_1, \cdots a_d)$ où a_0 est dans $\mathbf{Z}$ et $a_1, \cdots a_d$ dans $\mathbf{N}^*$, et $a_d > 1$. Montrer que l'application $\mathcal{F}$ qui à $(a_0, a_1, \cdots a_d)$ dans $\mathcal{S}$ associe le rationnel

$$r = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{d-1} + \cfrac{1}{a_d}}}}$$

est une bijection de $\mathcal{S}$ sur $\mathbf{Q}\setminus\mathbf{Z}$. La formule précédente est appelée développement en fraction continue propre de r, et on note en abrégé :

$$r = [a_0, a_1, \cdots a_d]\ .$$

b. Soit $r \in \mathbf{Q} \setminus \mathbf{Z}$ de développement en fraction continue propre $r = [a_0, a_1, \cdots a_d]$. Pour j entre 0 et d on pose

$$\begin{pmatrix} p_j & * \\ q_j & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} \alpha_j & * \\ \beta_j & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_j & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \cdots \times \begin{pmatrix} a_d & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ .$$

i. Vérifier $q_i \neq 0$, si bien qu'on peut poser $x_i = \dfrac{p_i}{q_i}$: x_i est appelé i^{e} réduite de r.

ii. Montrer, pour i entre 1 et $d-1$, $r - x_i = \dfrac{(-1)^i}{q_i\left(q_{i-1} + q_i\frac{\alpha_{i+1}}{\beta_{i+1}}\right)}$.

iii. En déduire $|r - x_i| \leq \dfrac{1}{q_i q_{i+1}} < \dfrac{1}{q_i^2}$.