CHAPITRE

13

Intégration

L'influence des travaux de LEBESGUE a été immédiate et immense, particulièrement à l'étranger. En 1916, alors qu'il se promenait dans les jardins de Planty, à Cracovie, Hugo STEINHAUS, alors professeur à l'université Jagellonne, entend par inadvertance les mots « mesure de LEBESGUE » émerger d'une conversation entre deux jeunes gens. Il s'approche et se mêle à la conversation passionnée sur les travaux de LEBESGUE, puis démarre avec ces deux jeunes gens, et d'autres, un groupe de travail (qui se tiendra dans son appartement, sur un tableau cloué au mur à l'occasion, malgré les protestations de la logeuse). Les deux jeunes gens sont Stefan BANACH, à l'époque autodidacte, et Otto NIKODYM. Le groupe part bientôt de Cracovie pour former la célèbre École mathématique de Lwów, qui se réunit souvent au Scottish Café. LEBESGUE sera le dernier invité du groupe de Lwów, avant que la tourmente de la seconde guerre mondiale ne le disperse. Lorsqu'on demande à Hugo STEINHAUS quelle a été sa plus belle découverte mathématique, il répond « Stefan BANACH ». Ainsi l'histoire du groupe de Lwów commence et finit avec Henri LEBESGUE.

Introduction

Programme

L'objectif de ce chapitre est de compléter l'étude des séries de fonctions par celle des intégrales à paramètre.

Les fonctions sont à valeurs dans $\mathbf{K}$, corps des réels ou des complexes. La technicité n'est pas un but en soi. On privilégie donc les exemples significatifs (par exemple intégrales eulériennes ou transformées intégrales). Le programme ne contient aucune forme du théorème de FUBINI qui pourra être admis pour traiter un exercice ou un problème nécessitant son utilisation.

- Théorème de convergence dominée (démonstration hors programme). Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda\in J}$ où J est un intervalle de $\mathbf{R}$. Théorème d'intégration terme à terme (démonstration hors programme).
- Pour A une partie d'un espace normé E de dimension finie et I un intervalle de $\mathbf{R}$, continuité d'une intégrale à paramètre d'une fonction f définie sur $A \times I$ à valeurs dans $\mathbf{K}$. Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite au voisinage d'un point a de A. Si A est un intervalle de $\mathbf{R}$, extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment de A. Dérivation d'une intégrale à paramètre. Extension au cas où l'hypothèse de domination est satisfaite sur tout segment. Classe C^k d'une intégrale à paramètre.
- Exemples d'étude de fonctions définies comme intégrales : régularité, étude asymptotique. Transformée de FOURIER, théorème de la valeur initiale, théorème de la valeur finale.

Dans tout ce chapitre E, F etc. désignent des espaces vectoriels normés (de dimension finie) et I un intervalle réel.

Une idée, a priori naturelle, pour construire l'intégrale d'une fonction continue définie sur un segment I est de partir de la notion d'aire, notamment pour les rectangles. L'aire d'un rectangle conduit à définir l'intégrale d'une fonction constante et donc, par additivité des aires ou relation de CHASLES, à celle d'une fonction en escalier.

On dispose alors d'une forme linéaire de l'espace des fonctions en escalier sur I. L'inégalité de la moyenne montre que cette forme linéaire est lipschitzienne pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ et est donc uniformément continue. Le théorème de prolongement des applications uniformément continues permet donc de prolonger cette forme linéaire à l'adhérence de l'espace des fonctions escaliers, à l'intérieur de l'espace des fonctions bornées sur I, l'adhérence étant considérée pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Or le théorème de HEINE a pour conséquence que cette adhérence contient l'espace des fonctions continues sur I, ce qui permet de donner un sens aux intégrales de telles fonctions.

Propriétés 13 - 1

1. Les fonctions en escaliers sont intégrables.
2. Une limite uniforme de fonctions intégrables est intégrable et on peut alors échanger les signes intégrale et limite.
3. Une fonction (uniformément) continue est intégrable (théorème de CAUCHY).

Dans cette construction, le fait que l'on puisse considérer l'intégrale de telle ou telle fonction résulte donc du fait qu'elle est approchable par des fonctions élémentaires, à savoir les fonctions en escalier. L'intégrabilité, i.e. le fait que l'intégrale existe, n'est pas une propriété à part entière puisqu'on n'a pas défini ce qu'elle veut dire.

En voici une définition, hors-programme, via les sommes de Darboux (Gaston Darboux, 1842–1917) .

On se donne une subdivision D de I, i.e. $\{x_0, \cdots, x_n\}$ avec $n \in \mathbf{N}^*$ et

$$\inf I = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \sup I \ .$$

On note alors, pour f une fonction bornée sur I et i dans $[\![0, n-1]\!]$, $\delta_i = \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $f_i = \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$ et $F_i = \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$ et on définit les sommes de Darboux inférieure et supérieure par

$$s(D) = s(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i \delta_i \quad \text{et} \quad S(D) = S(D, f) = \sum_{i=0}^{n-1} F_i \delta_i \ .$$

On remarque alors que si $D \subset D'$, on raffine la construction et on a donc

$$D \subset D' \Rightarrow s(D) \leq s(D') \leq S(D') \leq S(D) \ .$$

On en déduit, en considérant D et D' deux subdivisions quelconques et $D \cup D'$, qu'on a $s(D) \leq s(D \cup D') \leq S(D \cup D') \leq S(D')$, de sorte que toute somme de Darboux inférieure est majorée par toute somme de Darboux supérieure et on peut ainsi définir le supremum de $s(D)$ pour D variant et, de même, l'infimum de $S(D)$. On appelle ces quantités les intégrales inférieure et supérieure, ce que l'on note

$$\sup_D s(D, f) = \underline{\int_I} f \leq \overline{\int_I} f = \inf_D S(D, f) \ .$$

Avec ces définitions, on dit que f est intégrable si ses intégrales inférieure et supérieure coïncident. On note la valeur commune $\int_I f$.

Il est équivalent de dire qu'une fonction est intégrable si pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on peut trouver D tel que $0 \leq S(D) - s(D) \leq \varepsilon$. Il est un peu plus technique de montrer qu'il revient au même d'affirmer que pour tout ε dans $\mathbf{R}_+^*$, on peut trouver δ tel que pour toute subdivision D de pas inférieur à δ (i.e. $\max_i \delta_i \leq \delta$) on ait $0 \leq S(D) - s(D) \leq \varepsilon$.

En particulier, si f est intégrable (par exemple continue par morceaux), on a convergence des sommes de Riemann vers l'intégrale :

Propriété 13 - 2

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*,\ \exists \delta \in \mathbf{R}_+^*,\ \forall D,\ \forall (\xi_i)_{0 \leq i \leq n-1},$$

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} \delta_i \leq \delta \Longrightarrow \left| \int_I f - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \delta_i \right| \leq \varepsilon \ .$$

Aparté

Un théorème élémentaire montre que toute fonction monotone est intégrable au sens précédent. Le contre-exemple donné par f affine sur les intervalles $\left[2^{-(n+1)}; 2^{-n}\right[$ telle que $f(2^{-n}) = 2^{-2n}$, $\lim_{\frac{1}{2^n}^-} f = 2^{-(2n+1)}$ et $f(0) = 0$ montre qu'une fonction monotone n'est pas nécessairement continue par morceaux, ni a fortiori intégrable au sens du programme.

1 Approximation des fonctions

On généralise la notion de fonction en escalier et de fonction continue par morceaux à valeurs dans E : ce sont des fonctions définies sur des segments de $\mathbf{R}$ et telles qu'il existe une subdivision de ce segment $(a_0, \cdots, a_n)$ de sorte que la fonction soit constante ou continue sur les intervalles ouverts $]a_{i-1}; a_i[$ et que sa restriction à ces intervalles soit prolongeable par continuité aux bornes. La valeur en les points de la subdivision importe peu.

Théorème 13 - 1

Toute fonction continue par morceaux sur un segment et à valeurs dans E est limite uniforme de fonctions en escalier sur ce segment, i.e. si f est une fonction continue par morceaux sur un segment $[a; b]$ de $\mathbf{R}$ et si ε est un réel strictement positif, il existe une fonction en escalier φ sur $[a; b]$ telle que $\|f - \varphi\|_{[a;b],\infty} \leq \varepsilon$.

Démonstration. Dans le cas où f est continue, cette propriété résulte du théorème de Heine. On dispose de η tel que, pour x et y dans I avec $|x - y| \leq \eta$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon$. On prend alors une subdivision de $[a; b]$ de pas inférieur à η et φ en escalier définie par $\varphi(x) = f(a_i)$ si $x = a_i$ ou $x \in]a_i; a_{i+1}[$. Alors $\|f - \varphi\|_{[a;b],\infty} \leq \varepsilon$ par construction.

Dans le cas général on effectue la même construction pour le prolongement par continuité de f à $[a_{i-1}; a_i]$ et on définit φ comme égale aux fonctions en escalier trouvées ainsi, sauf en les a_i où on pose $\varphi(a_i) = f(a_i)$. On a encore $\|f - \varphi\|_{[a;b],\infty} \leq \varepsilon$ par construction. □

Remarque 13 - 1

On peut aussi montrer qu'une fonction continue est limite de fonctions continues et affines par morceaux.

Puisque l'intégrale est une forme linéaire, tout comme l'évaluation en un point, on peut se demander si on peut approcher l'évaluation en un point via l'intégration. C'est l'idée qu'a développée Paul Adrien Marie Dirac (1902–1984, prix Nobel de physique en 1933) et qui a été formalisée par Laurent Schwartz (1915–2002, médaille Fields en 1950).

Théorème 13 - 2

Suites de Dirac

Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite de fonctions de $\mathbf{R}$ dans lui-même donnée par $f_n(x) = 0$ si $|x| > 1$ et $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ sinon, et $\varphi_n = \mu_n f_n$ avec μ_n tel que $\displaystyle\int_{[-1,1]} \varphi_n = 1$. Alors

1. Les fonctions φ_n sont à valeurs positives et atteignent un maximum global en 0.
2. On a $\mu_n \leq \dfrac{n+1}{2}$.
3. Soit ε dans $\mathbf{R}_+^*$ et δ dans $]0; 1[$. On peut trouver N dans $\mathbf{N}$ tel que, pour tout entier naturel n supérieur à N, on ait

$$1 - \varepsilon \leq \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \leq 1 \quad \text{et} \quad 0 \leq \int_{-1}^{-\delta} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\delta}^{1} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\,.$$

Démonstration. L'existence de μ_n est garantie puisque f_n est continue, positive et non identiquement nulle. Le point 1 est direct puisque toutes les quantités en jeu sont positives et que $1-x^2$ est maximal sur $[-1;1]$ en 0. Par ailleurs on a

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n\,\mathrm{d}x \geq 2\int_0^1 (1-x)^n\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n+1}$$

et donc $\mu_n \leq (n+1)/2$. Par monotonie et parité, on a donc, si $0<\delta<|x|\leq 1$,

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_n(\delta) \leq \frac{n+1}{2}(1-\delta^2)^n$$

et donc φ_n converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}\setminus\,]-\delta;\delta[$. Comme son intégrale sur $[-1;1]$ vaut 1, les deux dernières assertions en résultent. □

Grâce à ce concept on peut requérir plus de régularité dans l'approximation des fonctions (ce qui est un brin paradoxal puisque la masse de Dirac est tout sauf régulière). Le théorème d'approximation, découvert par Weierstrass, montre en fait que toute fonction continue est limite uniforme (sur tout segment) de fonctions polynomiales, i.e. dont les coordonnées dans une base (donc dans toute base) sont des fonctions polynomiales (donc de classe C^∞ et développables en série entière).

Théorème 13 - 3

Théorème d'approximation de Weierstrass
Toute fonction f continue sur un segment I et à valeurs dans E est limite uniforme de fonctions polynomiales, i.e. pour tout ε strictement positif, il existe une fonction polynomiale P sur I telle que $\|f-P\|_{I,\infty}\leq\varepsilon$.

Démonstration. Quitte à composer par une forme linéaire coordonnée et par une application affine bijective, on peut supposer $E=\mathbf{R}$ et $I=[a;b]$ avec $0<a<b<1$. En effet si $\alpha\neq 0$ et $x\mapsto f(\alpha x+\beta)$ est limite uniforme de fonctions polynomiales, il en est de même pour f puisque si P est polynomiale, alors $x\mapsto P((x-\beta)/\alpha)$ l'est aussi.

Soit donc f une fonction continue de $[a;b]$ dans $\mathbf{R}$, avec $0<a<b<1$. On la prolonge par continuité sur $[0;1]$ en posant $f=f(a)$ sur $[0;a[$ et $f=f(b)$ sur $]b;1]$.

On a alors, pour ξ dans $[a;b]$ et n dans $\mathbf{N}$,

$$\int_0^1 f(x)\varphi_n(\xi-x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{2n}\frac{\xi^k}{k!}\int_0^1 f(x)\varphi_n^{(k)}(-x)\,\mathrm{d}x\,,$$

par formule de Taylor et linéarité de l'intégrale ; la formule de gauche définit donc une fonction polynomiale p_n de degré inférieur à $2n$ sur $[0;1]$.

Soit $\xi\in[a;b]$ et $\delta\in\,]0;\min(a,1-b)[$. Alors, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}|p_n(\xi)-f(\xi)| \leq{}& \left|p_n(\xi)-\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)\varphi_n(\xi-x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &+\left|\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\left(f(x)-f(\xi)\right)\varphi_n(\xi-x)\,\mathrm{d}x\right| + |f(\xi)|\times\left|\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\varphi_n(\xi-x)\,\mathrm{d}x-1\right|\end{aligned}$$

car $[\xi-\delta;\xi+\delta]\subset[0;1]$. Pour δ assez petit et x et y dans $[a;b]$ vérifiant $|x-y|\leq\delta$, on a $|f(x)-f(y)|\leq\varepsilon$ et il vient

$$|p_n(\xi)-f(\xi)| \leq \|f\|_\infty\int_{[-1;1]\setminus]-\delta;\delta[}\varphi_n + \varepsilon\int_{[-1;1]}\varphi_n + \|f\|_\infty\int_{[-1;1]\setminus]-\delta;\delta[}\varphi_n\,.$$

Donc p_n converge uniformément vers f sur $[a;b]$. □

Ce théorème a été démontré de nombreuses façons différentes : WEIERSTRASS (1885), PICARD (1890), LEBESGUE (1898), MITTAG-LEFFLER (1900), LANDAU (1908), BERNSTEIN (1912) etc. La démonstration ci-dessus est celle de LANDAU. Celle de WEIERSTRASS passe par des fonctions exponentielles et celle de BERNSTEIN est donnée dans l'exercice 5 - 39.

2 Inégalités intégrales

Les seules inégalités intégrales explicitement au programme sont l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ pour les fonctions continues sur un segment et l'inégalité triangulaire, à savoir d'un côté pour les fonctions définies sur un segment et à valeurs vectorielles (ce qui inclut $\mathbf{R}$ et l'usage est alors de remplacer la norme par la valeur absolue)

$$\forall f \in C^0_{mcx}([a;b], E) \qquad \left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq \int_a^b \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$$

et d'un autre côté pour les fonctions définies sur un intervalle quelconque et à valeurs dans le corps des réels ou des complexes

$$\forall f \in \mathcal{L}^1(I, \mathbf{K}) \qquad \left| \int_I f \right| \leq \int_I |f| \ .$$

Toutefois le programme insiste sur la nécessité de savoir majorer et minorer des intégrales. L'inégalité triangulaire entraîne, par croissance de l'intégrale, l'inégalité de la moyenne, à savoir dans le cas des segments

$$\forall f \in C^0_{mcx}([a;b], E) \qquad \left\| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right\| \leq (b-a)\,\|f\|_\infty \ .$$

Cette inégalité est encore vraie dans le cas des intervalles quelconques, le second membre étant a priori à valeurs dans $\mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ (même si l'intervalle est borné).

Soit $I = [a;b]$ et f dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R})$. Par définition des bornes supérieure et inférieure, on a la double inégalité $\inf_I f \leq f \leq \sup_I f$ sur I et donc, par croissance de l'intégrale, il vient

$$(b-a)\inf_I f \leq \int_I f \leq (b-a)\sup_I f \ .$$

Si f est de plus continue, on a d'après le théorème de WEIERSTRASS et par stricte positivité de $b-a$,

$$\min(f(I)) = \inf_I f \leq \frac{1}{b-a}\int_I f \leq \sup_I f = \max(f(I)) \ .$$

Comme, d'après le théorème de BOLZANO, $f(I)$ est un intervalle, le terme médian appartient à $f(I)$, i.e.

Propriété 13 - 3

Théorème de la moyenne – Égalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. Alors il existe c dans $[a;b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(c) \ .$$

Remarque 13 - 2

En tenant compte du théorème de LEIBNIZ-NEWTON, dit théorème fondamental du calcul différentiel et intégral, il s'agit tout simplement du théorème de LAGRANGE, dit des accroissements finis.

Propriété 13 - 4

Inégalité de la moyenne

Soit I un intervalle de bornes finies notées a et b, et f dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R})$. Pour m et M réels, par croissance de l'intégrale, on a

$$(\forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M) \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_I f \leq M(b-a)\,,$$

et plus généralement si g est une fonction continue par morceaux, de signe constant, intégrable sur I et d'intégrale non nulle, on a

$$(\forall x \in I \quad m \leq f(x) \leq M) \Longrightarrow m \leq \frac{\displaystyle\int_I fg}{\displaystyle\int_I g} \leq M\,.$$

La condition sur g est par exemple remplie si g est continue, non identiquement nulle, de signe constant et $I = [\,a; b\,]$.

La convexité est au cœur de la plupart des inégalités. L'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, et son cas d'égalité, est valide dans tout espace préhilbertien réel. Le seul vraiment explicite dans le programme est $C^0([\,a; b\,], \mathbf{R})$. On peut la voir comme un cas particulier de l'inégalité de HÖLDER, se contenter de l'inégalité en se plaçant dans un espace vectoriel muni d'une forme bilinéaire symétrique positive, ou l'étendre au cas des intervalles quelconques. L'inégalité de base pour toutes ces considérations est l'inégalité de YOUNG, qui résulte de la concavité du logarithme.

Rappel

Inégalité de YOUNG

Pour x, y, p et q dans $\mathbf{R}_+^*$ avec $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, on a $xy \leq \dfrac{1}{p}x^p + \dfrac{1}{q}y^q$, avec égalité si et seulement si $x^p = y^q$.

On en déduit, en traitant tout d'abord le cas où $|f|^p$ et $|g|^q$ sont d'intégrale 1 puis en utilisant l'homogénéité :

Propriété 13 - 5

Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soit I un intervalle, f et g f et g deux fonctions continues par morceaux sur I, à valeurs complexes et de carré intégrable sur I. Alors fg est intégrable sur I et on a

$$\left|\int_I fg\right| \leq \int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^2\right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2\right)^{1/2}\,.$$

Propriété 13 - 6

Inégalité de Hölder

Soit I un intervalle, f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs complexes et p et q dans $\mathbf{R}_+^*$ avec $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Alors si f^p et g^q sont intégrables sur I, fg l'est aussi et on a

$$\left|\int_I fg\right| \leq \int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_I |g|^q\right)^{1/q}.$$

Propriété 13 - 7

Inégalité de Jensen intégrale

Soit I un intervalle réel et f et ω deux fonctions dans $C^0_{mcx}(I,\mathbf{R})$ avec ω strictement positive d'intégrale 1 sur I et telles que l'intégrale de $f\omega$ converge. Soit g une fonction convexe définie sur J telle que $f(I)\subset J$ et l'intégrale de $g\circ f\omega$ converge. Alors

$$g\left(\int_I f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq \int_I g\circ f(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Démonstration. En posant $y=\displaystyle\int_I f\omega$, on considère trois cas.

Si y minore J, en particulier il minore $f(I)$ de sorte que $(f-y)\omega$ est une fonction positive d'intégrale nulle et donc $f=y$ sauf au plus en un nombre fini de points car on a affaire à des fonctions continues par morceaux. On en déduit qu'il y a égalité dans l'inégalité de Jensen. On raisonne de même si y majore J et il y a à nouveau égalité.

Enfin si y est intérieur à J, g est alors dérivable à gauche et à droite en y par passage à la limite dans l'inégalité des trois pentes. On peut donc minorer g par une de ses demi-tangentes en y : $g(y)+\alpha(f(t)-y)\leq g(f(t))$. En multipliant par $\omega(t)$, qui est positif, et en intégrant sur I on obtient le résultat. □

Remarque 13 - 3

Si $f\omega$ est intégrable sur I, comme g est minoré par une fonction affine, disons $g(x)\geq ax+b$, on a $g\circ f^-\leq |a|\,|f|+|b|$, de sorte que $g\circ f^-\omega$ est intégrable. Autrement dit en écrivant $g\circ f\omega = g\circ f^+\omega - g\circ f^-\omega$ et en convenant, par intégrabilité du second terme du second membre, que l'intégrale de $g\circ g\omega$ est soit convergente, soit $+\infty$, selon que $g\circ f^+\omega$ est intégrable ou non, l'inégalité de Jensen est vraie sans supposer l'intégrabilité de $g\circ f\omega$ dans $\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$.

Exemples 13 - 1

Pour f dans $C^0_{mcx}([a;b],\mathbf{R}_+^*)$, on a

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(t))\,\mathrm{d}t \leq \ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

Pour f dans $C^0_{mcx}([a;b],\mathbf{R})$, on a, pour $p\geq 1$,

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t \leq (b-a)^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3 Théorème de convergence dominée

Le théorème de convergence dominée est l'outil fondamental du calcul intégral, pour l'intégrale de LEBESGUE. Pour les intégrales de RIEMANN, il en reste une version un peu moins puissante, mais néanmoins tout aussi fondamentale.

Théorème 13 - 4

Convergence dominée pour les suites de fonctions

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définie sur un intervalle I. On suppose :

1. Pour tout n dans $\mathbf{N}$, $f_n \in C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$.
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I vers une fonction f.
3. La fonction f appartient à $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$.
4. On suppose enfin qu'on dispose d'une fonction φ continue par morceaux **positive** et intégrable sur I vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall t \in I \qquad |f_n(t)| \leq \varphi(t) .$$

Alors f ainsi que les fonctions f_n, pour tout n dans $\mathbf{N}$, sont intégrables sur I et on peut intervertir limite et intégrale, i.e.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n = \int_I f .$$

La démonstration de ce théorème est hors-programme et est donnée dans les compléments.

Danger

Une bosse glissante, e.g. $f_n(t) = h(t-n)$ avec $h(t) = [t(1-t)]^+$, n'est pas dominée. La limite simple de (f_n) est la fonction nulle bien que les intégrales de f_n sur $\mathbf{R}$ soient constantes et égales à $\dfrac{1}{6}$.

Exemples 13 - 2

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t/n}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \to \frac{\pi}{2}$.
2. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t \to 0$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+\frac{u^2}{n^2}}\,\mathrm{d}u \sim \frac{1}{n}$.
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{2n}}{\ln(1-t^n)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{(n+1)/n}}{\ln(1-u)}\,\mathrm{d}u \sim \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u}{\ln(1-u)}\,\mathrm{d}u$.
5. On peut faire varier l'intervalle de définition en utilisant des fonctions caractéristiques. Ainsi si f_n est définie sur I_n, on écrit $f_n = \tilde{f}_n \chi_{I_n}$ avec $\tilde{f}_n$ continue par morceaux sur I et $I = \bigcup_n I_n$. On est ramené à étudier la convergence de $(\tilde{f}_n)$. Ainsi on peut montrer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{+\infty} e^{-t}\frac{\mathrm{d}t}{t} .$$

Remarque 13 - 4

Lorsqu'on a affaire à une suite croissante de fonctions (à distinguer d'une suite de fonctions croissantes ...) positives, on peut prendre $\varphi = f$. Ceci imposant de démontrer que f est intégrable.

D'une façon générale on peut tout à fait prendre $\varphi = \sup |f_n|$.

C'est d'ailleurs là la différence majeure entre le théorème de convergence dominée dans le cadre de l'intégrale de RIEMANN et celui pour l'intégrale de LEBESGUE : dans ce dernier, on ne demande rien à f. On déduit des propriétés de φ et des f_n que f est mesurable et intégrable. Donc, quitte à montrer que f est continue par morceaux, il n'est souvent pas beaucoup plus cher de démontrer qu'elle est aussi intégrable sur I.

Théorème 13 - 5

Convergence dominée pour les intégrales à paramètre

Soit $(f_x)_{x\in J}$ une famille de fonctions, avec J un intervalle réel, et a dans l'adhérence de A. On suppose :

1. Pour tout x dans J, $f_x \in C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$.
2. Il existe une fonction f appartenant à $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$ vérifiant, pour tout t dans I, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in J}} f_x(t) = f(t)$.
3. On suppose enfin qu'on dispose d'une fonction φ continue par morceaux **positive** et intégrable sur I vérifiant

$$\forall (x,t) \in J \times I \qquad |f_x(t)| \leqslant \varphi(t)\ .$$

Alors f ainsi que les fonctions f_x, pour tout x dans A, sont intégrables sur I et on peut intervertir limite et intégrale, i.e.

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \int_I f_x = \int_I f\ .$$

Démonstration. Le théorème de convergence dominée s'applique à des suites de la forme $(f_{x_n})_{n\in\mathbf{N}}$ avec (x_n) à valeurs dans A et tendant vers a. L'assertion résulte donc de la caractérisation séquentielle de la limite. □

Le théorème se transpose également aux séries de fonctions.

Théorème 13 - 6

Convergence dominée pour les séries de fonctions

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$ telle que la suite de ses sommes partielles converge simplement vers une fonction S également dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$. On suppose qu'il existe φ dans dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R}_+)$, intégrable sur I et telle que, pour tout n dans $\mathbf{N}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n} f_k\right| \leqslant \varphi$.

Alors S ainsi que les fonctions f_n, pour tout n dans $\mathbf{N}$, sont intégrables sur I et on peut intervertir limite et intégrale, i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I S\ .$$

Démonstration. On applique le théorème de convergence dominée pour les suites aux sommes partielles et on utilise le fait que chaque fonction est différence de deux sommes partielles successives. □

Pour clore ce paragraphe, voici un théorème plus exigeant mais dont les hypothèses sont souvent vérifiées. Sa démonstration est hors-programme.

Théorème 13 - 7

Convergence dominée et séries de fonctions normalement convergentes

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$ et intégrables sur I, telle que la suite de ses sommes partielles converge simplement vers une fonction S dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$. On suppose que la série numérique $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors S est intégrable sur I et on peut intervertir limite et intégrale, i.e.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n = \int_I S\ .$$

Remarque 13 - 5

Si on munit l'espace $\mathcal{L}^1(I)$ de sa norme naturelle, à savoir celle donnée par $\|f\|_1 = \int_I |f|$, l'hypothèse est que la série $\sum \|f_n\|_1$ converge.

Exemples 13 - 3

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} te^{-nt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a+bn)^2}$.

Même si ces théorèmes simplifient grandement l'analyse, il faut rester vigilant·e quant aux hypothèses.

Par exemple, soit S définie par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2t^2}$. Alors S est continue sur $\mathbf{R}_+^*$. Pour calculer l'intégrale sur $\mathbf{R}_+^*$ de S, on ne peut intégrer terme à terme directement car la série $\sum \frac{\pi}{2n}$ diverge. On peut par contre utiliser la majoration du reste d'une série alternée. On a en effet $|R_n(t)| \leq \dfrac{1}{1+n^2t^2}$ et il vient

$$\int_0^X S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \int_0^X \frac{\mathrm{d}t}{1+k^2t^2} + \int_0^X R_n(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2}\ln(2)\ .$$

En fait, on pourrait aussi écrire $|S_n| \leq |S_1|$ et utiliser le théorème de convergence dominée.

4 Intégrales à paramètres

On peut reformuler le théorème de convergence dominée pour les intégrales à paramètres :

Théorème 13 - 8

Continuité sous le signe somme

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé de dimension finie, I un intervalle réel et f de $A \times I$ dans $\mathbf{K}$. On suppose

1. $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t) \in C^0(A)$
2. $\forall x \in A$, $t \mapsto f(x,t) \in C^0_{mcx}(I)$
3. Il existe φ continue par morceaux **positive** et intégrable sur I vérifiant

$$\forall (x,t) \in A \times I\,, \qquad |f(x,t)| \leq \varphi(t)\ .$$

Alors $\displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction continue, de x, sur A.

Démonstration. On utilise le critère séquentiel de continuité couplé au théorème de convergence dominée pour les suites de fonctions. □

Exemple 13 - 4

La fonction de x donnée par $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{1+x^2t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbf{R}$.

♥

Comme l'outil fondamental est le théorème de convergence dominée, on fait appel à l'intégrabilité des fonctions. Il est donc essentiel d'obtenir des majorations en valeur absolue de toutes les fonctions étudiées.

Exemples 13 - 5

Si f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}_+$, sa transformée de LAPLACE est la fonction continue définie par $\mathcal{L}\{f\}(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est une fonction continue et intégrable sur $\mathbf{R}$, sa transformée de FOURIER est la fonction continue définie par $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi t} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si f est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$, vérifiant $f(t) = \mathrm{O}_{0^+}\left(t^{-\alpha}\right)$ et $f(t) = \mathrm{O}_{+\infty}\left(t^{-\beta}\right)$ avec $\alpha < \beta$, sa transformée de MELLIN est la fonction continue définie sur $]\alpha;\beta[$ par $\mathcal{M}_f(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque 13 - 6

La continuité étant une notion locale, pour obtenir la continuité en un point a de A, il suffit de trouver une fonction positive et intégrable majorant f indépendamment de x dans un voisinage de a dans A. On parle alors de domination locale. Par exemple, pour A inclus dans $\mathbf{R}$, la continuité sur A résulte de celle sur tous les segments de A, i.e. il suffit de trouver une fonction majorant f pour x dans un segment (quelconque) inclus dans A.

Bien entendu, on peut étudier des régularités plus fortes. L'hypothèse de domination se fait alors sur la dérivée tout en gardant une hypothèse d'intégrabilité de la fonction.

Théorème 13 - 9

Dérivation sous le signe somme – Règle de Leibniz

Soit J et I des intervalles et f de $J \times I$ dans $\mathbf{K}$. On suppose

1. Régularité en le paramètre : $\forall t \in I$, $x \mapsto f(x,t) \in C^1(J)$
2. Intégrabilité de la fonction : $\forall x \in J$, $t \mapsto f(x,t) \in \mathcal{L}^1(I)$
3. Régularité de la dérivée : $\forall x \in J$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) \in C^0_{mcx}(I)$
4. Domination de la dérivée : on dispose de φ continue par morceaux **positive** et intégrable sur I vérifiant

$$\forall (x,t) \in J \times I\,, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)\,.$$

Alors $x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction F de classe C^1 sur J, de dérivée donnée par $F'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. D'après 2. la fonction F est bien définie. On va démontrer que c'est une fonction continue sur J en montrant qu'elle y est dérivable.

Pour cela on se donne encore une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ à valeurs dans J et tendant vers x dans J, par valeurs distinctes. On étudie alors la suite de donnée par $\left(\dfrac{F(x_n)-F(x)}{x_n-x}\right)$, i.e. la suite de fonctions donnée par

$$f_n(t) = \frac{f(x_n,t)-f(x,t)}{x_n-x}\,.$$

D'après 1. cette suite de fonctions converge simplement, par définition, vers $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ et cette dernière est continue par morceaux, d'après 3.

Par ailleurs le théorème de Lagrange (inégalité des accroissements finis) donne, pour t dans I, $|f_n(t)| \leq \sup\limits_A \left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t)$. On en déduit qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée et ainsi F est dérivable sur J. La continuité de F' résulte du théorème de continuité. $\square$

Remarque 13 - 7

On pourrait introduire une autre fonction dominante, pour f, afin d'obtenir le caractère intégrable dont on a besoin pour $t \mapsto f(x,t)$.

Remarque 13 - 8

La continuité et la dérivabilité étant des notions locales, on peut restreindre J dans les énoncés de domination. Par exemple si on a une fonction dominante φ_K pour tout segment inclus dans J, les mêmes (autres) hypothèses donnent la continuité et/ou le caractère C^1 de l'intégrale en fonction du paramètre.

Exemple 13 - 6

Intégrale de Gauss

On définit deux fonctions sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2$ et $G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral (Leibniz-Newton), F est de classe C^∞ et on a, pour x réel,

$$F'(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\ .$$

D'après la règle de Leibniz (dérivation sous le signe somme), G est également de classe C^1 et il vient $G'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$, soit encore, par changement de variable $G'(x) = -F'(x)$. Il en résulte que $F+G$ est constante. Comme on a

$$F(0)+G(0) = 0 + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

et $\lim_{+\infty} G = 0$, puisque $0 \leq G(x) \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{O}\left(e^{-x^2}\right)$, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 2\lim_{+\infty}\sqrt{F} = 2\sqrt{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\pi}.$$

Théorème 13 - 10

Dérivation sous le signe somme – Règle de Leibniz

Soit J et I des intervalles, f de $J\times I$ dans $\mathbf{K}$ et k dans $\mathbf{N}^*$. On suppose

1. Régularité en le paramètre : $\forall t\in I$, $x\mapsto f(x,t)\in C^k(J)$
2. Régularité des dérivées : $\forall j\in [\![0;k]\!]$, $\forall x\in J$, $t\mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\in C^0_{mcx}(I)$
3. Domination locale des dérivées : pour tout compact K inclus dans J, on dispose de φ_K continue par morceaux, **positive** et intégrable sur I vérifiant

$$\forall j\in [\![0;k]\!] \quad \forall (x,t)\in K\times I \qquad \left|\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\right| \leq \varphi_K(t)\ .$$

Alors $x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ définit une fonction F de classe C^k sur J et on a, pour $0\leq j\leq k$, $F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

Démonstration. Elle s'obtient par une récurrence directe à partir du cas $k=1$. □

Remarque 13 - 9

On peut bien entendu se dispenser de se restreindre à des compacts quand on peut obtenir une majoration indépendante de K.

Inversement on peut majorer les dérivées par des fonctions différentes. Ce n'est pas un gain substantiel puisque si chacune des dérivées est majorée par une certaine fonction, elles le sont alors toutes par la somme de ces fonctions, par positivité, et cette somme est intégrable.

Exemple 13 - 7

On s'intéresse à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}\,dt$. L'intégrande est une fonction de classe C^∞ en chacune des variables sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ et sa dérivée partielle par rapport x est $t \mapsto e^{-xt}$.

Pour $x > a > 0$, on a la majoration uniforme de cette dérivée partielle par e^{-at}.

L'intégrande étant continu en les deux variables, on a l'intégrabilité locale. En 0, un développement limité à l'ordre 1 montre que l'intégrande est prolongeable par continuité (par $x - 1$).

En $+\infty$, l'intégrande est somme d'un élément de $\mathrm{O}\left(e^{-t}\right)$ et d'un autre de $\mathrm{O}\left(e^{-at}\right)$, ce qui donne l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_+$.

On en déduit que la fonction étudiée est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, de dérivée la fonction inverse, i.e. c'est la fonction logarithme, puisqu'elle est nulle en 1.

5 Fonction Γ

Daniel Bernoulli (1700-1782) et Christian Goldbach (1690-1764) ont cherché dans les années 1720 une représentation des factorielles permettant de les généraliser à des non-entiers. La première mention en est faite dans une lettre de 1729. Cette même année Leonhard Euler a tout d'abord trouvé la représentation en produit infini

$$n! = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^n}{1+\frac{n}{k}}$$

puis la représentation intégrale

$$n! = \int_0^1 (-\ln(t))^n\,\mathrm{d}t\ .$$

En effectuant un changement de variable, $x = -\ln(t)$, on obtient $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$, ce qu'on obtient aussi par récurrence immédiate. D'où l'idée de définir la fonction Γ.

Exemple 13 - 8

Fonction Γ - Euler (1781)

Pour α dans $\mathbf{R}_+^*$, on pose

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}\ .$$

L'intégrande est une fonction continue sur $\mathbf{R}_+^*$ et y est donc localement intégrable.

Pour $\alpha \in \mathbf{R}_+^*$, on a $x^{\alpha-1}e^{-x} \underset{0^+}{\sim} x^{\alpha-1}$ et donc par critère de Riemann, l'intégrale est convergente en 0.

Pour α dans $\mathbf{R}$, on a $x^{\alpha-1}e^{-x} = \mathrm{O}_{+\infty}\left(e^{-x/2}\right)$ et donc, par critère de comparaison entre fonctions positives, l'intégrale est convergente en $+\infty$.

Aparté

La notation est due à Adrien-Marie Legendre, en 1811. Le décalage permet d'avoir une fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$, comme transformée de Mellin, et d'avoir l'équation fonctionnelle $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

La fonction Γ a de nombreuses propriétés, certaines élémentaires, d'autres plus ardues, mais toutes sont classiques !

Propriétés 13 - 8

On a $\Gamma(1) = 1$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. De plus on a

$$\forall \alpha \in \mathbf{R}_+^* \quad \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Gamma(n+1) = n!\ .$$

La fonction Γ est strictement convexe.

Démonstration. La première valeur est immédiate. Pour la seconde on a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

par changement de variable $t = x^2$. L'intégrale de GAUSS a déjà été calculée.

L'assertion suivante s'obtient par intégration par parties puisque

$$\int (\alpha x^{\alpha-1})e^{-x}\,\mathrm{d}x = x^\alpha e^{-x} + \int x^\alpha e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

et que la première fonction dans le second membre admet des limites nulles en 0 et $+\infty$. La suivante en résulte aussitôt car $\Gamma(1) = 1$.

Enfin l'intégrande est une fonction convexe de α, et même strictement convexe sauf si $x = 1$. La stricte convexité en résulte par croissance de l'intégrale. □

Propriétés 13 - 9

On a $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$ et $\lim\limits_{+\infty} \Gamma = \lim\limits_{+\infty} \frac{\Gamma(x)}{x} = +\infty$.

Démonstration. Pour x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et donc, puisque $\Gamma(x+1)$ tend vers 1 en 0, $\Gamma(x) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.

On a $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ et donc Γ' s'annule sur $\left]1;2\right[$. Par stricte convexité, Γ' est donc strictement positive sur $\left[2;+\infty\right[$ et Γ y est strictement croissante. Il vient alors, pour $x \geq 4$,

$$\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{x-1}{x}\Gamma(x-1) = \frac{(x-1)(x-2)}{x}\Gamma(x-2) \geq \frac{(x-1)(x-2)}{x}\Gamma(2) = \frac{(x-1)(x-2)}{x}$$

et donc Γ admet une branche parabolique verticale en l'infini. Le même raisonnement montre d'ailleurs qu'elle croit plus vite que tout polynôme. □

Propriété 13 - 10

La fonction Γ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$ et on a, pour n dans $\mathbf{N}$ et α dans $\mathbf{R}_+^*$,

$$\Gamma^{(n)}(\alpha) = \int_0^{+\infty} \ln^n(x) x^\alpha e^{-x} \frac{\mathrm{d}x}{x}\ .$$

Démonstration. Soit n dans $\mathbf{N}$, on définit une fonction f_n sur $\mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}_+^*$ par

$$f_n(x,t) = (\ln(t))^n\, t^{x-1} e^{-t}\ .$$

C'est une fonction continue de (x,t).

On a $f_n(t) = \mathrm{O}_{0^+}\left(t^{-1+x/2}\right)$ et $f_n(t) = \mathrm{O}_{+\infty}\left(e^{-t/2}\right)$, et donc f_n est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$. De plus sa dérivée partielle par rapport à x est f_{n+1}.

Soit maintenant a et b réels, avec $a < b$. On définit φ_n par $\varphi_n(t) = |f_n(a,t)| + |f_n(b,t)|$. Alors φ_n est un majorant des fonctions $t \mapsto f_n(x,t)$ pour x dans $[a;b]$, car le premier terme l'est si $t \leq 1$ et le second l'est sinon, et les deux termes sont positifs. D'après ce qui précède φ_n est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et ainsi le théorème de dérivation sous le signe intégral permet de conclure que Γ est de classe C^∞ de dérivées données par les intégrales des f_n. □

Remarque 13 - 10

Avec l'expression de la dérivée seconde, on retrouve la stricte convexité de Γ.

Propriété 13 - 11

La fonction Γ est logarithmiquement-convexe.

Démonstration. Soit f et g les fonctions données par

$$f(x) = x^{\alpha/2}e^{-x/2} \quad \text{et} \quad g(x) = \ln^n(x)x^{\alpha/2}e^{-x/2} .$$

Par inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à f et g, il vient $(\Gamma'(\alpha))^2 \leq \Gamma(\alpha)\Gamma''(\alpha)$, ce qui caractérise la log-convexité dans le cas des fonctions deux fois dérivables. □

Remarque 13 - 11

On peut montrer que la somme de fonctions log-convexes deux fois dérivables l'est aussi (car cette propriété est équivalente au fait additif suivant : pour tout t dans le domaine de définition de f, le trinôme du second degré $X^2 f(t) + 2Xf'(t) + f''(t)$ est positif sur $\mathbf{R}$), puis que $\displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$ l'est si $t \mapsto f(x,t)$ l'est pour tout x dans le segment $[a;b]$, en prenant des limites de sommes de Riemann, et enfin que c'est aussi vrai sur un intervalle ouvert par passage à la limite sur les bornes.

Théorème 13 - 11

Bohr - Mollerup

La fonction Γ est l'unique fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ log-convexe, valant 1 en 1 et vérifiant l'équation fonctionnelle $f(\alpha+1) = \alpha f(\alpha)$.

Démonstration. D'après ce qui précède Γ possède ces propriétés. Il s'agit donc de montrer l'unicité d'une telle fonction, notée f. Par équation fonctionnelle f et Γ coïncident sur $\mathbf{N}^*$ puisqu'elles prennent la même valeur en 1. Soit alors x réel positif non entier et p la fonction pente associée à $\ln(f)$. L'équation fonctionnelle donne, pour α et β dans $\mathbf{R}_+^*$, $p(\alpha,\alpha+1) = \ln(\alpha)$ et $p(\alpha+1,\beta+1) - p(\alpha,\beta) = \dfrac{\ln(\beta)-\ln(\alpha)}{\beta-\alpha}$. Pour n entier naturel, $\alpha = n + [x]$ et $\beta = n + x$, on a donc $p(\alpha,\alpha+1) = \ln(n) + \mathrm{o}(1)$ et $p(\alpha+1,\beta+1) - p(\alpha,\beta) = \mathrm{o}(1)$. Par convexité il vient, puisque $\alpha < \beta < \alpha+1$, $p(\alpha,\beta) \leq p(\alpha,\alpha+1) \leq p(\alpha+1,\beta+1)$ et $p(\alpha+1,\beta+1) = \ln(n) + \mathrm{o}(1)$. Par continuité de l'exponentielle, il vient $f(\beta+1) \sim n^{\beta-\alpha} f(\alpha+1)$ et, par équation fonctionnelle

$$f(x) \sim n^x \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+[x])}{n^{[x]}} \frac{f(n+1)}{x(x+1)\ldots(x+n)} \sim \frac{n^x n!}{x(x+1)\ldots(x+n)} .$$

D'où l'unicité de f puisque le membre de droite donne en une formule. □

Harald Bohr (1887–1951) est un mathématicien et footballeur danois, médaillé d'argent aux Jeux olympiques de 1908. C'est le frère du physicien et prix Nobel de physique 1922 Niels Bohr. Johannes Mollerup (1872–1937) est également danois. L'élégante démonstration précédente est celle d'Emil Artin (1898–1962), un des plus grands mathématiciens du XX^e siècle.

La définition intégrale permet de définir Γ pour tout complexe de partie réelle strictement positive et l'équation fonctionnelle permet de l'étendre au plan complexe privé des entiers négatifs. La démonstration précédente permet de retrouver la première définition d'Euler et d'en étendre le domaine de définition de façon à donner une formule pour Γ valable sur tout son domaine de définition.

Propriété 13 - 12

La fonction Γ s'étend à $\mathbf{C} \setminus \mathbf{Z}$ grâce à la formule

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{1}{z}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^z}{1+\frac{z}{n}} .$$

Voici quelques autres propriétés, dont les démonstrations sont données en exercice.

Propriété 13 - 13

Formule des compléments – Équation fonctionnelle d'Euler

Pour z non entier on a $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.

Propriété 13 - 14

Formule de duplication de Legendre

Pour $2z$ non entier négatif on a $\Gamma(z)\Gamma\left(z+\dfrac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)$.

Propriété 13 - 15

Lien avec la fonction Bêta

Pour x et y dans $\mathbf{R}_+^*$, on a

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t .$$

Toutes ces formules redonnent, pour $z = x = y = \dfrac{1}{2}$, la valeur de $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et donc de l'intégrale de Gauss.

Proposition 13 - 1

Formule de Stirling (Jean-Marc Patin - 1989)

On a $\Gamma(x) \sim \sqrt{\dfrac{2\pi}{x}}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x$ et donc

$$n! \sim \frac{\sqrt{2\pi n}n^n}{e^n} = \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n .$$

James Stirling, 1692–1770, mathématicien écossais, protégé d'Isaac Newton. Il étudie cet équivalent en vue d'accélérer la convergence de la série donnant $\zeta(2)$ en 1750, un an avant Leonhard Euler.

Démonstration. On introduit la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $f(x) = \Gamma(x)\dfrac{e^x\sqrt{x}}{x^x}$. On peut l'écrire sous forme intégrale et on effectue le changement de variable donné par $y = \sqrt{t} - \sqrt{x}$ (et donc $t - x = y(y + 2\sqrt{x})$, $\sqrt{\dfrac{t}{x}} = 1 + \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ et $\dfrac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\,\mathrm{d}y$) :

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{x}\right)^x e^{x-t}\,\frac{\sqrt{x}}{t}\,\mathrm{d}t = 2\int_{-\sqrt{x}}^{+\infty} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} e^{-2y\sqrt{x}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

On s'intéresse, pour $y > -\sqrt{x}$, au logarithme de l'intégrande. Par concavité du logarithme il vient $\ln\left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right) \leq \dfrac{y}{\sqrt{x}}$ et donc (pour $x \geq \dfrac{1}{2}$)

$$(2x-1)\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right) - 2y\sqrt{x} \leq -\frac{y}{\sqrt{x}} \leq 1$$

et, puisque $\ln\left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right) = \dfrac{y}{\sqrt{x}} - \dfrac{y^2}{2x} + \mathrm{O}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$, on a

$$(2x-1)\ln\left(1 + \frac{y}{\sqrt{x}}\right) - 2y\sqrt{x} = -y^2 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

et il en résulte, à y fixé, que l'expression donnée par $g_x(y) = \left(1 + \dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)^{2x-1} e^{-2y\sqrt{x}} e^{-y^2}$ si $y \geq -\sqrt{x}$ et $g_x(y) = 0$ sinon, tend (pour x tendant vers l'infini) vers $g(y)$ donné par $g(y) = e^{-2y^2}$. De plus $|g_x(y)| \leq e^{1-y^2}$. On peut donc appliquer le théorème de continuité sous le signe somme, et il vient

$$\Gamma(x) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\left(\frac{x}{e}\right)^x$$

et donc, en utilisant l'équation fonctionnelle, $\Gamma(x+1) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\dfrac{x}{e}\right)^x$ et on conclut en prenant n entier et en se souvenant qu'on a $\Gamma(n+1) = n!$. □

6 Compléments

6 1 Continuité pour les intégrales propres

Le théorème suivant relève de l'intégration sur les compacts, mais est facilement déduit des théorèmes de continuité et de dérivabilité sous le signe somme. Il n'est étrangement pas cité par le programme.

Théorème 13 - 12

Soit a et b deux réels, avec $a < b$, et J un intervalle réel. Soit f une fonction continue sur $J \times [a;b]$. Alors $x \mapsto \displaystyle\int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est continue sur J.

Si de plus f est de classe C^1, alors cette intégrale est de classe C^1 sur J et sa dérivée est donnée par $x \mapsto \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

La continuité partielle résulte de la continuité en fonction des deux variables. La domination sur tout compact inclus dans J résulte du théorème de WEIERSTRASS, puisqu'on intègre sur un segment.

6 2 Théorème de convergence dominée

On peut montrer que le théorème de convergence dominée est une conséquence du théorème pour la somme d'une série normalement convergente. Plus précisément, on démontre d'abord

Proposition 13 - 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux et à valeurs positives convergeant simplement vers 0 et dominées (en valeur absolue) par une fonction φ intégrable, alors $\left(\int_I f_n\right)_n$ converge vers 0.

On pose, pour n et p entiers, $f_{n,p} = \max(f_n, \ldots, f_{n+p})$ et $I_{n,p} = \int_I f_{n,p}$, ce qui est possible puisque les f_n sont intégrables car dominées, tout comme les $f_{n,p}$ (par φ). Alors la suite $(I_{n,p})_{p\in\mathbf{N}}$ est une suite croissante et majorée par $\int_I \varphi$. Elle converge donc vers sa borne supérieure, que l'on note I_n.

Soit alors, pour n entier, q_n tel que $I_n - 2^{-n} \leq I_{n,p}$ pour $p \geq q_n$. On définit une suite (p_n) par récurrence en posant $p_0 = q_0$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $p_{n+1} = \max(q_{n+1}, p_n - 1)$. Enfin on pose $g_n = f_{n,p_n}$. C'est une fonction continue par morceaux, minorée par f_n et convergeant simplement vers 0.

Par ailleurs, pour n dans $\mathbf{N}$, il vient

$$g_{n+1} - g_n = f_{n+1,p_{n+1}} - f_{n,p_n} \leq f_{n,p_{n+1}+1} - f_{n,p_n}$$

et cette dernière quantité est positive puisque $p_{n+1} + 1 \geq p_n$. Soit alors x dans I. Si $g_{n+1}(x) - g_n(x)$ est positif, on a donc $g_{n+1}(x) - g_n(x) \leq f_{n,p_{n+1}+1}(x) - f_{n,p_n}(x)$ et aussi $2(g_{n+1}(x) - g_n(x)) \leq 2\left(f_{n,p_{n+1}+1}(x) - f_{n,p_n}(x)\right)$ ou encore

$$|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq 2\left(f_{n,p_{n+1}+1}(x) - f_{n,p_n}(x)\right) + g_n(x) - g_{n+1}(x)\ .$$

Si au contraire $g_{n+1}(x) - g_n(x)$ est négatif, l'inégalité précédente résulte de la positivité de $f_{n,p_{n+1}+1} - f_{n,p_n}$. On peut donc intégrer la relation précédente et sommer pour obtenir

$$\sum_{k=0}^{n} \int_I |g_{k+1} - g_k| \leq \sum_{k=0}^{n} \left(2\left(I_k - (I_k - 2^{-k})\right) + \int_I g_k - \int_I g_{k+1}\right) \leq 4 + \int_I g_0\ .$$

On a donc affaire à une série normalement convergente. Il en résulte

$$\int_I g_n = \int_I \sum_{k=n}^{+\infty} (g_k - g_{k+1}) = \sum_{k=n}^{+\infty} \int_I (g_k - g_{k+1})$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand n tend vers l'infini en tant que reste d'une série absolument convergente. Comme $0 \leq f_n \leq g_n$, il vient $0 \leq \int_I f_n \leq \int_I g_n$ et le théorème d'encadrement des limites donne le résultat escompté.

On en déduit le théorème de convergence dominée en appliquant ce qui précède à la suite $(|f_n - f|)$ qui est bien à valeurs positives, convergeant simplement vers 0 et dominée. Il en résulte $\int_I |f_n - f| \to 0$ et $\int_I f_n \to \int_I f$.

6 3 Convergence normale et intégration

Reste donc à démontrer le théorème de convergence normale sans avoir recours au théorème de convergence dominée !

On remarque d'abord qu'on peut approcher une fonction continue par morceaux par des fonctions continues à une réunion d'intervalles petits près et donc :

Proposition 13 - 3

Soit f dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{R}_+)$, avec I un segment, et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On peut trouver g_1 et g_2 dans $C^0(I, \mathbf{R}_+)$ tels que $0 \leq g_1 \leq f \leq g_2$ et $\max\left(\int_I |f - g_1|, \int_I |f - g_2|\right) \leq \varepsilon$.

On en déduit le théorème 13 - 7. Soit donc $\sum f_n$ une série de fonctions dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$ et intégrables sur I, telle que la suite de ses sommes partielles converge simplement vers une fonction S dans $C^0_{mcx}(I, \mathbf{K})$. On suppose que la série numérique $\sum_n \int_I |f_n|$ converge. Il s'agit de démontrer que S est intégrable sur I et qu'on peut intervertir limite et intégrale.

Soit $[\,a;b\,]$ un segment inclus dans I et ε dans $\mathbf{R}_+^*$. On dispose alors de g et $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ des fonctions continues sur $[\,a;b\,]$ et à valeurs positives telles que $0 \leq g \leq |S|$ et, pour tout entier n, $|f_n| \leq g_n$, avec $\int_{[\,a;b\,]} (|S| - g) \leq \varepsilon$ et $\int_{[\,a;b\,]} (g_n - |f_n|) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$. On définit ensuite les ensembles F_n, pour n entier, par

$$F_n = \left\{ x \in [\,a;b\,] \;\middle|\; \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \leq g(x) - \varepsilon \right\} .$$

Puisqu'on a affaire à des fonctions continues, ces ensembles sont des fermés (donc des compacts) de $[\,a;b\,]$. Puisqu'on a affaire à des fonctions positives, il s'agit d'une suite décroissante de compacts. Enfin l'intersection de ces compacts est vide puisque, pour tout entier n et tout x dans F_n,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=0}^{n} g_k(x) \leq g(x) - \varepsilon$$

et donc, si x appartient à tous les F_n, on peut passer à la limite et obtenir $g(x) \leq |S(x)| \leq g(x) - \varepsilon$, ce qui est contradictoire.

Or une intersection décroissante de compacts n'est vide que si l'un des compacts est vide. On dispose ainsi d'un entier n tel que $F_n = \emptyset$. Il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_{[\,a;b\,]} |S| &\leq \varepsilon + \int_{[\,a;b\,]} g \leq \varepsilon + \int_{[\,a;b\,]} \left(\sum_{k=0}^{n} g_k + \varepsilon\right) \\
&\leq \varepsilon(1 + b - a) + \sum_{k=0}^{n} \int_{[\,a;b\,]} g_k \leq \varepsilon(1 + b - a) + \sum_{k=0}^{n} \left(\int_{[\,a;b\,]} |f_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}\right) \\
&\leq \varepsilon\left(1 + b - a + \sum_{k=0}^{n} \frac{\varepsilon}{2^k}\right) + \sum_{k=0}^{n} \int_{[\,a;b\,]} |f_k| \leq \varepsilon(3 + b - a) + \sum_{k=0}^{n} \int_{[\,a;b\,]} |f_k| \\
&\leq \varepsilon(3 + b - a) + \sum_{k=0}^{n} \int_I |f_k| \leq \varepsilon(3 + b - a) + \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |f_k| .
\end{aligned}$$

Cette inégalité finale étant vraie pour tout ε, il en résulte

$$\int_{[\,a;b\,]} |S| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |f_k|$$

et ceci démontre l'intégrabilité de S puisque les intégrales de sa valeur absolue sur tout segment inclus dans $[\,a;b\,]$ sont majorées. De plus

$$\int_I |S| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \int_I |f_k| \ .$$

En remplaçant f_k par 0 pour $k \leq n$, on obtient une série de fonctions vérifiant les mêmes hypothèses et il vient

$$\int_I \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |f_k|$$

ou encore

$$\int_I \left| S - \sum_{k=0}^{n} f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |f_k|$$

et donc, par inégalité triangulaire,

$$\left| \int_I \left(S - \sum_{k=0}^{n} f_k \right) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |f_k|$$

soit, par linéarité,

$$\left| \int_I S - \sum_{k=0}^{n} \int_I f_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_I |f_k|$$

et le théorème d'encadrement des limites permet de conclure $\lim\limits_n \sum\limits_{k=0}^{n} \int_I f_k = \int_I S$, i.e.

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int_I f_k = \int_I \sum_{k=0}^{+\infty} f_k \ .$$

Exercices

Approximation

13 - 1 CCP 2015 ★ Problème des moments

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(t) = e^{-\sqrt[4]{t}} \sin(\sqrt[4]{t})$. En considérant les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\,\mathrm{d}t$, montrer que f n'est pas limite uniforme de fonctions polynomiales sur $\mathbf{R}_+$.

13 - 2 Ⓢ X 2013 ★★ Zéros de l'exponentielle

a. Soit $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Trouver le nombre de racines réelles de P_n en fonction de n.

b. Étudier le comportement asymptotique de ces racines lorsque n tend vers l'infini.

13 - 3 Ⓢ ★★ Approximation de Laguerre

On note x l'application $t \mapsto t$ de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$.

a. Soit f continu de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe une suite de polynômes (P_n) nuls en 0 et convergeant uniformément sur $[0;1]$ vers f.

b. Soit F l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}_+$ et tendant vers 0 en l'infini, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la famille $(e^{-nx})_{n\in\mathbf{N}^*}$ est totale dans F.

c. Montrer que $e^{-x} \displaystyle\sum_{n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^k}{k!}$ converge uniformément vers 0 sur $\mathbf{R}_+$.

d. Montrer que $\left\{ e^{-x} P(x) \;\middle|\; P \in \mathbf{R}[X] \right\}$ est dense dans F.

13 - 4 P 2019 ★★★ Autour du théorème de Weierstrass

Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs tels que (P_n) converge simplement sur $\mathbf{R}$ vers une fonction notée f. Montrer que f est de classe C^∞.

13 - 5 ★★★ Autour du théorème de Weierstrass

Soit I un intervalle compact dans $\mathbf{R}$. Trouver une condition suffisante pour que toute fonction continue de I dans $\mathbf{R}$ soit limite uniforme sur I de fonctions polynomiales à coefficients entiers.

13 - 6 P 2019 ★★★ Autour du théorème de Weierstrass

Trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f de $[-1;0]$ dans $\mathbf{R}$ soit limite uniforme sur $[-1;0]$ de fonctions polynomiales à coefficients positifs.

Inégalités intégrales

13 - 7 Ⓢ C ★★ Majoration de norme L^2 ♥♥

Soit f de $[0;1]$ dans $\mathbf{C}$ de classe C^1 et telle que $f(0) = 0$.

a. Montrer $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t$.

b. Montrer que si de plus $f(1) = 0$, alors $\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{8}\int_0^1 \left|f'(t)\right|^2\mathrm{d}t$.

13 - 8 Ⓢ ENS ★★ Une inégalité

Soit f une fonction continue et positive sur $[0;1]$. Montrer

$$\int_0^1 f^3(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 4\left(\int_0^1 x^2 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 x f^2(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

13 - 9 Ⓢ ★★ Intégration de fonctions décroissantes

Soit f de $\mathbf{R}_+$ dans lui-même, de classe C^1, décroissante et γ un réel strictement positif tel que $x \mapsto x^\gamma f(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$.

a. Montrer que $x \mapsto x^{\gamma+1} f'(x)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_+$ (on remarquera que cette fonction est de signe constant).

b. En déduire que $x^{\gamma+1} f(x)$ admet une limite en $+\infty$.

c. En déduire $f(x) = \mathrm{o}_{+\infty}\left(x^{-1-\gamma}\right)$.

d. Montrer, pour α et β strictement positifs tels que $x^{2\alpha} f$ et $x^{2\beta} f$ soient intégrables, que $x^{\alpha+\beta} f$ est intégrable et qu'en posant $c = \frac{(1+2\alpha)(1+2\beta)}{(\alpha+\beta+1)^2}$, on a $0 < c < 1$ et

$$\left(\int_{\mathbf{R}_+} x^{\alpha+\beta} f\right)^2 \leqslant c \int_{\mathbf{R}_+} x^{2\alpha} f \times \int_{\mathbf{R}_+} x^{2\beta} f.$$

13 - 10 ★★★ Inégalité de Carleson

Soit f de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ de classe C^1, convexe et nulle en 0, et $\alpha > -1$.

a. Pour $p > 1$ et a dans $\mathbf{R}_+$, on note q et $I(a)$ les quantités définies par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ et

$$I(a) = \int_0^a x^\alpha \exp\left(-\frac{f(x)}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

Montrer que $p^{-(\alpha+1)} I(pa)$ est majoré par

$$\int_0^a x^\alpha \left(\exp\left(-\frac{f(x)}{x}\right)\right)^{1/p} \left(\exp\left(-f'(x)\right)\right)^{1/q}\mathrm{d}x.$$

b. En déduire

$$\int_{\mathbf{R}_+} x^\alpha \exp\left(-\frac{f(x)}{x}\right) \mathrm{d}x \leq e^{\alpha+1} \int_{\mathbf{R}_+} x^\alpha \exp\left(-f'(x)\right) \mathrm{d}x \,.$$

13 - 11 C 2011 ★★★ Fonction pente

Soit f continue et de carré intégrable de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$ et g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que g admet un prolongement continu en 0.

b. Soit a et b vérifiant $0 < a < b$.

i. Montrer

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t = ag^2(a) - bg^2(b) + 2\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

ii. En déduire

$$\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t \leq ag^2(a) + 2\sqrt{\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t} \,.$$

iii. Montrer que $\left(\int_a^b g^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}$ est majoré par

$$\left(\int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} + \left(ag^2(a) + \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} .$$

c. Montrer que g^2 et fg sont intégrables sur $\mathbf{R}_+$ et qu'on a $\displaystyle\int_{\mathbf{R}_+} g^2 = 2\int_{\mathbf{R}_+} fg$.

13 - 12 ★★★ Inégalité de Carleman

Soit $\sum a_n$ une série convergente à termes strictement positifs.

a. Exhiber une fonction en escalier sur $\mathbf{R}_+$ telle qu'on ait, pour tout entier naturel non nul n, $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} = \exp\left(\displaystyle\int_0^1 \ln(f(nx))\,\mathrm{d}x\right)$.

b. En déduire $(a_1a_2\cdots a_n)^{1/n} \leq \dfrac{e}{2n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^n (2k-1)a_k$.

c. En déduire l'inégalité de Carleman :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_1a_2\cdots a_k)^{1/k} \leq e\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

et en particulier que la série du membre de gauche est convergente.

13 - 13 Ⓢ ★★★ Inégalité de Heisenberg

Soit f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, de classe C^1 et telle que xf et f' sont de carré intégrable.

a. Soit x et t dans $\mathbf{R}_+$. Montrer

$$|f(x+t)| \geq |f(x)| - \sqrt{t}\sqrt{\int_x^{+\infty} f'(u)^2\,\mathrm{d}u} \,.$$

b. En déduire que, pour x dans $\mathbf{R}_+$ et h positif assez petit, $\displaystyle\int_x^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t$ est supérieur à

$$x^2 h\left(|f(x)| - \sqrt{h}\sqrt{\int_x^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t}\right)^2 .$$

On pourra commencer par remarquer

$$\int_x^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t \geq \int_x^{x+h} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t \,.$$

c. En choisissant h, en déduire

$$\int_x^{+\infty} t^2 f(t)^2\,\mathrm{d}t \int_x^{+\infty} f'(t)^2\,\mathrm{d}t \geq \frac{x^2 f(x)^4}{16} \,.$$

d. En déduire qu'on a, au voisinage de $\pm\infty$, $f(x) = \mathrm{o}\left(|x|^{-1/2}\right)$.

e. Montrer

$$\|f\|_2^2 \leq 2\,\|xf\|_2 \times \left\|f'\right\|_2$$

où la norme est donnée par la moyenne quadratique sur $\mathbf{R}$.

13 - 14 Ⓢ Second théorème de la moyenne – Pierre-Ossian Bonnet

Soit f et g continues et intégrables sur un intervalle I avec $I = [a;b]$. On suppose g décroissante et positive. On souhaite démontrer le second théorème de la moyenne :

$$\exists c \in \left]a;b\right] \qquad \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t = g(a)\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \,.$$

a. Démontrer le théorème en supposant de plus g de classe C^1.

b. Démontrer le théorème dans le cas général.

Limites

13 - 15 Ⓢ ★

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2(t)}\,\mathrm{d}t$.

13 - 16 Ⓢ ★

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^x \frac{t^2}{t+e^{3t}}\,\mathrm{d}t$.

13 - 17 Ⓢ ★

Montrer $\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{2x} \frac{\cos(t)\ln(1+t^2)}{\sin^2(t)\,\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = \ln(2)$.

13 - 18 Ⓢ ★

Montrer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_3^{x^2+x} \frac{\sin(t)\,\mathrm{d}t}{3+\ln(\ln(t))} = 0.$

13 - 19 Ⓢ ★

Montrer $\lim\limits_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^{-t}\,\mathrm{d}t}{\sin(t)\ln(t)} = \ln(2).$

13 - 20 Ⓢ ★★

Établir la convergence et calculer

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}\ .$$

13 - 21 Ⓢ ★★ ♥

Soit f de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Montrer

$$\int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f(1)}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\ .$$

13 - 22 Ⓢ ★

Soit f de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Montrer

$$\lim_n \int_0^1 f(t^n)\,\mathrm{d}t = f(0)\ .$$

13 - 23 Ⓢ ★★

Donner un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n\,\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

13 - 24 Ⓢ ★★

Donner un équivalent simple de $\int_0^1(\sqrt{1+t^n}-1)\,\mathrm{d}t$.

13 - 25 Ⓢ ★★

Donner un équivalent simple de $\int_1^{1+1/n}\sqrt{1+t^n}\,\mathrm{d}t$.

13 - 26 Ⓢ ★★

Soit f de $[0;1]$ dans $\mathbf{R}$ continue. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\displaystyle\int_0^1 \frac{xf(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

13 - 27 ★★

Donner un équivalent pour $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

13 - 28 Ⓢ ★★

a. Montrer que l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t+x}\,\mathrm{d}t$ existe pour $x>0$.

b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} I(x)$.

13 - 29 ★★

Soit $a>0$. Donner le développement limité en $x=1$ à l'ordre 3 de $\displaystyle\int_{a/x}^{ax} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

13 - 30 Ⓢ **Mines 2011** ★★

Soit f de classe C^2 de $\mathbf{R}$ dans lui-même telle que $\lim\limits_{x\to+\infty}(f''(x)+f'(x)+f(x)) = 0$. Démontrer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

13 - 31 Ⓢ ★★★

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de fonctions définie sur $[0;1]$ par : $f_n(x) = \left(\dfrac{x+x^n}{2}\right)^n$.

a. Montrer que (f_n) converge simplement vers une fonction φ.

b. La convergence est-elle uniforme ?

c. La convergence est-elle monotone ?

d. Soit, pour $n\in\mathbf{N}^*$, $J_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$. Montrer $J_n \sim \dfrac{2}{n^2}$.

Fonctions définies par une intégrale

13 - 32 Ⓢ ★

Montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}\,\mathrm{d}t = \arctan(x)$, pour x réel, par dérivation.

13 - 33 Ⓢ ★

a. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+at}$.

b. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{t\,\mathrm{d}t}{(1+at)^2}$.

13 - 34 Ⓢ ★★ **Transformée de Fourier**

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} e^{ixt}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f vérifie l'équation différentielle $y' = \dfrac{i}{2(1-ix)}y$.

b. En déduire que, pour x réel, $f(x) = \sqrt{\pi}\dfrac{e^{i\arctan(x)/2}}{\sqrt[4]{1+x^2}}$.

13 - 35 ★★

a. Montrer $\displaystyle\int_0^1 x^n(-\ln(x))^n\,\mathrm{d}x = \frac{n!}{(n+1)^{n+1}}$.

b. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^x}$.

13 - 36 Ⓢ ★★

On pose $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{-x/t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_+^*$.

b. Calculer explicitement φ''.

13 - 37 ★★

Domaine de définition de $\displaystyle\int_x^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(t-x)(1-t)}}$ et limite en 1.

13 - 38 ★★

Domaine de définition de $\displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1+t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$ et limite en 0.

13 - 39 ★★ **Transformée de Mellin**

Soit $I(\alpha)$ donné par $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que $I(\alpha)$ existe et définit une fonction de classe C^1 sur $]0;1[$.

b. Écrire $I(\alpha)$ comme somme d'une série.

13 - 40 Ⓢ ★★

a. Étudier les variations (mais pas les valeurs aux bornes) de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} .$$

b. Donner une relation entre $f(x)$ et $f(x-2)$.

c. Calculer f sur les entiers naturels.

d. Montrer que la fonction donnée par $g(x) = xf(x)f(x-1)$ est périodique de période 1 et en déduire qu'elle est constante.

e. Donner un équivalent de f en l'infini et terminer le tableau de variations.

13 - 41 Ⓢ ★★ ♥

On pose, pour x réel, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que les intégrales $F(x)$ et $G(x)$ convergent absolument pour tout x réel et qu'on a $F(x) = |x|\,F(1)$.

b. Montrer que la fonction $F-G$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

c. En déduire que G est de classe C^1 sur $\mathbf{R}^*$ et n'est pas dérivable en 0.

13 - 42 ★★

a. Pour a dans $\mathbf{R}_+^*$, existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$. On pourra poser $u = a^2/t$.

b. Pour x dans $\mathbf{R}_+$, on pose

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t .$$

Calculer explicitement f' et en déduire f.

13 - 43 Ⓢ ★★ **Transformée de Fourier d'une Gaussienne**

a. Soit $I(x)$ définie par $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(2xt)\,\mathrm{d}t$.

Montrer que I est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

b. Donner une relation simple entre I et I'.

c. En déduire la valeur de $I(x)$.

13 - 44 ★★

Étudier $J(a)$ puis $I(a,b)$ définis par $J(a) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a+\cos(t)}$ et

$$I(a,b) = \int_0^{\pi} \frac{\cos(t)\,\mathrm{d}t}{(a+\cos(t))(b+\cos(t))} .$$

13 - 45 Ⓢ **Magistère 2017** ★★ **Intégrale de Dirichlet** ♥

On pose, pour x dans $\mathbf{R}_+$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f et g sont définies et continues sur $\mathbf{R}_+$.

b. Montrer que f et g satisfont à une même équation différentielle linéaire sur $\mathbf{R}_+^*$.

c. Montrer que f et g sont égales et en déduire $g(0)$.

13 - 46 Ⓢ ★★ **Division des fonctions** ♥

Soit f une fonction dans $C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$ et g définie par $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = f'(0)$.

a. Vérifier $g(x) = \displaystyle\int_0^1 f'(tx)\,\mathrm{d}t$.

b. En déduire que g est de classe C^∞.

c. Montrer de même que la fonction g_k définie sur $\mathbf{R}^*$ par

$$\frac{f(x)-f(0)-xf'(0)-\cdots-\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(0)}{x^k}$$

se prolonge en une fonction de classe C^∞ en 0.

13 - 47 Ⓢ ★★ **Formule de DUHAMEL**

Soit f dans $C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On pose

$$g(x) = \int_0^x f(t)\sin(x-t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer que g est l'unique solution de l'équation différentielle $y''+y=f(x)$ telle que $y(0)=y'(0)=0$.

13 - 48 ★★★

a. Étudier les variations de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(x^2-t^2)}}\ .$$

b. Donner un équivalent de f en l'infini.

c. Montrer qu'il existe deux constantes a et b telles que, en 1^+, on ait

$$f(x) = a\ln(x-1)+b+\mathrm{o}\,(1)\ .$$

<u>Indication</u> : on introduira la fonction g donnée par

$$g(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)\sqrt{(1-t)(x-t)}}$$

pour $1<x<2$.

Études de fonctions

13 - 49 Ⓢ **CCP 2017** ★★

Soit f de $\mathbf{R}$ dans lui-même définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+e^{-nx})$.

On suppose connu $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

a. Donner l'ensemble de définition de f et étudier ses variations.

b. Trouver la limite de f en $+\infty$.

c. On note $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\,\mathrm{d}u$. Montrer que I est bien définie et qu'on a $I = \dfrac{\pi^2}{12}$.

<u>Indication</u> : on pourra utiliser un développement en série entière.

d. En déduire qu'on a $f(x) \sim_{0^+} \dfrac{\pi^2}{12x}$.

13 - 50 Ⓢ ★★

On considère $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^x(1+t)}$.

a. Domaine de définition, monotonie, convexité de f (sans dériver f).

b. Continuité, dérivabilité, calcul de $f^{(k)}$.

c. Donner un équivalent de f en 0 et en 1.

d. Calculer $f(1/n)$ pour $n\in\mathbf{N}$, $n\geq 2$.

13 - 51 **C 2018** ★★

Soit S défini par $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1+x^2n^2}$.

a. Donner l'ensemble de définition de S.

b. Donner un équivalent de S en $+\infty$.

c. Montrer que S est intégrable sur $\mathbf{R}_+^*$ et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} S(t)\,\mathrm{d}t$.

13 - 52 Ⓢ ★★

Soit $\sum_n u_n$ la série de fonctions donnée par : $u_n(t) = t^{n-1}\sin(nx)$ pour x dans $]0;\pi[$.

a. Étudier la convergence de la série.

b. Calculer $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} u_p(t)$. On le notera $S_n(t)$ et on le mettra sous la forme $\dfrac{P_n(t)}{Q(t)}$ avec $Q(t)\geq\alpha>0$.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n(t)$ et $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(t)\,\mathrm{d}t$.

d. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}$.

13 - 53 Ⓢ ★★

Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2x}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Trouver le domaine de définition de f.

b. Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.

c. Calculer $f-f'$.

d. Donner un équivalent simple de $f'(x)$ pour $x\to+\infty$.

e. Montrer $f(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{4x\sqrt{x}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\right)$.

f. Tracer la courbe de f.

13 - 54 ★★

Existence et continuité de f donné par

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-|x+t|}\cos(x+t)}{\sqrt{|t|}(1+|t|)}\,\mathrm{d}t\ .$$

Montrer que f est intégrable.

13 - 55 Ⓢ **M 2013** ★★ **Transformée de LAPLACE** ♥

Soit, pour x dans $\mathbf{R}_+$, $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que F est continue sur $\mathbf{R}_+$.

b. Déterminer sa limite en $+\infty$.

c. Montrer que F est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_+^*$ et en déduire F''.

d. Calculer $F(0)$.

13 - 56 Ⓢ ★★

Soit a et b deux fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans lui-même telles que $a \geq 1$ et $\lim\limits_{+\infty} b = 0$.

a. Montrer que toute solution de l'équation : $y' + ay = b$ tend vers 0 en $+\infty$.

b. On suppose $\lim\limits_{-\infty} b = 0$. Montrer qu'il y a une unique solution y qui tend vers 0 en $-\infty$.

13 - 57 **Magistère 2017** ★★★

On note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

a. Montrer que f est bien définie sur $\mathbf{R}$.

b. Trouver des réels a et b tels que $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{b + n^2}$.

On pourra remarquer $\dfrac{1}{e^t - 1} = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$.

c. Trouver un équivalent de f en l'infini.

13 - 58 ★★★

Soit f continue de $\mathbf{R}$ dans lui-même et a et b deux réels tels que $a < b$.

On suppose que $\lim_{-\infty} f$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existent. Montrer l'existence et calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f(a+x) - f(b+x))\,\mathrm{d}x\ .$$

13 - 59 ★★★ **Transformée de Laplace**

Soit f dans $C^0(\mathbf{R}_+, \mathbf{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge (pas forcément absolument). On pose

$$\varphi(a) = \int_0^{+\infty} e^{-at} f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

a. Montrer que φ est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.

b. Montrer que φ est continue en 0.

13 - 60 ★★★ **Phase stationnaire**

a. Soit f dans $C^2([a;b], \mathbf{R})$ et F donnée par $F(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)e^{-itx}\,\mathrm{d}t$, avec $a < 0 < b$. Montrer $F(x) \to 0$ en $+\infty$.

b. Montrer $F(x) = \dfrac{f(a)e^{-iax} - f(b)e^{-ibx}}{ix} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

c. Montrer la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it^2/2}\,\mathrm{d}t$.

d. Soit g donnée par $g(x) = \displaystyle\int_a^b f(t)e^{-ixt^2/2}\,\mathrm{d}t$. Montrer $g(x) = \dfrac{I.f(0)}{\sqrt{x}} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

Fonction Γ

13 - 61 ★ **Caractérisation de la convexité**

Pour f une fonction à valeurs réelles, x et $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans son domaine de définition, on note $F(x) = (1, x, f(x))$ et $V_f(x_1, \ldots, x_n) = \det(F(x_1), \ldots, f(x_n))$. En particulier V_{Id} est le déterminant de Vandermonde, et on le note V. Montrer que f est convexe sur un intervalle réel ouvert si et seulement si, pour tous x, y et z distincts dans son domaine de définition $V_f(x, y, z)/V(x, y, z) \geq 0$.

En déduire qu'une somme finie, une limite simple ou la somme d'une série de fonctions convexes est également convexe.

13 - 62 Ⓢ ★ **Log-convexité**

a. Montrer qu'une fonction définie sur un intervalle ouvert réel et dans $\mathbf{R}_+^*$ est log-convexe sur cet intervalle si et seulement si elle y est continue et vérifie, pour tous a et b dans son domaine de définition $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \leq f(a)f(b)$.

b. Interpréter avec des moyennes et en déduire qu'une fonction log-convexe est convexe.

c. Soit x, y, z, x', y' et z' des réels. Montrer que $xx'((x + x')(z + z') - (y + y')^2)$ est la somme de $x(x+x')(x'z' - y'^2)$, $x'(x+x')(xz - y^2)$ et d'un terme positif. En déduire que la somme de deux fonctions log-convexes sur le même intervalle l'est aussi.

13 - 63 Ⓢ ★★ **Formule de multiplication de Gauss**

Soit, pour p entier supérieur à 2,

$$f(x) = p^x \Gamma\left(\frac{x}{p}\right) \Gamma\left(\frac{x+1}{p}\right) \cdots \Gamma\left(\frac{x+p-1}{p}\right)\ .$$

a. Donner le domaine de définition de f et montrer sa log-convexité.

b. Déduire du théorème de Bohr-Mollerup qu'on a $f(x) = a_p \Gamma(x)$ avec $a_p = p \displaystyle\prod_{k=1}^{p} \Gamma\left(\frac{k}{p}\right)$.

c. En utilisant la formule de Stirling montrer $a_p = \sqrt{p}\sqrt{2\pi}^{p-1}$ et retrouver en particulier la formule de duplication de Legendre.

13 - 64 Ⓢ ★★ **Intégrales et formule de Wallis**

On pose maintenant, pour n dans $\mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Donner une formule de récurrence reliant I_{n+2} à I_n et en déduire une formule pour I_{2n} et I_{2n+1}.

b. En déduire la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2}{1.3}\frac{4.4}{3.5}\frac{6.6}{5.7}\cdots$$

c. En considérant $(n+1)I_nI_{n+1}$, déduire de la relation de récurrence l'équivalent $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

John Wallis, 1616–1703, mathématicien, cryptographe et théologien anglais, précurseur d'Isaac Newton mais aussi de la phonétique, de l'éducation des sourds et de l'orthophonie.

13 - 65 Ⓢ ★★ **Formule de Stirling**

On pose, pour n dans $\mathbf{N}^*$, $u_n = \dfrac{n!}{\sqrt{2\pi n}}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n$ et, pour $n \geq 2$, $v_n = \ln\left(\dfrac{u_n}{u_{n-1}}\right)$.

a. Montrer que $(v_n)_{n\geq 2}$ est bien défini et que $\sum v_n$ converge.

b. En déduire que (u_n) converge, puis en utilisant les intégrales de Wallis (exercice 13 - 64), montrer $\lim u_n = 1$.

13 - 66 Ⓢ ★★ **Intégrales de Wallis**

Convergence et somme de $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

13 - 67 Ⓢ ★★ **Intégrale de Gauss**

a. Montrer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \lim_n \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$.

b. En déduire la valeur de l'intégrale Gauss en utilisant les intégrales de Wallis (exercice 13 - 64).

13 - 68 Ⓢ ★★★ **Formule de Weierstrass**

a. Déduire de l'expression donnée par Euler de la fonction Γ qu'on a, pour x distinct d'un entier négatif et en notant γ la constante d'Euler

$$\Gamma(x) = \frac{1}{xe^{\gamma x}}\prod_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{x/n}}{1+x/n}\ .$$

b. On note $\Psi = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$. Montrer que, pour x réel strictement positif et k entier naturel non nul, on a

$$\Psi^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{k+1}\frac{k!}{(x+n)^{k+1}}\ .$$

c. En déduire que Ψ est développable en série entière au voisinage de tout point de $\mathbf{R}_+^*$.

13 - 69 Ⓢ ★★★ **Fonction Bêta**

Soit $B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$.

a. Donner le domaine de définition de B.

b. Déduire du théorème de Bohr-Mollerup qu'on a, pour x et y strictement positifs

$$B(x+y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}\ .$$

c. En déduire $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

13 - 70 Ⓢ ★★★ **Équation fonctionnelle d'Euler**

a. Soit f dans $C^0(\mathbf{R},\mathbf{R})$, 1-périodique et vérifiant pour tout réel x, $f\left(\dfrac{x}{2}\right) + f\left(\dfrac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$. Montrer que f est nulle.

b. Soit g donnée par $g(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin(\pi x)$. Préciser le domaine de définition de g. En utilisant l'équation fonctionnelle de Γ montrer qu'on peut prolonger g en une fonction 1-périodique de classe C^2 sur $\mathbf{R}$.

c. En déduire, en utilisant la formule de duplication (exercice 13 - 63), l'équation fonctionnelle d'Euler, i.e. $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

d. Déduire de la formule de Weierstrass le développement en produit de Wallis

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \sin(x) = x\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\ .$$