

# $L^2$ – Espaces préhilbertiens



David HILBERT est un des plus grands mathématiciens du XX<sup>e</sup> siècle. Il a créé ou développé un large éventail d'idées fondamentales et a posé, en 1900, ses 23 fameux problèmes qui ont durablement influencé les recherches mathématiques du XX<sup>e</sup> siècle. HILBERT et ses étudiant(e)s ont fourni une portion significative de l'infrastructure mathématique nécessaire à l'éclosion de la mécanique quantique et de la relativité générale.

Vers 1910, HILBERT soutient les efforts d'Emmy NOETHER qui souhaite enseigner à l'université de Göttingen. Pour l'anecdote, afin de déjouer le système établi, HILBERT prête son nom à NOETHER qui peut ainsi annoncer l'horaire de ses cours sans encombres (ce qui ne lui donne toutefois ni poste officiel, ni rémunération).

En 1933, HILBERT voit les nazis limoger plusieurs membres éminents de l'université de Göttingen : Hermann WEYL, Emmy NOETHER, Edmund LANDAU etc. Lorsque, invité à un banquet et assis à côté du ministre de l'Éducation Bernhard RUST ce dernier lui demande « Comment se trouvent les mathématiques à Göttingen maintenant qu'elle est libre de l'influence juive ? », HILBERT répond « Des mathématiques à Göttingen ? Il n'y en a plus guère ». Lorsque HILBERT meurt en 1943, les nazis ont complètement restructuré l'université, tous les Juifs et conjoints de Juifs forcés de partir, certains ayant réussi à fuir l'Allemagne, d'autres déportés. Seulement une douzaine de personnes assistent à ses funérailles, dont deux ex-collègues. Sur sa tombe à Göttingen, on peut lire cet épitaphe : Wir müssen wissen, wir werden wissen.

## Introduction

### Programme

L'objectif de ce chapitre est triple : consolider les acquis de MPSI concernant les espaces préhilbertiens réels et euclidiens ; introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ; à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de MPSI relatives aux isométries et celles de MP relatives à la réduction des endomorphismes.

Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels. Toute notion sur les **espaces préhilbertiens complexes** est hors programme. La notion de **forme quadratique** est hors programme.

- Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie. Caractérisation métrique du projeté orthogonal. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale. Inégalité de BESSEL.
- Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel. Suite totale. Si  $(e_k)_{k \in \mathbf{N}}$  est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien  $E$ , et si, pour tout  $n$  de  $\mathbf{N}$ ,  $p_n$  désigne le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ , alors, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $(p_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$  converge vers  $x$ .

Exemples de suites de polynômes orthogonaux. Calcul explicite des polynômes d'une telle suite, application à l'approximation des fonctions.

- Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Théorème spectral. Les notions d'**adjoint** d'un endomorphisme, d'**endomorphisme symétrique positif** (ou **défini positif**) sont hors programme.
- Isométrie vectorielle d'un espace euclidien (automorphisme orthogonal). Matrices orthogonales. Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable. Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale. Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3. La forme réduite justifie la terminologie « rotation ».

Afin d'étudier des espaces de fonctions, David HILBERT a introduit une classe d'espaces vectoriels généralisant les espaces dans lesquels sont développés la géométrie d'EUCLIDE. Plusieurs outils sont nécessaires pour cela et le premier d'entre eux est le produit scalaire. Grâce au produit scalaire, on peut définir une norme, une distance et donc une topologie, i.e. une façon de décrire si deux éléments de l'espace sont proches.

Les espaces de HILBERT jouissent d'une propriété supplémentaire, la complétude, qui est une notion d'analyse. Elle s'obtient souvent en enrichissant l'espace de départ et n'apparaîtra pas dans ce cours. Ces espaces ont été introduit par David HILBERT en 1909. Leur utilisation est fondamentale en physique, que ce soit en relativité (MINKOWSKI, HILBERT, EINSTEIN ...) ou en mécanique quantique. Un exemple assez saisissant d'une propriété algébrique ayant des conséquences physiques est l'inégalité fondamentale de CAUCHY-SCHWARZ qui se traduit par le principe d'indétermination de HEISENBERG.

Sans aller jusque là, la notion d'espace préhilbertien joue un rôle central dans l'étude des séries et de la transformation de FOURIER et donc dans la théorie du signal. L'étude

des ondes en physique, quelle que soit leur nature, repose sur ces notions.

**(♠) Forme bilinéaire**

Soit  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels réels. Une forme bilinéaire sur  $E \times F$  est une application  $\varphi$  de  $E \times F$  dans  $\mathbf{R}$  qui est linéaire en chacune des variables, i.e.  $\forall (x_1, x_2) \in E^2, \forall (y_1, y_2) \in F^2, \forall (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2) \in \mathbf{R}^4$ ,

Définition 12 - 1

$$\varphi(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \lambda_i \mu_j \varphi(x_i, y_j).$$

On note  $\mathcal{L}_2(E \times F)$  l'ensemble des formes bilinéaires sur  $E \times F$ .

On peut le formuler autrement. Soit, pour  $x$  dans  $E$ ,  $\varphi_x$  l'application partielle donnée par  $y \mapsto \varphi(x, y)$  et  $\psi_1$  l'application  $x \mapsto \varphi_x$ . De même, soit  $\varphi_y$  la seconde application partielle et  $\psi_2$  l'application  $y \mapsto \varphi_y$ . Alors  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont des formes linéaires et  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont des applications linéaires, i.e. en notant  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ ,

$$\psi_1 \in \mathcal{L}(E, F^*) \quad \text{et} \quad \psi_2 \in \mathcal{L}(F, E^*).$$

Propriété 12 - 1

Pour  $E$  et  $F$  des espaces vectoriels réels,  $\mathcal{L}_2(E \times F)$  est un espace vectoriel et on a

$$\mathcal{L}_2(E \times F) \simeq \mathcal{L}(E, F^*) \simeq \mathcal{L}(F, E^*).$$

Définition 12 - 2

Soit  $E$  un espace vectoriel réel, on note  $\mathcal{L}_2(E)$  l'espace des formes bilinéaires sur  $E$ , i.e. sur  $E \times E$ . On a alors deux isomorphismes canoniques  $\mathcal{L}_2(E) \simeq \mathcal{L}(E, E^*)$  donnés par  $\psi_1$  et  $\psi_2$ .

**(♠) Forme bilinéaire symétrique ou anti-symétrique**

a. Si les deux isomorphismes canoniques coïncident, on dit que  $\varphi$  est symétrique. Il est équivalent de demander

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = \varphi(y, x).$$

On note  $\mathcal{L}_2^{sym}(E)$  l'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur  $E$ .

Définition 12 - 3

b. Si les deux isomorphismes canoniques diffèrent d'un signe, on dit que  $\varphi$  est antisymétrique. Il est équivalent de demander

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \varphi(x, y) = -\varphi(y, x).$$

c. Cette dernière propriété est équivalente à une autre : on dit que  $\varphi$  est alternée si

$$\forall x \in E, \quad \varphi(x, x) = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire antisymétrique et  $x$  dans  $E$ . On a  $\varphi(x, x) = -\varphi(x, x)$  en spécialisant l'identité de définition en  $y = x$  et on en déduit  $\varphi(x, x) = 0$ , i.e.  $\varphi$  est alternée.

Réciproquement si  $\varphi$  est alternée, soit  $x$  et  $y$  dans  $E$ . On a alors  $\varphi(x+y, x+y) = 0$  et donc par bilinéarité  $\varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) = 0$ . Il en résulte, par définition,  $\varphi(x, y) + \varphi(y, x) = 0$  et donc  $\varphi$  est antisymétrique.  $\square$

## Remarque 12 - 1

Si le corps de base n'est pas de caractéristique 2, antisymétrie et aspect alterné sont deux notions identiques.

En caractéristique 2, antisymétrie et symétrie sont deux notions identiques ! De plus une forme alternée est antisymétrique. La réciproque n'est plus vraie en général.

## Pour aller plus loin

- Les seuls automorphismes d'ordre fini de l'espace vectoriel  $\mathbf{R}$  sont l'identité et la multiplication par  $-1$ . En fait les seuls automorphismes de l'espace vectoriel  $\mathbf{R}$  sont les homothéties  $h_a$  de rapport  $a$  non nul. Or, pour  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , on a  $h_a^n = h_{a^n}$  et donc  $h_a^n = \text{Id}_{\mathbf{R}}$  si et seulement si  $a^n = 1$ . Les automorphismes d'ordre fini correspondent donc aux racines de l'unité, i.e.  $\pm 1$ .
- Les notions précédentes peuvent donc s'écrire  $\psi_2 = \tau \circ \psi_1$  où  $\tau$  est un automorphisme d'ordre fini de  $\mathbf{R}$ .
- Les notions précédentes s'étendent à des espaces vectoriels sur des corps autres que  $\mathbf{R}$  et on peut alors prendre pour  $\tau$  d'autres automorphismes, quand ils existent.

Si on étudie  $\varphi$  en se donnant un élément  $x$  de  $E$ , on a deux notions naturelles d'annulation : soit on plonge  $E$  dans  $E \times E$  diagonalement et on évalue  $\varphi$  sur l'image de  $x$ , soit on voit  $\varphi$  comme un élément de  $\mathcal{L}(E, E^*)$  et on prend l'image de  $x$ . Ceci amène à plusieurs notions importantes :

## Définition 12 - 4

**(♠) Forme quadratique**

On appelle forme quadratique associée à la forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}_2^{\text{sym}}(E)$ , l'application  $q$  donnée par

$$\forall x \in E, \quad q(x) = \varphi(x, x).$$

On note  $q_\varphi$  cette forme quadratique et  $\mathcal{Q}(E)$  l'ensemble des formes quadratiques.

## Aparté

En fait  $q = \varphi \circ \Delta$  où  $\Delta$  est l'homomorphisme diagonal de  $E$  dans  $E^2$ .

## Définition 12 - 5

**(♠) Forme bilinéaire symétrique non-dégénérée**

On dit qu'une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}_2^{\text{sym}}(E)$  est non-dégénérée si  $\text{Ker}(\psi_1) = \text{Ker}(\psi_2) = \{0\}$ . Autrement dit

$$\forall x \in E, ((\forall y \in E \varphi(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0)$$

ou bien, car c'est équivalent lorsque la forme est symétrique,

$$\forall x \in E, ((\forall y \in E \varphi(y, x) = 0) \Rightarrow x = 0)$$

## Pour aller plus loin

On dit qu'une forme bilinéaire  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}_2(E)$  est non-dégénérée à gauche (respectivement à droite) si  $\text{Ker}(\psi_1) = \{0\}$  (respectivement  $\text{Ker}(\psi_2) = \{0\}$ ).

**(♠) Cône isotrope – Forme bilinéaire symétrique définie ou positive**

On appelle cône isotrope de la forme quadratique  $q$  l'ensemble des valeurs d'annulation de  $q$ , i.e.  $\{x \in E \mid q(x) = 0\}$ , et on dit qu'une forme bilinéaire symétrique  $\varphi$  dans  $\mathcal{L}_2^{sym}(E)$  est

- a. définie si le cône isotrope de  $q_\varphi$  est réduit à  $\{0\}$ , i.e.

$$\forall x \in E \quad (\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0) .$$

- b. positive (respectivement négative) si  $q_\varphi$  est à valeurs positives (respectivement négatives), i.e.

$$\forall x \in E \quad \varphi(x, x) \geq 0 .$$

Définition 12 - 6

Une forme bilinéaire symétrique définie est également non-dégénérée. En effet si  $\varphi$  est une forme bilinéaire symétrique définie et si  $x$  dans  $E$  est tel que  $\forall y \in E \varphi(x, y) = 0$ , alors en particulier  $\varphi(x, x) = 0$  et donc, puisque  $\varphi$  est définie,  $x = 0$ . Il en résulte que  $\varphi$  est non-dégénérée.

Remarque 12 - 2

Les ensembles  $\mathcal{L}_2^{sym}(E)$  et  $\mathcal{Q}(E)$  sont des espaces vectoriels réels.

Propriété 12 - 2

- a. Soit  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et  $\varphi(A, B) = \text{Tr}(AB)$ . C'est une forme bilinéaire symétrique. Elle est positive sur l'espace des matrices symétriques et négative sur celui des matrices antisymétriques. Elle n'est pas définie.

- b. Soit encore  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et  $\varphi(A, B) = \text{Tr}({}^tAB)$ . C'est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

- c. Soit  $E = \mathbf{R}[X]$ ,  $a$  dans  $\mathbf{R}$  et  $\varphi(P, Q) = P(a)Q(a)$ . C'est une forme bilinéaire symétrique positive. Elle n'est pas non-dégénérée.

- d. Soit  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels réels quelconques,  $a$  dans  $E^*$  et  $b$  dans  $F^*$ . On définit un élément  $a \otimes b$  de  $\mathcal{L}_2(E \times F)$  en posant  $a \otimes b(x, y) = a(x)b(y)$ . On définit une forme bilinéaire symétrique en posant  $a \cdot b = a \otimes b + b \otimes a$  et une forme bilinéaire antisymétrique en posant  $a \wedge b = a \otimes b - b \otimes a$ .

Exemples 12 - 1

On suppose que  $E$  et  $F$  sont deux espaces vectoriels réels de dimension finie. En prenant des bases il vient

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}_2(E \times F), \quad \varphi = \sum_{i,j} \varphi(e_i, f_j) e_i^* \otimes f_j^*$$

Pour aller plus loin

et donc  $\mathcal{L}_2(E \times F) = E^* \otimes F^* = \text{Vect}(a \otimes b)_{a \in E^*, b \in F^*}$ .

Ce résultat est à comparer à l'identité  $\mathcal{L}(E, F) = E^* \otimes F$ . On voit donc que les formes bilinéaires se représenteront par des matrices, comme les applications linéaires, mais que l'interprétation des matrices sera différente ... subtilement différente, puisqu'elle met en œuvre la notion hors-programme de dualité.

**Produit scalaire**

La seule notion au programme est celle de produit scalaire, i.e. de forme bilinéaire symétrique définie positive.

Programme

# 1 Orthogonalité

Dans ce paragraphe  $E$  est un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire noté  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

## Définition 12 - 7

### Espace préhilbertien – Espace euclidien

Un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire est dit préhilbertien. S'il est, de plus, de dimension finie, on dit que c'est un espace euclidien.

## Définition 12 - 8

### Orthogonalité

- Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$ . On dit qu'ils sont orthogonaux et on note parfois  $x \perp y$  si  $\langle x | y \rangle = 0$ .
- Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dit que c'est une famille orthogonale si, pour  $i$  et  $j$  distincts dans  $I$ , on a  $x_i \perp x_j$ .
- On dit qu'une telle famille est orthonormale si, pour  $i$  et  $j$  dans  $I$ , on a  $\langle x_i | x_j \rangle = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  est le symbole de KRONECKER).
- Si  $A$  est une partie de  $E$ , on note  $A^\perp$  ou  $A^0$  l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de  $A$ , i.e.

$$A^0 = A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a | x \rangle = 0\} .$$

## Théorème 12 - 1

Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre. En particulier une famille orthonormale est libre.

*Démonstration.* Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille orthogonale formée de vecteurs non nuls et  $(\lambda_i)_{i \in I}$  une famille presque nulle de scalaires telle que  $\sum_{i \in I} \lambda_i e_i = 0$ . Soit  $j$  dans  $I$ , on a donc

$$0 = \left\langle e_j \left| \sum_{i \in I} \lambda_i e_i \right. \right\rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle e_j | e_i \rangle = \lambda_j \|e_j\|^2$$

et donc, pour tout  $j$  dans  $I$ ,  $\lambda_j = 0$ . □

## Théorème 12 - 2

### Théorème de PYTHAGORE

Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille finie orthogonale de vecteurs de  $E$ . On a

$$\left\| \sum_{i \in I} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 .$$

Si  $I$  est de cardinal 2, alors la réciproque est vraie, à savoir que si  $x$  et  $y$  sont deux vecteurs de  $E$  tels que  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ , alors  $x \perp y$ .

*Démonstration.* Le sens direct est une conséquence immédiate de la bilinéarité :

$$\left\langle \sum_{i \in I} x_i \left| \sum_{i \in I} x_i \right. \right\rangle = \sum_{(i,j) \in I^2} \langle x_i | x_j \rangle = \sum_{i \in I} \|x_i\|^2 .$$

La réciproque est une conséquence de la formule  $\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2 \langle x | y \rangle$ . □

**Théorème 12 - 3**

**Base orthonormale incomplète**

Toute famille (éventuellement vide) orthonormale de vecteurs d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale de  $E$ .

Ce théorème est encore vrai en remplaçant orthonormale par orthogonale (en supposant tous les vecteurs non nuls).

*Démonstration.* La démonstration se fait par récurrence descendante sur le nombre de vecteurs dans la famille orthogonale. □

**Expression algébrique ou matricielle**

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base orthonormée de  $E$ , supposé euclidien, et  $x$  et  $y$  deux vecteurs de  $E$ . On les écrit dans cette base sous la forme  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y =$

$\sum_{i=1}^n y_i e_i$ . Alors on a

1.  $x_i = \langle e_i | x \rangle$
2.  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$
3.  $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

**Propriétés 12 - 3**

Matriciellement si  $X$  et  $Y$  sont les vecteurs colonnes associés à  $x$  et  $y$  dans la base  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ , on a

$$\langle x | y \rangle = X^* Y = {}^t X Y .$$

*Démonstration.* C'est immédiat. □

**Orthogonal et bi-orthogonal**

Soit  $A$  une partie de  $E$ , alors

1.  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,
2.  $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$ ,
3.  $\text{Vect}(A) \subset (A^\perp)^\perp$ ,
4. la somme  $\text{Vect}(A) + A^\perp$  est directe, i.e.  $\text{Vect}(A) + A^\perp = \text{Vect}(A) \oplus A^\perp$ .

**Proposition 12 - 1**

*Démonstration.* Soit  $A$  une partie de  $E$ ,  $x$  et  $y$  dans  $A^\perp$  et  $\lambda$  dans  $\mathbf{K}$ . On a, pour  $a$  dans  $A$

$$\langle a | \lambda x + y \rangle = \lambda \langle a | x \rangle + \langle a | y \rangle = 0$$

et donc, comme  $0 \in A^\perp$ ,  $A^\perp$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ ,

Comme  $A \subset \text{Vect}(A)$ , on a  $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$ . Réciproquement si  $x$  est orthogonal à tout vecteur de  $A$ , il est orthogonal à toute combinaison linéaire de ces vecteurs, par linéarité du produit scalaire, et donc  $A^\perp \subset \text{Vect}(A)^\perp$ .

Par définition,  $A$  est formé de vecteurs orthogonaux à  $A^\perp$ , i.e.  $A \subset (A^\perp)^\perp$ . Comme ce dernier ensemble est un espace vectoriel, il contient donc  $\text{Vect}(A)$ .

Enfin si  $a$  appartient à  $\text{Vect}(A)$  et  $A^\perp$ , il appartient à  $\text{Vect}(A)$  et  $\text{Vect}(A)^\perp$  et est donc orthogonal à lui-même. Il est donc nul et ainsi la somme  $\text{Vect}(A) + A^\perp$  est directe. □

**Projecteur orthogonal**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . On dit que  $G$  est un supplémentaire orthogonal de  $F$  si  $E = F \oplus G$  et  $G \perp F$ . On note alors  $E = F \oplus^\perp G$ .

Le projecteur sur  $F$  parallèlement à  $G$  est appelé projecteur orthogonal sur  $F$  et est noté  $p_F$ . On a donc, pour  $x$  dans  $E$ ,

$$\langle p_F(x) | x - p_F(x) \rangle = 0.$$

**Définition 12 - 9**

Plus généralement si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ , on dit qu'ils sont supplémentaires orthogonaux si  $E = \bigoplus_{i \in I} F_i$  et que les éléments de la famille sont orthogonaux deux à deux. On note alors  $E = \bigoplus_{i \in I}^\perp F_i$  et les projecteurs orthogonaux  $p_{F_i}$  vérifient :

1.  $Id_E = \sum_{i \in I} p_{F_i}$
2.  $\forall (i, j) \in I^2, p_{F_i} \circ p_{F_j} = \delta_{ij} p_{F_i}$ .

On dit qu'on a affaire à une décomposition de l'identité en somme d'idempotents orthogonaux.

**Proposition 12 - 2**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $G$  un supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ . Alors  $G = F^\perp$  et  $F = (F^\perp)^\perp$ .

*Démonstration.* Par définition on a  $G \subset F^\perp$ . Soit maintenant  $x$  dans  $F^\perp$ . Puisque  $E = F \oplus G$ , on peut écrire  $x = y + z$  avec  $y$  dans  $F$  et  $z$  dans  $G$ . Or,  $G \subset F^\perp$ , donc  $x$  et  $z$  appartiennent tous les deux à  $F^\perp$ . Comme ce dernier est un espace vectoriel, il en va de même pour  $x - z$ , i.e. pour  $y$ , qui est donc dans  $F$  et dans  $F^\perp$ . Il en résulte  $y = 0$  et donc  $x \in G$ . D'où  $G = F^\perp$ .

En appliquant ce qui précède à  $G$ , il vient  $F = G^\perp$ , i.e.  $F = (F^\perp)^\perp$ .  $\square$

**Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie de  $E$ , alors  $F^\perp$  est un supplémentaire de  $F$ , i.e.  $E = F \oplus^\perp F^\perp$ .

Si, de plus,  $(e_i)_{i \in I}$  est une base orthonormée de  $F$ , on a, pour tout  $x$  dans  $E$ ,

1.  $p_F(x) = \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i$ ;
2. la distance  $d(x, F)$  de  $x$  à  $F$ , i.e. l'infimum  $\inf_{y \in F} \|x - y\|$ , est atteinte en  $p_F(x)$ . Autrement dit

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \sqrt{\|x\|^2 - \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle^2}.$$

3. Pour  $y$  dans  $F$ , on a  $\|x - y\| = d(x, F) \Leftrightarrow y = p_F(x)$ .

**Proposition 12 - 3**

*Démonstration.* Puisque  $F$  est de dimension finie, on peut en choisir une base orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$ . Pour  $x$  dans  $E$ , on peut alors écrire

$$x = \left( \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i \right) + \left( x - \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i \right)$$



et le terme  $\sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i$  appartient à  $F$ . De plus, pour  $j$  dans  $I$ , on a

$$\left\langle e_j \left| x - \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i \right. \right\rangle = \langle e_j | x \rangle - \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle \langle e_j | e_i \rangle = 0$$

puisque  $(e_i)_{i \in I}$  est orthonormée. Donc  $x - \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle e_i$  est orthogonal à une base de  $F$ , donc à  $F$ . Il en résulte  $E = F + F^\perp$ . Comme cette somme est directe et orthogonale,  $F^\perp$  est bien un supplémentaire (orthogonal) de  $F$ .

On a déjà établi la formule pour la projection sur  $F$ . Soit alors  $y$  dans  $F$ , on a, grâce au théorème de PYTHAGORE,

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

et donc cette quantité est minimale pour  $y = p_F(x)$  et uniquement là. □

**Remarque 12 - 3**

En particulier, si  $E$  est de dimension finie, alors pour tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ , on a

1.  $E = F \oplus^\perp F^\perp$ ,
2.  $F = (F^\perp)^\perp$ ,
3.  $\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$ , i.e.  $\dim(F^\perp) = \text{codim}(F)$ .

**Exemples 12 - 2**

On munit  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  du produit scalaire canonique donné par  $\langle A | B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$ .

- a. Soit  $F$  l'espace des matrices diagonales, alors  $F^\perp$  est l'espace des matrices de diagonale nulle. Le projecteur associé est obtenu simplement en associant à toute matrice sa diagonale.
- b. Soit  $F = \mathbf{R}I_n$ , alors  $F^\perp$  est l'espace des matrices de trace nulle (on dit que c'est l'algèbre de Lie de  $\text{SL}_n(\mathbf{R})$ ) et le projecteur associé est  $A \mapsto \frac{\text{Tr}(A)}{n} I_n$ .

## 2 Endomorphismes symétriques

Dans ce paragraphe  $E$  est un espace euclidien de dimension  $n$ .

**Endomorphisme symétrique**

Un endomorphisme  $f$  de  $E$  est appelé symétrique si, pour tous  $x$  et  $y$  dans  $E$ , on a

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle .$$

On note  $\mathcal{S}(E)$  l'ensemble de ces endomorphismes.

Cette définition s'applique en particulier aux matrices, vues comme applications linéaires de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , i.e. de  $\mathbf{R}^n$ .

**Matrice symétrique**

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est appelée symétrique si  ${}^tA = A$ . On note  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  l'ensemble de ces endomorphismes.

**Définition 12 - 10**

**Définition 12 - 11**

**Caractérisation des endomorphismes symétriques**

Si  $A$  est la matrice de  $f$  dans une base orthonormée,  $X$  et  $Y$  les vecteurs colonnes représentant les vecteurs  $x$  et  $y$  dans cette même base, la condition  $\langle f(x) | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle$  s'écrit

$${}^t(AX)Y = {}^tXAY \quad \text{i.e.} \quad {}^tX {}^tAY = {}^tXAY$$

et donc  $f$  est symétrique si et seulement si sa matrice est symétrique dans toute (une) base orthonormée.

Propriété 12 - 4

*Démonstration.* L'expression du produit scalaire dans une base orthonormée est  ${}^tXY$  et la traduction matricielle s'ensuit. Par ailleurs on a alors

$${}^tX({}^tA - A)Y = 0$$

pour tous vecteurs colonnes  $X$  et  $Y$ . En particulier, à  $Y$  fixé, le vecteur  $({}^tA - A)Y$  est orthogonal à tout  $E$ , donc est nul. On en conclut que  ${}^tA - A$  est la matrice de l'endomorphisme nul, donc  ${}^tA - A = 0$ , i.e.  $A = {}^tA$ .

De plus si  $P$  est une matrice de changement de base entre bases orthonormées, alors  $P$  vérifie  ${}^tPP = I_n$  de sorte qu'on a

$${}^t(PAP^{-1}) = PAP^{-1} \iff {}^tA = A.$$

Il en résulte que la matrice de  $f$  dans une base orthonormée est symétrique si et seulement si elle l'est dans toute base orthonormée.  $\square$

**Propriété fondamentale des endomorphismes symétriques**

Si  $f$  est un endomorphisme symétrique et si  $F$  est un sous-espace de  $E$  stable par  $f$ , alors  $F^\perp$  est également  $f$ -stable.

Théorème 12 - 4

*Démonstration.* Soit  $x$  dans  $F$  et  $y$  dans  $F^\perp$ . On a

$$\langle x | f(y) \rangle = \langle f(x) | y \rangle = 0$$

puisque  $f(x)$  appartient à  $F$  et que  $y$  est orthogonal à  $F$ . Il en résulte que  $f(y)$  est orthogonal à  $F$  et donc  $f(y) \in F^\perp$ , i.e.  $F^\perp$  est  $f$ -stable.  $\square$

**Théorème spectral - Réduction des endomorphismes symétriques**

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $E$ . Alors

$$f = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda p_\lambda$$

où  $(p_\lambda)$  est une famille de projecteurs orthogonaux sur des espaces deux à deux orthogonaux, i.e. pour  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\text{Sp}(f)$ ,

Théorème 12 - 5

$$p_\mu \circ p_\lambda = \delta_{\lambda, \mu} p_\lambda \quad \text{et} \quad E = \text{Ker}(p_\lambda) \oplus^\perp \text{Im}(p_\lambda).$$

En particulier :

1. son polynôme caractéristique  $\chi_f$  de  $f$  est scindé sur  $\mathbf{R}$  ;
2. l'endomorphisme  $f$  est diagonalisable dans une base orthonormée ;
3. les sous-espaces propres de  $f$  sont deux à deux orthogonaux.

*Démonstration.* Pour une matrice  $M$  quelconque à coefficients complexes, on note  $M^*$  sa transconjuguée, i.e.  $M^* = \overline{M}^t$ . Si  $X$  est un vecteur colonne à coefficients complexe, alors  $X^*X$  est la somme des carrés des modules de ses coefficients. En particulier c'est un nombre réel positif, et même strictement positif sauf si  $X$  est nul.

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $A$  la matrice de  $f$  dans cette base. Soit  $X$  un vecteur propre complexe de  $A$  associé à une valeur propre complexe  $\lambda$ . On considère le scalaire  $X^*AX$ . Puisque  $AX = \lambda X$ , on a  $X^*AX = \lambda X^*X$ . Or  $AX = \lambda X$  entraîne, par transposition et conjugaison,  $X^*A^* = \overline{\lambda}X^*$ . Comme par ailleurs  $A$  est symétrique réelle, on a  $A^* = \overline{A}^t = {}^tA = A$ , de sorte que  $X^*A = \overline{\lambda}X^*$  et donc  $X^*AX = \overline{\lambda}X^*X$ . Comme  $X$  est non nul,  $X^*X$  ne l'est pas non plus et il en résulte  $\lambda = \overline{\lambda}$ , i.e. toute valeur propre complexe de  $A$  est réelle, et donc le polynôme caractéristique de  $f$  est scindé sur  $\mathbf{R}$ .

Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $f$ . On a  $E = E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp$  avec  $E_\lambda = \text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ . Comme  $E_\lambda$  est  $f$ -stable,  $E_\lambda^\perp$  est  $f$ -stable puisque  $f$  est symétrique et  $f$  y induit un endomorphisme  $f^\lambda$  symétrique, puisque que le produit scalaire sur  $E$  induit un produit scalaire sur  $E_\lambda^\perp$ . Si  $x$  est vecteur propre de  $f$  et appartient à  $E_\lambda^\perp$ , alors sa valeur propre associée est distincte de  $\lambda$  car  $E_\lambda \cap E_\lambda^\perp = \{0\}$ . Par conséquent les espaces propres de  $f^\lambda$  sont aussi des sous-espaces propres de  $f$  et donc, si  $E_\lambda^\perp$  est somme directe orthogonale d'espaces propres de la restriction de  $f^\lambda$ , il en va de même pour  $E$  par rapport à  $f$ . Comme  $E_\lambda$  n'est pas réduit à  $\{0\}$ ,  $E_\lambda^\perp$  est de dimension strictement inférieure à celle de  $E$  et une démonstration par récurrence permet de conclure, le cas de la dimension inférieure à 1 étant immédiat.

En choisissant une base orthonormée dans chaque espace propre  $E_\lambda$ , on obtient une base orthonormée de diagonalisation de  $f$ . La dernière assertion résulte de ce qui précède, mais on peut en donner une démonstration directe : soit  $x$  et  $y$  des vecteurs propres associés à deux valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  distinctes. On a  $\mu \langle x | y \rangle = \langle x | f(y) \rangle = \langle f(x) | y \rangle = \lambda \langle x | y \rangle$  et donc, puisque  $\lambda \neq \mu$ , il vient  $\langle x | y \rangle = 0$ .  $\square$

**Réciproque du théorème spectral**

Si  $f$  est diagonalisable dans une base orthonormée, alors  $f$  est symétrique. En effet sa matrice dans cette base est diagonale, donc égale à sa transposée. Puisque sa matrice dans une base orthonormée est symétrique,  $f$  est symétrique.

Propriété 12 - 5

**Décomposition des endomorphismes symétriques**

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $E$  et  $B$  une base orthonormée de  $E$ , propre pour  $f$ . On note  $B = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $f(v_i) = \lambda_i v_i$  avec  $\lambda_i \in \text{Sp}(f)$ . Alors on a, pour tout  $x$  dans  $E$ ,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | x \rangle v_i,$$

i.e.  $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^* \otimes v_i$  en notant  $v_i^*$  la forme coordonnée associée à  $v_i$  relativement à la base  $B$  et  $\varphi \otimes u$  l'application linéaire de rang 1 donnée par  $\varphi \otimes u(x) = \varphi(x)u$ .

Proposition 12 - 4

*Démonstration.* Pour  $x$  dans  $E$  on a

$$x = \sum_{i=1}^n \langle v_i | x \rangle v_i \quad \text{et donc} \quad f(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | x \rangle v_i.$$

$\square$

**Valeurs propres d'un endomorphisme symétrique**

On en déduit que pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ , on a

$$\langle f(x) | y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | x \rangle \langle v_i | y \rangle ,$$

ce qui montre bien la symétrie en  $x$  et  $y$ . En particulier on a

$$\langle f(x) | x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle v_i | x \rangle^2 \quad \text{et} \quad \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \langle v_i | x \rangle^2 .$$

Comme on a  $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \langle v_i | x \rangle^2$ , si  $x$  est unitaire les expressions ci-dessus sont des barycentres à coefficients positifs des  $(\lambda_i)$  et des  $(\lambda_i^2)$  et donc

$$\min(\text{Sp}(f)) \|x\|^2 \leq \langle f(x) | x \rangle \leq \max(\text{Sp}(f)) \|x\|^2$$

et

$$\min_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |\lambda| \|x\| \leq \|f(x)\| \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |\lambda| \|x\| .$$

L'enveloppe convexe du spectre est l'intervalle réel compris entre ses valeurs propres extrémales et ainsi, d'après la description précédente, on a

$$\text{Conv}(\text{Sp}(f)) = \left\{ \frac{\langle f(x) | x \rangle}{\|x\|^2} \mid x \in E \setminus \{0\} \right\}$$

Remarque 12 - 4

En notant  $\|f\|$  la norme (subordonnée) de  $f$  définie par  $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ , on a donc

$$\|f\| = \max_{\lambda \in \text{Sp}(f)} |\lambda| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle x | f(x) \rangle| .$$

**(♠) Endomorphisme (défini) positif**

Le spectre est d'un endomorphisme symétrique est inclus dans  $\mathbf{R}_+$ , i.e. toutes ses valeurs propres sont positives si et seulement si  $\forall x \in E, \langle f(x) | x \rangle \geq 0$ . On dit alors que  $f$  est symétrique positif. Leur ensemble est noté  $\mathcal{S}^+(E)$ . Ainsi

$$f \in \mathcal{S}^+(E) \iff \forall x \in E \quad \langle f(x) | x \rangle \geq 0 .$$

Son spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$ , i.e. toutes ses valeurs propres sont strictement positives si et seulement si  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \langle f(x) | x \rangle > 0$ . Il est équivalent de dire qu'il est positif et n'a pas de valeur propre nulle, i.e. positif et inversible. On dit alors que  $f$  est symétrique défini positif. Leur ensemble est noté  $\mathcal{S}^{++}(E)$ . Ainsi

$$f \in \mathcal{S}^{++}(E) \iff \forall x \in E \setminus \{0\} \quad \langle f(x) | x \rangle > 0 .$$

Remarque 12 - 5

Dans ce cas l'application  $(x, y) \mapsto \langle f(x) | y \rangle$  est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, i.e. un produit scalaire, d'où l'importance de ces endomorphismes particuliers.

### 3 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Dans ce paragraphe  $E$  est un espace vectoriel réel,  $\varphi$  un produit scalaire sur  $E$  (i.e. une forme bilinéaire symétrique définie positive sur  $E$ ) et  $\|\cdot\|$  la norme hilbertienne associée à  $\varphi$  (i.e. en notant  $q$  la forme quadratique sur  $E$  associée à  $\varphi$ ,  $\|\cdot\| = \sqrt{q}$ , ce qui est licite par positivité de  $q$ ). On notera indifféremment  $\varphi(x, y)$  ou  $\langle x | y \rangle$ .

La proposition suivante généralise la formule de BERNOULLI (i.e. les identités remarquables).

#### Identités de polarisation

Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbf{R}$ . On a

$$\|\lambda x + \mu y\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2 + 2\lambda\mu \langle x | y \rangle + \mu^2 \|y\|^2$$

et donc, en particulier,  $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2 \langle x | y \rangle + \|y\|^2$ . Il en résulte

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \varphi(x, y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \end{array} \right. .$$

Propriété 12 - 6

Ces identités ne font pas intervenir le caractère défini positif de  $\varphi$  et  $q$ .

D'une façon générale ces identités permettent d'associer de façon bijective  $\varphi$  et  $q$ , de sorte que  $\varphi \mapsto q_\varphi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre  $\mathcal{L}_2^{sym}(E)$  et  $\mathcal{Q}(E)$ . L'unique forme bilinéaire symétrique associée à une forme quadratique est appelée sa forme polaire.

Aparté

Le théorème qui suit est sans conteste le plus important de ce chapitre et sans doute de l'algèbre linéaire (euclidienne). Cette inégalité est au cœur de la plupart des inégalités profondes en mathématique.

#### Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq q(x)q(y) \quad \text{ou encore} \quad |\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| .$$

De plus il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée.

On en déduit directement

#### Inégalité de MINKOWSKI

Pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

De plus il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est positivement liée, i.e. il existe  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}_+$  tel qu'on ait soit  $x = \lambda y$ , soit  $y = \lambda x$ .

En particulier  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$

Théorème 12 - 6

Théorème 12 - 7

*Démonstration.* Si  $x$  ou  $y$  est nul, alors  $\varphi(x, y) = q(x)q(y) = 0$ . Si  $q(x) = q(y) = 1$ , alors on tire de l'identité de polarisation :  $0 \leq q(x \pm y) = 2(1 \pm \varphi(x, y))$  et donc

$|\varphi(x, y)| \leq 1 = q(x)q(y)$ . Le cas général s'ensuit par bilinéarité. Le cas d'égalité est obtenu si  $x = 0$  ou  $y = 0$  ou, sinon, si  $\frac{x}{q(x)} \pm \frac{y}{q(y)} = 0$ , i.e.  $(x, y)$  liée.

On déduit de plus  $0 \leq \|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|$  et donc aussi l'inégalité de MINKOWSKI. L'égalité est obtenue si et seulement s'il y a égalité dans l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ et si  $\langle x | y \rangle$  est positif, i.e.  $(x, y)$  positivement liée. Enfin on a

1.  $\forall x \in E, (\|x\| = 0 \iff x = 0)$ ,
2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 \|x\|^2} = |\lambda| \|x\|$

et donc, couplé à ce qui précède, on en déduit que  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ .  $\square$

### Exemple 12 - 3

Soit  $f$  dans  $C^1(\mathbf{R})$  avec  $f(0) = 0$ . On pose  $g(x) = f(x)/x$  pour  $x \in \mathbf{R}^*$ , et on prolonge  $g$  par continuité en une fonction continue sur  $\mathbf{R}$ . Alors, pour  $x > 0$ , on a  $g(x)^2 \leq \frac{1}{x} \int_0^x (f'(t))^2 dt$ .

*Démonstration.* Soit  $E = C^0(\mathbf{R})$ ,  $x$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  et  $\varphi$  donnée par

$$\varphi(u, v) = \frac{1}{x} \int_0^x u(t)v(t) dt.$$

C'est une forme bilinéaire symétrique définie positive puisqu'on a affaire à des fonctions continues sur le segment  $[0; x]$ . De plus on a  $g(x) = \varphi(1, f')$  d'après le théorème de LEIBNIZ-NEWTON (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral). Comme  $q(1) = 1$ , il vient  $g(x)^2 \leq q(f')$ . Autrement dit : le carré de la pente de la corde est inférieur à la moyenne des carrés des pentes des tangentes.

L'assertion est encore vraie pour  $x$  strictement négatif. Pour avoir un cas général, il suffit d'écrire l'inégalité sous la forme

$$(f(b) - f(a))^2 \leq (b - a) \int_a^b (f'(t))^2 dt.$$

Autrement dit la pente entre  $a$  et  $b$  est inférieure (en valeur absolue) à la moyenne quadratique de la dérivée entre  $a$  et  $b$ .  $\square$

### Aparté

Les inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et MINKOWSKI sont en fait valables dès que  $\varphi$  est positive (pas nécessairement définie positive), la démonstration étant identique. C'est par exemple le cas lorsque  $\varphi(x, y) = \langle f(x) | y \rangle$  avec  $f \in \mathcal{S}^+(E)$ . Par contre l'étude du cas d'égalité ne peut se faire que si  $\varphi$  est définie positive.

Voici quelques exemples de produits scalaires.

- a.  $E = \mathbf{R}^n$  et  $\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ , pour  $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Il s'agit de la structure euclidienne canonique sur  $\mathbf{R}^n$ .
- b.  $E = C^0(I, \mathbf{R})$  et  $\langle f | g \rangle = \int_I f g$ . C'est la généralisation à  $\mathbf{R}^I$  du produit scalaire précédent, mais il faut se restreindre à  $C^0(I, \mathbf{R})$  pour qu'il soit bien défini et défini positif au sens des formes bilinéaires.
- c.  $E = \mathbf{R}_n[X]$  et  $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ , pour  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  des réels distincts. En interprétant les polynômes comme des fonctions polynomiales, on peut les voir

comme des éléments de  $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$  et la donnée de  $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$  permet, par restriction, d'en faire des éléments de  $\mathbf{R}^{n+1}$ . Le produit scalaire coïncide alors le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{R}^{n+1}$ .

- d.  $E = \ell^2(\mathbf{R})$ , i.e.  $E$  est formé des suites réelles  $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$  telles que la série  $\sum |u_n|^2$  converge. On pose alors  $\langle u | v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ . Cette dernière série converge absolument grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ.
- e.  $E = \mathbf{R}[X]$  et  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$  (polynômes de TCHEBYCHEV de première espèce);
- f.  $E = \mathbf{R}[X]$  et  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\sqrt{1-t^2} dt$  (polynômes de TCHEBYCHEV de seconde espèce);
- g.  $E = \mathbf{R}[X]$  et  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1+t^2) dt$ .
- h. ( $\spadesuit$ )  $E$  euclidien,  $f \in \mathcal{S}^{++}(E)$  et  $\varphi(x, y) = \langle f(x) | y \rangle$ .

La proposition suivante est importante notamment pour tester si une norme est hilbertienne.

**Égalité du parallélogramme**

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien. Alors, pour tout  $(x, y)$  dans  $E^2$ , on a

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) .$$

Proposition 12 - 5

*Démonstration.* C'est une conséquence immédiate de l'identité de polarisation.  $\square$

Les normes sur  $\mathbf{R}^n$  données par  $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$  et  $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$  ne sont pas des normes euclidiennes.

Les boules unités de ces normes sont des hypercubes et c'est une façon de se rendre compte que ce ne sont pas des normes euclidiennes.

Exemple 12 - 4

## 4 Bases orthonormées et famille totales

Dans ce paragraphe  $E$  est un espace préhilbertien. On commence par une inégalité importante en dimension infinie, conséquence du théorème de PYTHAGORE.

**Inégalité de BESSEL**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace préhilbertien  $E$  et  $(e_i)_{i \in I}$  une base orthonormée de  $F$ , alors pour tout  $x$  dans  $E$ , on a

$$\sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle^2 \leq \|x\|^2 .$$

Théorème 12 - 8

En dimension finie, il suffit que  $I$  soit de cardinal la dimension de  $E$  pour qu'on ait affaire à une base et donc qu'il y ait égalité dans l'inégalité précédente. Ce ne saurait être le cas en dimension infinie.

**Famille totale**

On dit qu'une famille  $(e_i)_{i \in I}$  d'un espace vectoriel de dimension infinie  $E$  est totale si le plus petit sous-espace vectoriel fermé qui la contient est  $E$ . Autrement dit si l'adhérence de  $\text{Vect}(e_i)_{i \in I}$  est  $E$ , i.e. si tout vecteur de  $E$  est limite d'une suite de combinaisons linéaires de la famille  $(e_i)_{i \in I}$ .

Lorsque  $I = \mathbf{N}$ , on parle de suite totale d'éléments de  $E$ .

**Définition 12 - 12**

Soit  $E$  l'espace  $C_{2\pi}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  des fonctions à valeurs réelles, continues et  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbf{R}$ . On le munit du produit scalaire donné par  $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$ . Soit alors les fonctions  $(\gamma_n)_{n \in \mathbf{N}}$  et  $(\sigma_m)_{m \in \mathbf{N}^*}$  définies par  $\gamma_n(t) = \cos(nt)$  et  $\sigma_m(t) = \sin(mt)$ . Ce sont des familles orthogonales et elles sont aussi orthogonales l'une à l'autre. On a par exemple  $\langle \gamma_p | \gamma_q \rangle = \frac{1}{2} \delta_{pq} + \frac{1}{2} \delta_{p0} \delta_{q0}$ .

L'adhérence de l'espace vectoriel que ces fonctions engendrent donne naissance à la notion de série de FOURIER.

**Exemple 12 - 5**

Le meilleur cadre pour l'étude des séries de FOURIER est celui des fonctions à valeurs complexes. On se place dans l'espace préhilbertien complexe  $C_{2\pi}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  des fonctions à valeurs complexes, continues et  $2\pi$ -périodiques sur  $\mathbf{R}$ . Les fonctions  $(e_n)_{n \in \mathbf{Z}}$  données par  $e_n(t) = e^{int}$  forment alors une famille orthonormée au sens suivant :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{e_n(t)} e_m(t) dt = \delta_{n,m} .$$

**Polynômes orthogonaux**

Si  $E$  admet une base dénombrable, alors c'en est une suite totale. C'est le cas par exemple de  $\mathbf{R}[X]$  et de la base canonique. On peut munir  $\mathbf{R}[X]$  d'un produit scalaire en se donnant un intervalle  $I$  de  $\mathbf{R}$  et une fonction  $\omega$  de  $I$  dans  $\mathbf{R}$ , continue, strictement positive et telle que  $\int_I x^n \omega(x) dx$  existe pour tout entier  $n$ . On pose alors  $\langle P | Q \rangle_\omega = \int_I P(x)Q(x)\omega(x) dx$ .

**Exemple 12 - 6**

Si  $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$  est une suite orthonormale totale d'éléments de  $E$ , alors pour tout  $x$  dans  $E$  et en notant  $p_n$  le projecteur orthogonal sur  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ , on a

$$\lim p_n(x) = \lim \left( \sum_{i=0}^n \langle e_i | x \rangle e_i \right) = x ,$$

autrement dit  $x$  est la limite de la suite de ses projetés orthogonaux sur les éléments du drapeau associé à  $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ .

**Proposition 12 - 6**

*Démonstration.* Soit  $x$  un vecteur de  $E$ . D'après l'inégalité de BESSEL, la série à termes positifs  $\sum \langle e_i | x \rangle^2$  est majorée par  $\|x\|^2$ . Cette série est donc convergente, de somme inférieure ou égale à  $\|x\|^2$ . Notons  $S$  sa somme et supposons qu'on ait  $S < \|x\|^2$ .

Soit alors  $y$  une combinaison linéaire des vecteurs  $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ . On dispose alors de  $n$



dans  $\mathbf{N}$  tel que  $y$  appartienne à  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ . Il vient alors

$$\|y - x\|^2 \geq d(p_n(x), x)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=0}^n \langle e_i | x \rangle^2 \geq \|x\|^2 - S$$

et ceci contredit le fait que  $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$  est totale puisque la boule de centre  $x$  et de rayon  $\sqrt{\|x\|^2 - S}$  ne contient aucune combinaison linéaire de la famille  $(e_i)_{i \in \mathbf{N}}$ . On en déduit  $S = \|x\|^2$  et donc  $\lim \|x - p_n(x)\|^2 = \|x\|^2 - S = 0$ , d'où  $x = \lim p_n(x)$ .  $\square$

**(♠) Égalité de BESSEL**

La démonstration précédente montre que la convergence de  $p_n(x)$  vers  $x$  équivaut à la convergence de  $\sum \langle e_i | x \rangle^2$  vers  $\|x\|^2$ , i.e. à l'égalité de BESSEL :

$$\lim \left( \sum_{i=0}^n \langle e_i | x \rangle e_i \right) = x \iff \sum_{i \in \mathbf{N}} \langle e_i | x \rangle^2 = \|x\|^2 .$$

Remarque 12 - 6

**Polynômes orthogonaux**

Dans  $\mathbf{R}[X]$  muni de  $\langle \cdot | \cdot \rangle_\omega$  comme précédemment. La base canonique n'est pas en général orthonormale. On peut néanmoins l'orthonormaliser et ainsi obtenir une famille de polynômes  $(P_n)$  telle que  $\deg(P_n) = n$ ,  $P_n$  est de coefficient dominant strictement positif et  $\int_I P_n P_m \omega = \delta_{m,n}$ . On parle de famille de polynômes orthogonaux (pour  $\omega$ ). Des exemples sont donnés par les polynômes de TCHEBYCHEV (de première ou seconde espèce), de LEGENDRE, LAGUERRE, de HERMITE etc. On les obtient par exemple grâce à un procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT.

Exemple 12 - 7

**Procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT**

Soit  $n$  un entier naturel non nul et  $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$  une famille libre de  $E$ . Alors il existe une unique famille orthonormale  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$  vérifiant

1.  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Vect}(v_j)_{1 \leq j \leq k} = \text{Vect}(w_j)_{1 \leq j \leq k}$  (on dit que les drapeaux de sous-espaces de  $E$  associés aux deux familles sont identiques).
2.  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle v_k | w_k \rangle > 0$ .

Théorème 12 - 9

*Démonstration.* On raisonne par analyse/synthèse. Si  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une telle famille, alors pour  $k$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket, v_k$  est combinaison linéaire de  $(w_j)_{1 \leq j \leq k}$  et donc, puisque cette famille est orthonormée,

$$v_k = \sum_{j=1}^k \langle w_j | v_k \rangle w_j$$

et donc  $w_k$  est proportionnel, par un facteur strictement positif, à

$$v_k - \sum_{j < k} \langle w_j | v_k \rangle w_j .$$

Ceci démontre l'unicité de la famille recherchée.

On conclut en définissant par récurrence la famille  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$  par les formules

$$x_k = v_k - \sum_{j < k} \langle w_j | v_k \rangle w_j \quad \text{et} \quad w_k = \frac{1}{\|x_k\|} x_k ,$$

ce qui est licite car on démontre par récurrence les deux points suivants :

1.  $x_k$  est non nul
2.  $\text{Vect}(v_j)_{1 \leq j < k} = \text{Vect}(w_j)_{1 \leq j < k}$ .

On note  $F_k = \text{Vect}(v_j)_{1 \leq j < k}$ .

Pour  $k = 1$ , on a  $x_1 = v_1$ , qui est non nul, et le second point est vide. Pour l'hérédité, si  $x_k$  était nul,  $v_k$  appartiendrait à l'espace engendré par  $(w_j)_{1 \leq j < k}$  et donc à celui engendré par  $(v_j)_{1 \leq j < k}$ , ce qui n'est pas le cas puisque  $(v_k)_{1 \leq k \leq n}$  est une famille libre. Enfin par construction

$$F_{k+1} = F_k + \mathbf{K}v_k = F_k + \mathbf{K}x_k = F_k + \mathbf{K}w_k = \text{Vect}(w_j)_{1 \leq j < k+1} .$$

□

En relaxant la condition sur la norme des vecteurs  $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ , le même procédé fournit une construction effective d'une famille orthogonale  $(x_k)_{1 \leq k \leq n}$  vérifiant les deux mêmes propriétés. Même si une telle famille n'est pas unique, le procédé en fournit une qui est naturelle.

On a alors, pour  $k$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ ,

$$x_k = v_k - \sum_{j < k} \frac{\langle x_j | v_k \rangle}{\|x_j\|^2} x_j$$

et la présence de normes au carré permet de ne pas avoir à extraire de racines carrées.

### Polynômes de LEGENDRE

Soit  $E$  l'espace  $\mathbf{R}[X]$  muni du produit scalaire donné par

$$\langle P | Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt .$$

L'orthogonalisée de la base canonique de  $\mathbf{R}[X]$  est la famille des polynômes de LEGENDRE définie par

$$L_n = (X^n(X-1)^n)^{(n)} .$$

Par ailleurs  $\|L_n\| = \frac{n!}{\sqrt{2n+1}}$  et donc l'orthonormalisée de la base canonique est la famille  $\left( \frac{\sqrt{2n+1}}{n!} L_n \right)_{n \in \mathbf{N}}$ .

*Démonstration.* Par définition du polynôme  $L_n$ , il est de degré  $n$ , en tant que dérivée  $n$ -ième d'un polynôme de degré  $2n$ . Ainsi il s'agit d'une famille étagée en degré et on a donc directement la seconde condition du procédé de GRAM-SCHMIDT.

On vérifie maintenant que c'est une famille orthogonale. On a, pour  $p$  et  $q$  entiers avec  $p \geq 1$  et par intégration par parties,

$$\langle L_p | L_q \rangle = \left[ \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} (t^p(t-1)^p) L_q(t) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{d^{p-1}}{dt^{p-1}} (t^p(t-1)^p) L'_q(t) dt .$$

Or  $X^p(X-1)^p$  s'annule avec multiplicité  $p$  en 0 et 1, donc ses dérivées s'annulent en 0 et 1 jusqu'à l'ordre  $p-1$ . Le terme entre crochets est donc nul. On peut alors continuer

à intégrer par parties. En le faisant  $p$  fois, il vient

$$\langle L_p | L_q \rangle = (-1)^p \int_0^1 t^p (t-1)^p L_q^{(p)}(t) dt = \int_0^1 t^p (1-t)^p L_q^{(p)}(t) dt$$

et cette formule est en fait vraie pour tout entier  $p$ . Comme  $L_q$  est de degré  $q$ , si  $p > q$ , alors  $L_q^{(p)} = 0$  et donc  $\langle L_p | L_q \rangle = 0$ . Par symétrie du produit scalaire, la même conclusion est valide si  $p < q$  et donc on a bien affaire à une famille orthogonale.

Le coefficient dominant de  $L_p$  est obtenu en dérivant  $p$  fois  $X^{2p}$  et c'est donc  $\frac{(2p)!}{p!}$ . Il en résulte que la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$  à  $(L_p)_{0 \leq p \leq n}$  est triangulaire supérieure à diagonale strictement positive et donc  $(L_p / \|L_p\|)_{0 \leq p \leq n}$  est l'orthonormalisée de la base canonique de  $\mathbf{R}_n[X]$ .

Il reste à calculer  $\|L_p\|$  pour conclure. La formule déjà obtenue donne

$$\|L_p\|^2 = (2p)! \int_0^1 t^p (1-t)^p dt$$

puisque  $L_p^{(p)}$  est constant égal à  $(2p)!$ . En intégrant par parties, il vient

$$\int_0^1 t^p (1-t)^p dt = \frac{p(p-1) \cdots 1}{(p+1)(p+2) \cdots (2p)} \int_0^1 t^{2p} dt = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$$

et on conclut. □

**Matrice de HILBERT**

En utilisant  $L_n$ , calculer le déterminant de la matrice de HILBERT  $\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0 \leq i, j \leq n}$ .

On pourra remarquer

$$\langle X^i | X^j \rangle = \int_0^1 t^{i+j} dt = \frac{1}{i+j+1}.$$

Exercice

Stricto sensu les polynômes de LEGENDRE sont définis à partir d'un produit scalaire sur  $] -1; 1 [$ , i.e.  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$ . Les polynômes de LEGENDRE sont alors définis par  $L_n = \frac{1}{2^n n!} ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$  et on a  $\|L_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$ .

Aparté

**5**

**Espaces euclidiens – Automorphismes orthogonaux**

Dans un espace euclidien  $E$  l'objectif est, en accord avec le programme d'Erlangen de Felix KLEIN, d'étudier les transformations de  $E$  qui préservent la structure additionnelle que l'on s'est donnée, i.e. le produit scalaire. Ainsi on cherche à remplacer les notions de base, équation linéaire, forme linéaire, transposition etc. par les notions pertinentes en géométrie euclidienne à savoir, respectivement, de base orthonormée, de vecteurs normaux, de produit scalaire etc. Les matrices de changement de base ne sont donc plus choisies dans  $GL_n(\mathbf{R})$  mais dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ , ce qui est plus contraignant et

amène donc à la fois moins de choix pour réduire et donc plus de types de réductions possibles.

### Isométrie vectorielle ou Automorphisme orthogonal

On appelle isométrie vectorielle ou automorphisme orthogonal de  $E$  tout endomorphisme préservant le produit scalaire, i.e.  $f$  est orthogonal si

Définition 12 - 13

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle f(u) | f(v) \rangle = \langle u | v \rangle .$$

On appelle groupe orthogonal l'ensemble de ces endomorphismes et on le note  $\mathcal{O}(E)$ .

Propriété 12 - 7

On a  $\mathcal{O}(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \forall u \in E, \|f(u)\| = \|u\|\}$  et  $\mathcal{O}(E)$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(E)$ . Les valeurs propres d'un automorphisme orthogonal sont de valeur absolue 1, par préservation de la norme.

*Démonstration.* Une des inclusions est immédiate. Pour l'inclusion réciproque, on utilise les identités de polarisation. Soit en effet  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  préservant la norme et  $u$  et  $v$  dans  $E$ . Alors, par polarisation, on a

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4} \left( \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 \right) = \frac{1}{4} \left( \|f(u + v)\|^2 - \|f(u - v)\|^2 \right)$$

et donc, par linéarité de  $f$  et polarisation, il vient

$$\langle u | v \rangle = \frac{1}{4} \left( \|f(u) + f(v)\|^2 - \|f(u) - f(v)\|^2 \right) = \langle f(u) | f(v) \rangle .$$

Il résulte de la préservation de la norme que  $\mathcal{O}(E)$  est inclus dans  $\text{GL}(E)$  et est stable par multiplication. Par définition,  $\text{Id}_E$  est orthogonal et enfin, si  $f$  est orthogonal, pour tout  $u$  dans  $E$ , on dispose de  $f^{-1}(u)$  puisque  $f$  est un automorphisme, et il vient

$$\|u\| = \|f(f^{-1}(u))\| = \|f^{-1}(u)\|$$

et donc  $f^{-1}$  est orthogonal. Par conséquent  $\mathcal{O}(E)$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(E)$ .  $\square$

### Caractérisation des endomorphismes orthogonaux

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Alors  $f$  est orthogonal si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

Théorème 12 - 10

1. Il existe une base orthonormée dont l'image par  $f$  est une base orthonormée.
2. L'image par  $f$  de toute base orthonormée est également une base orthonormée.
3. La matrice  $A$  de  $f$  relativement à une base orthonormée vérifie  ${}^tAA = I_n$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est orthogonal et si  $(e_i)_{i \in I}$  est orthonormée, alors, pour  $i$  et  $j$  dans  $I$ , on a  $\langle f(e_i) | f(e_j) \rangle = \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}$  et donc  $(f(e_i))_{i \in I}$  est orthonormée.

Si  $f$  transforme une base orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  en une base orthonormée  $(f_i)_{i \in I}$ , alors pour  $x$  dans  $E$ , on a

$$\|x\|^2 = \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle^2 = \sum_{i \in I} \langle f_i | f(x) \rangle^2 = \|f(x)\|^2$$

et donc  $f$  est orthogonal. La dernière propriété en est la traduction matricielle.  $\square$

**Définition 12 - 14**

**Groupe orthogonal**

On appelle groupe orthogonal réel l'ensemble  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  défini par  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R}) = \{A \in \text{GL}_n(\mathbf{R}) \mid {}^tAA = I_n\}$ .

**Remarque 12 - 7**

Si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée et si  $\mathcal{B}'$  est une autre base, alors  $\mathcal{B}'$  est orthonormée si et seulement si  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ .

**Exemple 12 - 9**

Une symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace  $F$  est donnée par  $s_F = 2p_F - \text{Id}_E$ . C'est un endomorphisme orthogonal. Quand  $F$  est un hyperplan, on parle de réflexion.

**Danger**

En général un projecteur orthogonal n'est pas un automorphisme orthogonal (ce n'est d'ailleurs pas non plus un automorphisme!). L'exception est l'identité qui est à la fois un projecteur et un automorphisme orthogonal.

**Proposition 12 - 7**

**Caractérisation des projecteurs orthogonaux**

Un projecteur est orthogonal si et seulement s'il est symétrique.

*Démonstration.* Soit  $x$  et  $y$  dans  $E$  et  $p$  un projecteur orthogonal. On a donc  $x - p(x) \in \text{Ker}(p)$  et donc  $x - p(x) \in \text{Im}(p)^\perp$ . En particulier  $\langle x - p(x) | p(y) \rangle = 0$ . Il en résulte  $\langle x | p(y) \rangle = \langle p(x) | p(y) \rangle$ . En échangeant le rôle de  $x$  et  $y$  et par symétrie du produit scalaire, il vient

$$\langle x | p(y) \rangle = \langle p(x) | p(y) \rangle = \langle p(y) | p(x) \rangle = \langle y | p(x) \rangle = \langle p(x) | y \rangle$$

et donc  $p$  est symétrique.

Réciproquement si  $p$  est symétrique et si  $(x, y) \in \text{Ker}(p) \times \text{Im}(p)$ , on a

$$\langle x | y \rangle = \langle x | p(y) \rangle = \langle p(x) | y \rangle = \langle 0 | y \rangle = 0$$

et donc  $\text{Ker}(p)$  et  $\text{Im}(p)$  sont orthogonaux. Par conséquent  $\text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p) = E$  et donc  $p$  est le projecteur orthogonal sur  $\text{Im}(p)$ .  $\square$

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , non nul et tel que  $E = F \oplus F^\perp$ . Alors, en notant  $p_F$  le projecteur orthogonal sur  $F$ , pour tout  $x$  dans  $E$  on a  $\|x\|^2 = \|p(x)\|^2 + \|x - p(x)\|^2 \geq \|p_F(x)\|^2$  et donc, en notant  $\|p_F\|$  la norme subordonnée i.e.  $\|p_F\| = \sup_{\|x\|=1} \|p(x)\|$ , on a  $\|p_F\| = 1$  et ainsi  $p_F$  est (1-lipschitzien donc) continu.

Réciproquement, soit  $p$  un projecteur d'image  $F$  vérifiant  $\|p\| = 1$ , alors  $p$  est un projecteur orthogonal, i.e.  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ . En effet pour  $t$  dans  $\mathbf{R}$ ,  $y$  dans  $F$  et  $z$  dans  $\text{Ker}(p)$ , on a

$$\|p(ty + z)\|^2 = t^2 \|y\|^2 \leq \|ty + z\|^2 = t^2 \|y\|^2 + 2t \langle y | z \rangle + \|z\|^2$$

et donc, puisqu'une application affine non constante ne saurait être de signe constant,  $\langle y | z \rangle = 0$ . Il en résulte  $\text{Ker}(p) \subset F^\perp$  puis  $\text{Ker}(p) = F^\perp$ , comme vu dans la démonstration de  $F = (F^\perp)^\perp$  en dimension finie.

**Théorème spectral**

Soit  $A$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ , i.e.  $A$  est une matrice symétrique **réelle**. Alors ses valeurs propres sont réelles et il existe  $P$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  telle que

$$P^{-1}AP = {}^tPAP \in D_n(\mathbf{R})$$

Théorème 12 - 11

où  $D_n(\mathbf{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices diagonales. Autrement dit toute matrice symétrique réelle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale, i.e. est orthodiagonalisable. La réciproque est également vraie : une matrice carrée **réelle** est symétrique si et seulement si elle est orthogonalement semblable à une matrice diagonale.

**Théorème spectral – écriture matricielle**

Une matrice  $A$  est symétrique **réelle** si et seulement si elle admet une décomposition

$$A = \sum_{i=1}^r \lambda_i P_i$$

avec  $\lambda_i$  des réels et  $P_i$  des matrices dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  vérifiant  $P_i P_j = \delta_{i,j} P_i$ , i.e. les  $P_i$  sont des matrices de projecteurs orthogonaux sur des espaces en somme directe orthogonale, ou si et seulement si elle admet une décomposition

Théorème 12 - 12

$$A = \sum_{j=1}^r \mu_j V_j {}^t V_j$$

avec  $\mu_j$  des réels et  $V_j$  des vecteurs dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  vérifiant  ${}^t V_i V_j = \delta_{i,j}$ , i.e. formant une famille orthonormée. Dans ce cas le spectre de  $A$  est formé des  $\lambda_i$  (resp.  $\mu_j$  avec multiplicité) auquel se rajoute 0 (resp. avec multiplicité  $n - r$ ).

*Démonstration.* Le premier théorème est la traduction matricielle du théorème spectral. Soit  $D$  la matrice diagonale  ${}^tPAP$  avec  $P$  donnée par ce théorème. On peut écrire  $D = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(f)} \lambda D_\lambda$  où  $D_\lambda$  est diagonale avec que des 0 et des 1 sur la diagonale.

Ainsi  $D_\lambda$  est une matrice de projecteur orthogonal car symétrique et de carré elle-même. On peut alors poser  $P_\lambda = P D_\lambda {}^tP$  et  $V_i = P e_i$  où  $(e_i)$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , car  $e_i {}^t e_i = E_{i,i}$  (avec des notations usuelles).

Réciproquement, dans le cas de la seconde décomposition, on complète éventuellement  $(V_i)$  en une base orthonormée de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  pour obtenir une base d'orthodiagonalisation de  $A$ . On ramène l'étude de la première décomposition à la seconde en choisissant une base orthonormée  $(V_{i,j})_{1 \leq j \leq n_i}$  de  $\text{Im}(P_i)$  et en écrivant  $P_i = \sum_{j=1}^{n_i} V_{i,j} {}^t V_{i,j}$ .

□

Danger

Autant la notion d'endomorphisme symétrique n'a été définie que dans le cadre des espaces euclidiens, donc réels, autant la notion de matrice symétrique n'est pas spécifique aux matrices réelles. Il est donc **impératif** de préciser, pour pouvoir appliquer le théorème spectral, que la matrice étudiée est symétrique **réelle**.

**Valeurs propres d’une matrice symétrique réelle**

Tout comme les endomorphismes symétriques pour lesquels on peut calculer explicitement  $\langle f(x) | y \rangle$ , il en va de même pour  ${}^tXAY$  pour  $A$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  et  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ . On obtient ainsi pour  $Y = X$  et  $Y = AX$  :

$${}^tXAX = \sum_{i=1}^n \lambda_i ({}^tV_iX)^2 \quad \text{et} \quad \|AX\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 ({}^tV_iX)^2$$

Remarque 12 - 8

et on en déduit

$$\min(\text{Sp}(A)) {}^tXX \leq {}^tXAX \leq \max(\text{Sp}(A)) {}^tXX$$

$$\min_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \|X\| \leq \|AX\| \leq \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} |\lambda| \|X\|$$

et

$$\text{Conv}(\text{Sp}(A)) = \left\{ \frac{{}^tXAX}{{}^tXX} \mid X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\} \right\}.$$

**(♠) Matrice symétrique réelle (définie) positive**

On note  $\mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$  l’ensemble des matrices dites symétriques réelles positives, i.e. dont le spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+$ . On a

$$A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R}) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}), {}^tXAX \geq 0.$$

Remarque 12 - 9

On note  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$  l’ensemble des matrices dites symétriques réelles définies positives, i.e. dont le spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$ . On a

$$A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{0\}, {}^tXAX > 0.$$

Dans ce cas l’application  $(X, Y) \mapsto {}^tXAY$  est une forme bilinéaire symétrique et définie positive, i.e. un produit scalaire, d’où l’importance de ces matrices particulières.

Exemple 12 - 10

Soit  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On a  ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$  et  ${}^tMM \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R}) \iff M \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ . L’aspect symétrique réel est direct. De plus pour  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , on a  ${}^tX {}^tMMX = \|MX\|^2$ , d’où l’assertion.

Remarque 12 - 10

Pour  $M$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  et  $X$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , on a  $MX = 0 \implies {}^tMMX = 0$  et  ${}^tMMX = 0 \implies {}^tX {}^tMMX = 0 \implies \|MX\|^2 = 0 \implies MX = 0$ , i.e.  $\text{Ker}(M) = \text{Ker}({}^tMM)$ .

Théorème 12 - 13

**Procédé d’orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT**

Soit  $M$  dans  $\text{GL}_n(\mathbf{R})$ , il existe un unique couple de matrices  $(O, T)$ , avec  $O$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  et  $T$  triangulaire supérieure à diagonale strictement positive, tel que  $M = OT$ .

*Démonstration.* On interprète  $M$  comme la matrice de changement de base de la base canonique à une certaine base  $\mathcal{B}$ . On considère  $\mathcal{B}'$  son orthonormalisée de GRAM-

SCHMIDT. Alors si  $O$  est la matrice de passage de la base canonique à  $\mathcal{B}'$ , c'est une matrice orthogonale. On a alors

$$M = P_{can}^{\mathcal{B}} = P_{can}^{\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = OT$$

puisque les deux conditions du procédé de GRAM-SCHMIDT équivalent exactement à ce que l'inverse de  $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$  soit triangulaire supérieure à diagonale strictement positive. Mais l'inverse d'une telle matrice a les mêmes propriétés puisqu'elles forment un groupe.

Réciproquement, si  $M = OT$ , on définit  $\mathcal{B}$  comme précédemment et  $\mathcal{B}'$  comme la base orthonormée dont  $O$  est la matrice dans la base canonique. Alors  $T$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  et donc  $\mathcal{B}'$  est l'orthonormalisée de  $\mathcal{B}$ .  $\square$

### Décomposition de CHOLESKY

Si  $M = OT$ , on a  ${}^tMM = {}^tTT$ . En fait pour  $A$  dans  $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ , il existe une unique matrice  $T$  triangulaire supérieure à diagonale strictement positive telle que  $A = {}^tTT$ . On peut l'obtenir directement via l'algorithme de CHOLESKY. Utile pour résoudre des systèmes linéaires, cette décomposition est semblable à  $M = LU$  obtenu par pivot de GAUSS, avec  $L$  et  $U$  triangulaires respectivement inférieure et supérieure.

André-Louis CHOLESKY (1875-1918) est un polytechnicien, topographe et géodésien. Son manuscrit « Sur la résolution numérique des systèmes d'équations linéaires », daté de 1910, n'était connu que par une publication du commandant BENOÎT datant de 1924. Le manuscrit a finalement été publié en 2005.

Aparté

### Orientation

Puisque  $\det$  est un morphisme de groupes entre  $GL_n(\mathbf{R})$  et  $\mathbf{R}^*$  invariant par passage à la transposée, il en résulte que sa restriction à  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est un morphisme (surjectif) de groupes entre  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  et  $\{\pm 1\}$ . Deux bases ont même orientation si le déterminant de la matrice de passage de l'une à l'autre est positif i.e. dans le cas des matrices orthogonales si ce déterminant vaut 1.

Remarque 12 - 11

### Isométrie directe - Rotation

On appelle isométrie directe, ou rotation, un endomorphisme orthogonal de déterminant 1. On note  $SO(E)$  leur ensemble. Les ensembles  $\mathcal{O}(E)$  et  $SO(E)$  sont des sous-groupes de  $GL(E)$ .

On appelle matrice spéciale orthogonale, ou matrice de rotation, une matrice orthogonale de déterminant 1. On note  $SO_n(\mathbf{R})$  leur ensemble. Les ensembles  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  et  $SO_n(\mathbf{R})$  sont des sous-groupes de  $GL_n(\mathbf{R})$ .

Théorème 12 - 14

*Démonstration.* Comme  $SO(E)$  est l'intersection de deux groupes à savoir  $\mathcal{O}(E)$  et  $SL(E)$ , c'est aussi un groupe.

Si  $E = \mathbf{R}^n$ , alors  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{L}(E)$  et dans cet isomorphisme les groupes linéaires, orthogonaux et spéciaux orthogonaux se correspondent. D'où le résultat pour  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  et  $SO_n(\mathbf{R})$ , assertions que l'on aurait pu vérifier directement.  $\square$

### Propriété fondamentale des automorphismes orthogonaux

Soit  $f$  un automorphisme orthogonal de  $E$  et  $F$  un sous-espace stable de  $E$  par  $f$ . Alors  $F^\perp$  est également  $f$ -stable.

Propriété 12 - 8



*Démonstration.* Soit  $x$  dans  $F^\perp$  et  $y$  dans  $F$ . Puisque  $f$  est un automorphisme de  $E$ , il est injectif et donc sa restriction à  $F$  aussi. Il en résulte que sa bi-restriction à  $F$  est un automorphisme de  $F$ . On dispose donc de  $z$  dans  $F$  tel que  $y = f(z)$ . On a donc

$$\langle f(x) | y \rangle = \langle f(x) | f(z) \rangle = \langle x | z \rangle = 0$$

et comme cette égalité est valable pour tout  $y$  dans  $F$ , il vient  $f(x) \in F^\perp$ , et donc  $F^\perp$  est  $f$ -stable.  $\square$

Proposition 12 - 8

Un endomorphisme orthogonal  $u$  d'un espace vectoriel réel admet un sous-espace stable (non nul) de dimension au plus 2.

*Démonstration.* En effet l'endomorphisme  $u + u^{-1}$  est bien défini, car  $u$  est un automorphisme orthogonal, et est symétrique. Il est admet donc un vecteur propre  $x$  et alors  $u^2(x) + x \in \mathbf{R}u(x)$ , donc  $u^2(x) \in \text{Vect}(x, u(x))$ , ce qui assure que  $\text{Vect}(x, u(x))$  est un sous-espace  $u$ -stable.  $\square$

Remarque 12 - 12

Soit  $P$  un facteur irréductible du polynôme minimal  $\pi_u$  de  $u$ . Alors  $P(u)$  n'est pas injectif et on dispose de  $x$  non nul dans  $\text{Ker}(P(u))$ . Puisque le corps de base est  $\mathbf{R}$  et que  $P$  est irréductible, il est de degré au plus 2 et donc l'espace  $u$ -stable engendré par  $x$ , i.e.  $\text{Vect}(u^k(x))_{k \in \mathbf{N}}$ , est de dimension au plus 2.

On verra encore (exercice 12 - 65) une autre démonstration de ce fait en utilisant la compacité.

Propriété 12 - 9

Si  $\dim(E) = 1$ , alors  $\mathcal{O}(E) = \{\pm 1\}$ .  
Si  $\dim(E) = 2$ , alors

$$\text{SO}(E) \simeq \text{SO}_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

et

$$\mathcal{O}^-(E) \simeq \mathcal{O}_2^-(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R} \right\}.$$

*Démonstration.* La vérification est directe à partir du fait que l'image d'une base orthonormée en est une.  $\square$

Remarque 12 - 13

Les éléments de  $\text{SO}(E)$  sont appelés rotations. On parle de rotation d'angle de mesure  $\theta$  lorsque le plan est orienté et qu'on a affaire à la matrice précédente.

Les éléments de déterminant négatif sont des symétries par rapport à des droites, i.e. leur polynôme minimal est  $X^2 - 1$  et les noyaux  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$  et  $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$  sont de dimension 1.

Danger

La mesure d'angle  $\theta$  est bien entendu définie à  $2\pi$  près, mais ce n'est pas tout. Selon l'orientation de la base choisie, l'expression peut changer et correspondre à  $-\theta$ .

On remarque que, néanmoins  $\cos(\theta)$  est invariant par changement de base, puisque c'est la moitié de la trace de l'endomorphisme orthogonal considéré.

**Réduction des automorphismes orthogonaux**

Soit  $f$  un automorphisme orthogonal. Son polynôme minimal a une décomposition en facteurs irréductibles sans multiplicité de la forme

$$\pi_f = (X - 1)^a (X + 1)^b \prod_{\theta} (X^2 - 2 \cos(\theta)X + 1)^{n_{\theta}}$$

**Théorème 12 - 15**

avec  $0 \leq a, b, n_{\theta} \leq 1$  des entiers positifs ou nuls et  $\theta$  variant dans un ensemble fini de réels dans  $[0; \pi]$ . Autrement dit on dispose d'une base orthonormée dans laquelle la matrice de  $f$  prend une forme diagonale par blocs dont les blocs de taille 1 sont égaux à 1 ou  $-1$ , et les autres blocs sont de taille 2 égaux à  $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ , pour un certain  $\theta$  (dépendant du bloc) dans  $\mathbf{R}$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur la dimension de  $E$  pour démontrer l'assertion sur les matrices. Dans le cas où  $\dim(E) = 1$ , cela résulte de la propriété précédente. Dans le cas  $\dim(E) = 2$ , si  $f$  est direct, alors cela résulte également de la propriété précédente. Enfin si  $f$  est indirect, alors son polynôme caractéristique est  $X^2 - 1$  et donc  $f$  est diagonalisable avec valeurs propres 1 et  $-1$ , ce qui achève de démontrer l'assertion dans ce cas.

Si  $E$  est de dimension plus grande, on dispose d'un sous-espace  $F$  de  $E$ , non nul, stable par  $f$  et de dimension au plus 2. Son supplémentaire orthogonal est alors également  $f$ -stable et on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence pour trouver une base dans laquelle la restriction de  $f$  à  $F^{\perp}$  est de la forme attendue. En la concaténant avec une base orthonormée adéquate de  $F$ , obtenue à l'étape précédente, on obtient une matrice de la forme recherchée pour  $f$ .

Puisque le polynôme minimal de  $f$  est alors le ppcm des polynômes minimaux des blocs de la matrice précédente, la première assertion en découle.  $\square$

Soit  $f$  une isométrie vectorielle directe dans un espace euclidien  $E$  de dimension 3. Alors soit  $f$  est l'identité, soit c'est une rotation au sens suivant : on dispose d'une base orthonormée directe de l'espace  $(u, v, w)$  et d'un réel  $\theta$  tels que

- $\text{Ker}(f - \text{Id}) = \text{Vect}(u)$  ;
- la restriction de  $f$  au plan  $\text{Vect}(v, w)$  est une rotation (plane) d'angle de mesure  $\theta$ .

**Exemple 12 - 11**

La matrice de  $f$  dans cette base est alors

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

et on a  $\text{Tr}(f) = 1 + 2 \cos(\theta)$ .

Dans ce cas on parle de la rotation d'axe orienté par  $u$  et d'angle de mesure  $\theta$ .

**Danger**

La rotation d'axe orienté par  $u$  et d'angle de mesure  $\theta$  est aussi la rotation d'axe orienté par  $-u$  et d'angle de mesure  $-\theta$ . En effet si  $(u, v, w)$  est directe, alors  $(-u, -v, w)$  aussi.

**Exemple 12 - 12**

On appelle retournement d'axe  $D$ , une isométrie vectorielle directe  $f$  telle que  $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) = D$  et  $\text{Ker}(f + \text{Id}_E) = D^\perp$ , où  $D$  est une droite (vectorielle). Sa matrice dans une base adaptée à la décomposition  $E = D \oplus^\perp D^\perp$  est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

autrement dit c'est une rotation d'angle plat (de mesure  $\pi$ ).

**Exercice**

Démontrer que les groupes  $\mathcal{O}_2(\mathbf{R})$  et  $\mathcal{O}_3(\mathbf{R})$  sont engendrés par leurs symétries, i.e. leurs éléments vérifiant  $A^2 = I_n$ .

Combien faut-il, au maximum, de symétries pour décomposer un élément quelconque de ces groupes ?

Montrer qu'il en va de même en dimension supérieure :  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est engendré par ses symétries et on peut majorer le nombre de symétries permettant de décomposer un élément quelconque par  $n$ .

**Remarque 12 - 14**

**Compacité de groupe orthogonal**

On déduit de ce qui précède que le spectre d'un automorphisme orthogonal est inclus dans  $\mathbf{U}$ . On peut remarquer que le groupe  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est compact : en munissant  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  de la norme euclidienne, donnée par  $\|M\|^2 = \text{Tr}({}^tMM)$ ,  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est borné puisqu'inclus dans la sphère centrée en 0 de rayon  $\sqrt{n}$ . Comme  $M \mapsto {}^tMM$  est une application continue et que  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est l'image réciproque du fermé  $\{I_n\}$ ,  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est fermé et donc, d'après le théorème de HEINE-BOREL, puisque  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  est de dimension finie,  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  est compact.

On peut montrer que c'est un sous-groupe compact maximal pour cette propriété et qu'il est constitué des éléments extrémaux de la boule unité par rapport à la norme donnée  $\|M\| = \sup_{\|X\| \leq 1} {}^t(MX)MX$ , dite norme subordonnée à la norme euclidienne sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

**6 Compléments**

**6 1 Dual du tore**

On note  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  l'ensemble des classes d'équivalence de réels pour la relation donnée par  $x \equiv y \iff x - y \in 2\pi\mathbf{Z}$ . On munit cet ensemble d'une structure de groupe additif, comme on l'a fait pour  $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ , i.e. via le morphisme canonique de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ . On l'appelle tore (de dimension 1).

Le tore  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  est un groupe isomorphe à  $\mathbf{U}$ , via l'isomorphisme  $t \mapsto e^{it}$ , ce qui permet d'identifier les fonctions  $2\pi$ -périodiques à des fonctions sur  $\mathbf{U}$ . Ceci montre

également que le tore est compact et on en déduit que l'ensemble des homomorphismes continus de  $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  dans  $\mathbf{C}^*$ , noté  $\widehat{\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}}$  et appelé dual du tore, est donné par

$$\widehat{\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}} \cong \text{Hom}(\mathbf{U}, \mathbf{U}) \cong \mathbf{Z}$$

et est formé des applications  $e_n : t \mapsto e^{int}$ , induites par  $z \mapsto z^n$  sur  $\mathbf{U}$ .

## 6 2 Séries de FOURIER

*Il y avait à l'Académie des sciences un FOURIER célèbre que la postérité a oublié, et dans je ne sais quel grenier un FOURIER obscur dont la postérité se souviendra.*

– Victor HUGO (Les misérables)

**Et ignem regunt numeri** (le feu aussi est régi par les nombres).

L'outil principal pour la mise en évidence de ces équations est la notion de flux, qui est un apport conceptuel majeur de FOURIER à la physique. Lui-même ne s'y trompe pas : à la fin de la « Théorie analytique de la chaleur », Joseph FOURIER déclare : *Cette notion de flux est fondamentale ; tant qu'on ne l'a point acquise, on ne peut se former une idée exacte du phénomène et de l'équation qui l'exprime.*

[...] *je ne crains pas de prononcer, comme si j'étais à dix siècles d'aujourd'hui que, depuis la théorie de la gravitation, aucune création mathématique n'a eu plus de valeur que celle-ci, quant aux progrès généraux de la philosophie naturelle ; peut-être même, en scrutant de près l'histoire de ces deux grandes pensées, trouverait-on que la fondation de la thermologie mathématique par FOURIER était moins préparée que celle de la mécanique céleste par NEWTON.*

– Auguste COMTE (1830, après la mort de FOURIER)

C'est Joseph FOURIER qui a introduit la notation  $\int_a^b f(x) dx$  en 1822.

Dans le traité de 1822, « Théorie analytique de la chaleur », Joseph FOURIER publie le fruit de ses expériences et réflexions, menées de front avec grands travaux d'intérêt public comme préfet et la mise au point de sa Préface à la Description de l'Égypte. Il ne se préoccupe ni de la nature de la chaleur ni du mécanisme de sa propagation. Il s'agissait ensuite pour FOURIER de résoudre ces équations aux dérivées partielles dans une série de cas particuliers. C'est alors qu'il développe la méthode de décomposition en harmoniques que nous appelons aujourd'hui l'analyse de FOURIER. Dès le premier exemple, le calcul de la température à l'intérieur d'un solide illimité dont la base est une bande horizontale et les côtés deux demi-plans verticaux appuyés sur la base, lorsque la base est maintenue à la température de l'eau bouillante (notée 1) et les côtés à celle de la glace fondante (notée 0), il introduit une série trigonométrique pour représenter une fonction donnée. Puis il consacre une série d'articles à la détermination de séries trigonométriques, sommes infinies de termes de la forme  $a_n \sin(nx)$  ou  $b_n \cos(nx)$ , que nous appelons aujourd'hui séries de FOURIER, censées représenter des fonctions de formes diverses données sur un intervalle, pour illustrer le fait, paradoxal à l'époque, qu'une même fonction (somme d'une série trigonométrique) peut avoir des expressions différentes aux différents intervalles.

FOURIER ne se borne pas à la théorie et aux calculs. Dans son appartement de préfet, il mène des expériences pour les vérifier et en dresse soigneusement les comptes rendus. Son travail est ignoré en 1807, reconnu mais non publié en 1812 avant d'être publié, sous une version rénovée, en 1822 alors qu'il est devenu Académicien.

L'équation obtenue par FOURIER s'écrit  $\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$  et il en cherche des solutions sous la forme  $T(x, y) = f(x)g(y)$ . Les conditions aux limites verticales permettent de trouver des solutions avec  $f(x) = e^{-(2p+1)x}$  et  $g(y) = \cos((2p+1)y)$ . En exploitant la linéarité de l'équation différentielle, la condition aux limites horizontale

peut être satisfaite si on pose  $g(y) = \sum_{p=0}^{\infty} a_p \cos((2p + 1)y)$  avec des coefficients  $a_p$  pris tels qu'en fait  $g \equiv 1$ .

D'autres avant FOURIER avaient étudié les séries trigonométriques : MADHAVA de SANGAMAGRAMA (1350–1425) les utilise pour calculer  $\pi$  avec la série (de TAYLOR) redécouverte par James GREGORY pour arctan, Daniel BERNOULLI les utilise pour étudier les cordes vibrantes (tout comme Sophie GERMAIN, contemporaine et amie de FOURIER, le fera pour la déformation élastique des surfaces), Joseph-Louis LAGRANGE utilise les polynômes trigonométriques mais conteste la possibilité de leur extension (chat échaudé craint l'eau froide! LAGRANGE a découvert à ses dépens que les séries de TAYLOR ne sont pas toutes convergentes et, si elles le sont, pas toujours vers la fonction de départ), mais c'est FOURIER qui, le premier, a compris d'une manière exacte et complète la nature des séries trigonométriques<sup>a</sup>.

Il faut attendre la notion de fonction, introduite par DIRICHLET, pour établir la convergence simple des séries de FOURIER pour une fonction de classe  $C^1$  par morceaux : c'est le théorème de DIRICHLET (1829). En 1876 Paul DU BOIS-REYMOND donne une fonction continue dont la série de FOURIER diverge en un point et il faut attendre Lennart CARLESON (1928) pour savoir que ce phénomène peut certes se produire mais seulement sur un ensemble de mesure nulle. Mieux, en 1964 Yitzhak KATZNELSON et Jean-Pierre KAHANE (tous deux élèves de Szolem MANDELBJROT) montrent que réciproquement tout ensemble de mesure nulle (raisonnable) est l'ensemble des points de divergence d'une série de FOURIER d'une certaine fonction continue.

Le dernier avatar des séries de FOURIER est la théorie des ondelettes. En 1987, Ingrid DAUBECHIES mit au point des ondelettes orthogonales appelées ondelettes de DAUBECHIES, facilement implémentables, et utilisées dans le standard JPEG 2000.

Soit  $f$  une fonction continue (éventuellement par morceaux) et  $2\pi$ -périodique et  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on note  $S_n(f)$  la projection orthogonale de  $f$  sur  $\mathcal{P}_n$ , espace des polynômes trigonométriques de degré inférieur à  $n$ . On l'appelle somme partielle de la série de FOURIER de  $f$  (de rang  $n$ ). On a donc

**Définition 12 - 15**

$$S_n(f) = \sum_{|k| \leq n} c_k(f) e_k = a_0(f) + \sum_{k=1}^n (a_k(f) \gamma_k + b_k(f) \sigma_k),$$

avec  $c_n(f) = \langle e_n | f \rangle$ ,  $a_k(f) = \frac{1}{\|\gamma_k\|^2} \langle \gamma_k | f \rangle$  et  $b_k(f) = \frac{1}{\|\sigma_k\|^2} \langle \sigma_k | f \rangle$ .

**Noyau de DIRICHLET**

Soit  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on note  $D_n$  le noyau de DIRICHLET, i.e.  $D_n = \sum_{k=-n}^n e_k$ . Pour  $t$  dans  $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ , on a

**Proposition 12 - 9**

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \quad \text{i.e.} \quad D_n = \frac{\sigma_{n+\frac{1}{2}}}{\sigma_{\frac{1}{2}}} = \gamma_n + \frac{\gamma_{\frac{1}{2}}}{\sigma_{\frac{1}{2}}} \sigma_n.$$

a. selon les mots de Bernhard RIEMANN

Pour  $f$  continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique, on a

Remarque 12 - 15

$$S_n(f) = f \star D_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt .$$

### Théorème de DIRICHLET

Théorème 12 - 16

Soit  $f$  de classe  $C^1$  par morceaux et  $2\pi$ -périodique. On note  $f_d$  et  $f_g$  les fonctions définies en  $x$  réel comme les limites à droite et gauche, respectivement, de  $f$  en  $x$ . Alors la série de FOURIER de  $f$  converge simplement vers  $\frac{f_g + f_d}{2}$ .

### Convergence simple et uniforme

Théorème 12 - 17

Soit  $f$  continue,  $2\pi$ -périodique et de classe  $C^1$  par morceaux, alors  $f$  est somme de sa série de FOURIER et celle-ci converge uniformément sur  $\mathbf{R}$  vers  $f$ .

### Noyau de FEJÉR

Soit  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , on note  $\tilde{D}_n$  le noyau de FEJÉR, i.e. la moyenne de CESÀRO du noyau de DIRICHLET

$$\tilde{D}_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} D_p .$$

Proposition 12 - 10

Pour  $t$  dans  $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ , on a

$$\tilde{D}_n(t) = \frac{1}{n} \left( \frac{\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 .$$

L'exercice 12 - 72 montre qu'alors la suite  $\sigma_n(f)$  donnée par

$$\sigma_n(f)(x) = f \star \tilde{D}_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \tilde{D}_n(t) dt$$

converge uniformément vers  $f$  si  $f$  est continue et  $2\pi$ -périodique. On déduit des remarques sur l'égalité de BESSEL que  $S_n(f)$  converge vers  $f$  au sens de la norme quadratique. Comme les fonctions continues  $2\pi$ -périodiques sont denses pour cette norme dans l'espace des fonctions continues par morceaux et  $2\pi$ -périodiques, on en déduit :

### Convergence quadratique

Théorème 12 - 18

Pour  $f$  continue par morceaux et  $2\pi$ -périodique,  $(S_n(f))$  tend vers  $f$  au sens de  $\|\cdot\|_2$ , i.e.  $\lim_n \|f - S_n(f)\|_2 = 0$ .

## 6 3 Algèbre bilinéaire

Soit  $\varphi$  une forme bilinéaire sur  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , avec  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ . On définit la matrice de  $\varphi$  dans la base  $\mathcal{B}$  par  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ .

De la sorte, comme on le vérifie directement, si  $x$  et  $y$  sont dans  $E$  et admettent  $X$  et  $Y$  comme vecteurs colonnes associés dans la base  $\mathcal{B}$ , alors  $\varphi(x, y) = {}^t X A Y$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , l'application  $\varphi \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{L}_2(E)$  et  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ .

**6 4 Dualité**

On note  $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ .

**Théorème de RIESZ**

Les espaces vectoriels  $E$  et  $E^*$  sont isomorphes. La donnée du produit scalaire permet de rendre cet isomorphisme canonique via  $a \mapsto \varphi_a$  avec  $\varphi_a$  dans  $E^*$  donnée par  $\varphi_a(x) = \langle a | x \rangle$ .

Théorème 12 - 19

Soit  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et  $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  sa base duale, i.e. telle que  $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$ . L'isomorphisme précédent permet d'identifier  $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$  avec une base de  $E$ . Alors  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  est orthonormée si et seulement si elle coïncide avec  $(e_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ , i.e. si et seulement si elle est auto-duale.

Remarque 12 - 16

**6 5 Adjoint**

Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . Il existe un unique endomorphisme de  $E$ , noté  $f^*$  et appelé adjoint de  $f$ , tel que

$$\forall (u, v) \in E^2, \quad \langle f(u) | v \rangle = \langle u | f^*(v) \rangle .$$

Théorème 12 - 20

De plus l'application  $f \mapsto f^*$  est un endomorphisme involutif de  $\mathcal{L}(E)$ . On a donc  $(f^*)^* = f$ .

Enfin si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée de  $E$ , alors

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) .$$

Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $v$  dans  $E$ . L'application  $u \mapsto \langle f(u) | v \rangle$  est une forme linéaire et donc, d'après le théorème de RIESZ, il existe un unique vecteur  $w$  tel que, pour tout  $u$  dans  $E$ , on ait  $\langle f(u) | v \rangle = \langle u | w \rangle$ . On note  $f^*(v)$  ce vecteur.

Par unicité et par linéarité en  $v$  de l'expression  $\langle f(u) | v \rangle$ , il en résulte que  $f^*$  est linéaire. De plus, toujours par unicité et par linéarité en  $f$  de l'expression  $\langle f(u) | v \rangle$ , il en résulte aussi que  $f \mapsto f^*$  est linéaire. Enfin par définition et par unicité,  $(f^*)^* = f$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $u$  et  $v$  des vecteurs de  $E$ . On note  $U$  et  $V$  les vecteurs colonnes correspondants à  $u$  et  $v$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $A$  et  $A^*$  les matrices de  $f$  et  $f^*$  toujours dans cette base  $\mathcal{B}$ . Puisque  $\mathcal{B}$  est orthonormée le produit scalaire s'écrit

$$\langle f(u) | v \rangle = {}^t(AU)V = {}^tU {}^tAV \quad \text{et} \quad \langle u | f^*(v) \rangle = {}^tU(A^*V) = {}^tUA^*V$$

de sorte que si  $f'$  est l'endomorphisme ayant  ${}^tA$  comme matrice dans la base  $\mathcal{B}$ , on a, pour tous  $u$  et  $v$  dans  $E$ ,  $\langle u | f'(v) \rangle = \langle u | f^*(v) \rangle$  et donc  $f'(v) - f^*(v)$  est orthogonal à tout  $E$ . Il est donc nul et  $f' = f^*$ , ce qui est l'assertion voulue une fois traduite matriciellement.

Dans le cas général, pour  $\mathcal{B}$  une base quelconque de  $E$ , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}^*}(f^*) = {}^t\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) .$$

Pour aller plus loin

## Corollaire 12 - 1

Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . On a

1.  $\text{Tr}(f^*) = \text{Tr}(f)$  et  $\det(f^*) = \det(f)$ .
2.  $f \in \mathcal{O}(E) \Leftrightarrow (f \in \text{GL}(E) \wedge f^* = f^{-1})$
3.  $f = f^* \Leftrightarrow$  pour toute base orthonormée  $\mathcal{B}$ ,  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ .

En effet la trace et le déterminant étant invariant par passage à la transposée, la première propriété est immédiate. La seconde résulte de la caractérisation matricielle de  $\mathcal{O}(E)$  puisque  $M$  appartient à  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  si et seulement si  ${}^tMM = I_n$ , i.e.  $M$  est inversible d'inverse  ${}^tM$ . La troisième est immédiate.

## Aparté

Le théorème qui suit est la clef de la compréhension de la réduction des endomorphismes orthogonaux et symétriques. Il permet d'étudier, plus généralement la notion d'endomorphisme normal, i.e. tel que  $f$  et  $f^*$  commutent.

## Théorème 12 - 21

Soit  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . On a

1.  $\text{Ker}(f^*) = (\text{Im}(f))^{\perp}$  et  $\text{Im}(f^*) = (\text{Ker}(f))^{\perp}$
2.  $\text{rg}(f^*) = \text{rg}(f)$
3. Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $F$  est  $f$ -stable si et seulement si  $F^{\perp}$  est  $f^*$ -stable.
4.  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$  et, si  $f$  est inversible, alors  $f^*$  l'est aussi et  $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ .

*Démonstration.* Soit  $v$  dans  $\text{Ker}(f^*)$  et  $u$  dans  $E$ . On a  $\langle f(u) | v \rangle = \langle u | f^*(v) \rangle = 0$  et donc  $v$  est orthogonal à  $\text{Im}(f)$ , i.e.  $\text{Ker}(f^*) \subset \text{Im}(f)^{\perp}$ . Il en résulte

$$\dim(\text{Ker}(f^*)) \leq \text{codim}(\text{Im}(f)) = \dim(\text{Ker}(f)) .$$

En appliquant ce qui précède à  $f^*$ , il vient  $\dim(\text{Ker}(f)) \leq \dim(\text{Ker}(f^*))$  et donc,  $\dim(\text{Ker}(f^*)) = \dim(\text{Ker}(f))$ . L'inclusion  $\text{Ker}(f^*) \subset \text{Im}(f)^{\perp}$  est donc une égalité, i.e.  $\text{Ker}(f^*) = \text{Im}(f)^{\perp}$ .

En l'appliquant à  $f^*$ , il vient  $\text{Ker}(f) = \text{Im}(f^*)^{\perp}$  et en prenant les orthogonaux, il vient  $\text{Ker}(f)^{\perp} = \text{Im}(f^*)$ . En particulier  $\text{rg}(f^*) = \text{codim}(\text{Ker}(f)) = \text{rg}(f)$ .

Soit maintenant  $F$  un sous-espace  $f$ -stable de  $E$  et  $v$  dans  $F^{\perp}$ . Pour  $u$  dans  $F$ , on a  $\langle u | f^*(v) \rangle = \langle f(u) | v \rangle = 0$ , puisque  $f(u) \in F$  et  $v \in F^{\perp}$ . Il en résulte  $f^*(v) \in F^{\perp}$  et donc  $F^{\perp}$  est  $f^*$ -stable. La réciproque est le sens direct appliqué à  $F^{\perp}$  et  $f^*$ .

Soit enfin  $u$  et  $v$  dans  $E$ , on a

$$\langle f \circ g(u) | v \rangle = \langle g(u) | f^*(v) \rangle = \langle u | g^* \circ f^*(v) \rangle$$

et donc  $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$ . La dernière assertion en résulte en remarquant que, bien entendu,  $\text{Id}_E^* = \text{Id}_E$ .  $\square$

## Remarque 12 - 17

On remarquera l'utilisation d'une démonstration de façon récursive.

## 6 6 Endomorphismes auto-adjoints

## Définition 12 - 16

Soit  $f$  dans  $\mathcal{L}(E)$ . On dit que  $f$  est auto-adjoint si  $f^* = f$ . On parle d'endomorphisme auto-adjoint ou aussi d'opérateur auto-adjoint. Il est équivalent de demander, si  $\mathcal{B}$  est une base orthonormée, que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$  soit symétrique.



Cette notion coïncide donc avec celle d'endomorphisme symétrique.

Un tel opérateur définit naturellement une forme bilinéaire symétrique par  $\varphi(x, y) = \langle f(x) | y \rangle$ . On dit qu'il est positif ou défini positif, si cette forme bilinéaire symétrique l'est. Autrement dit :

- $f$  est auto-adjoint positif si  $f = f^*$  et  $\forall u \in E, \langle f(u) | u \rangle \geq 0$ . Matriciellement, dans une base  $\mathcal{B}$  orthonormée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbf{R})$ . On note l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints positifs  $\mathcal{S}^+(E)$ .
- $f$  est auto-adjoint défini positif si  $f = f^*$  et  $\forall u \in E \setminus \{0\}, \langle f(u) | u \rangle > 0$ . Matriciellement, dans une base  $\mathcal{B}$  orthonormée  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ . On note l'ensemble des endomorphismes auto-adjoints définis positifs  $\mathcal{S}^{++}(E)$ .

On a

**Proposition 12 - 11**

Soit  $f$  dans  $\mathcal{S}(E)$ . Alors  $f$  est (défini) positif si et seulement si son spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+$  (respectivement  $\mathbf{R}_+^*$ ).

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base orthonormée de diagonalisation de  $f$ . On a, pour tout  $x$  dans  $E, \langle x | f(x) \rangle = \sum_{i \in I} \lambda_i \langle e_i | x \rangle^2$ . Si l'un des  $\lambda_i$  est (strictement) négatif, alors  $\langle e_i | f(e_i) \rangle$  a la même propriété et donc  $f$  n'est pas défini positif (respectivement positif). Dans le cas contraire la formule précédente permet de conclure.

**6 7 Normes subordonnées**

On rappelle que la norme subordonnée à une norme sur  $E$  est la norme sur  $\mathcal{L}_c(E)$  définie par

$$\|f\| = \sup_{\|u\|=1} \|f(u)\|$$

et qu'elle est sous-multiplicative, i.e. que c'est une norme d'algèbre.

**Théorème 12 - 22**

Soit  $E$  un espace euclidien. Pour  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{L}(E)$  (et donc dans  $\mathcal{L}_c(E)$ ), on a

1.  $\|f \circ g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$  ;
2.  $\|f^* \circ f\| = \|f\|^2$  ;
3.  $\|f^*\| = \|f\|$ .

Puisque  $E$  est de dimension finie, on dispose d'une base orthonormée  $(e_i)_{i \in I}$  de  $E$ . Soit  $x$  dans  $E$ . On a alors

$$\|f(x)\| = \left\| \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle f(e_i) \right\| \leq \sum_{i \in I} |\langle e_i | x \rangle| \|f(e_i)\|$$

et donc, d'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\|f(x)\|^2 \leq \sum_{i \in I} \langle e_i | x \rangle^2 \sum_{i \in I} \|f(e_i)\|^2 = \|x\|^2 \sum_{i \in I} \|f(e_i)\|^2$$

et donc  $f$  est continue de norme inférieure à  $(\sum_{i \in I} \|f(e_i)\|^2)^{1/2}$ .

Par ailleurs, on a  $\|f \circ g(x)\| \leq \|f\| \|g(x)\| \leq \|f\| \|g\| \|x\|$  et donc  $\|f \circ g\| \leq \|f\| \|g\|$ .

On a également  $\|f(x)\|^2 = \langle f^* \circ f(x) | x \rangle$ . D'après l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, cette dernière quantité est inférieure à  $\|f^* \circ f(x)\| \cdot \|x\|$  et donc à  $\|f^* \circ f\| \cdot \|x\|^2$ . Il en résulte  $\|f\|^2 \leq \|f^* \circ f\|$ .

Réciproquement, soit  $y$  un vecteur unitaire tel que  $\|f^* \circ f(x)\| = \langle f^* \circ f(x) | y \rangle$ . Il vient, toujours grâce à l'inégalité de CAUCHY-SCHWARZ,

$$\|f^* \circ f(x)\| = \langle f(x) | f(y) \rangle \leq \|f(x)\| \|f(y)\| \leq \|f\|^2 \|x\| \|y\|$$

et donc, puisque  $y$  est unitaire,  $\|f^* \circ f\| \leq \|f\|^2$ . Il en résulte  $\|f^* \circ f\| = \|f\|^2$ .

Enfin on a  $\|f\|^2 = \|f^* \circ f\| \leq \|f^*\| \|f\|$ . Si  $f$  est nulle, alors  $f^*$  aussi et donc  $\|f^*\| = \|f\|$ . Sinon  $\|f\| \neq 0$  et donc en simplifiant par  $\|f\|$  il vient  $\|f\| \leq \|f^*\|$ . En appliquant ce résultat à  $f^*$ , on en déduit  $\|f^*\| \leq \|f\|$  et donc  $\|f^*\| = \|f\|$ .

## 6 8 Espaces préhilbertiens complexes

### Idée

Si  $E$  est un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, on peut également le voir comme un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Néanmoins il y a deux automorphismes du corps  $\mathbf{C}$  laissant  $\mathbf{R}$  invariant, de sorte qu'il y a deux  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels qui donnent naturellement le même  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, à savoir  $E$  lui-même et  $\bar{E}$ . La loi interne sur  $\bar{E}$  est la même que sur  $E$ , mais la loi externe est définie par  $(\lambda, x) \mapsto \bar{\lambda}x$ .

Une forme bilinéaire complexe peut se définir, mais ce sera un objet purement complexe et ne donnera en particulier pas naissance à une norme. Pour pouvoir se ramener à des objets réels, il faut, comme l'a expliqué GALOIS, garder l'indétermination entre  $i$  et  $-i$ . On le sait bien puisque changer  $i$  en  $-i$  sur  $\mathbf{C}$ , c'est conjuguer les nombres complexes et qu'on a, pour  $z$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $z + \bar{z}$  et  $z\bar{z}$  sont réels. Ces deux quantités sont en effet indépendantes du choix qu'on a fait entre  $i$  et  $-i$  comme racine de  $-1$ , i.e. comme solution de l'équation  $X^2 + 1$ .

Ce sont d'ailleurs les mêmes idées qui président aux quantités conjuguées comme  $a + b\sqrt{2}$  et  $a - b\sqrt{2}$ . Si  $a$  et  $b$  sont rationnels, la somme et le produit de ces deux quantités sont rationnels bien qu'elles ne le soient pas (pour  $b$  non nul).

Les « bonnes » formes bilinéaires seront donc des formes qui ne distinguent pas entre les scalaires  $\lambda$  et  $\bar{\lambda}$ , i.e. entre  $E$  et  $\bar{E}$ . Il s'agit donc de formes bilinéaires dans  $\mathcal{L}_2(\bar{E} \times E)$  qui coïncident avec l'application canoniquement associée dans  $\mathcal{L}_2(E \times \bar{E})$ .

### Définition 12 - 17

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. On appelle forme sesquilinéaire sur  $E$  une application  $\varphi$  de  $E^2$  dans  $\mathbf{R}$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour  $x$  dans  $E$ , l'application  $\varphi_x$  donnée par  $y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire.
2. Pour  $y$  dans  $E$ , l'application  $\overline{\varphi_y}$  donnée par  $x \mapsto \overline{\varphi(x, y)}$  est linéaire (on dit aussi que  $\varphi_y$  est semi-linéaire).

### Remarques 12 - 18

- a. Le mot *sesquilinéaire* devrait être complété en *sesquilinéaire à gauche*. La propriété peut s'écrire  $\forall(x, x', y, y') \in E^4, \forall(\lambda, \mu) \in \mathbf{C}^2$

$$\varphi(\lambda x + x', \mu y + y') = \bar{\lambda}\mu\varphi(x, y) + \bar{\lambda}\varphi(x, y') + \mu\varphi(x', y) + \varphi(x', y')$$

- b. La sesquilinearité peut aussi se dire en demandant à  $\varphi_x$  d'être linéaire et à  $x \mapsto \varphi_x$  d'être semi-linéaire, i.e. à  $x \mapsto \overline{\varphi_x}$  d'être linéaire.
- c. L'ensemble des formes sesquilinéaires est un espace vectoriel complexe.

Définition 12 - 18

On dit qu'une forme sesquilinéaire est à symétrie hermitienne ou, plus simplement, que c'est une forme sesquilinéaire hermitienne si, pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ , on a  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ .

On note  $\mathcal{L}_2^h(E)$  l'ensemble de ces formes : c'est un espace vectoriel réel, mais pas complexe (sauf si  $E$  est nul).

Remarque 12 - 19

Une application  $\varphi$  de  $E^2$  dans  $\mathbf{R}$  est une forme sesquilinéaire hermitienne si et seulement si

1. Pour  $x$  dans  $E$ , l'application  $\varphi_x$  donnée par  $y \mapsto \varphi(x, y)$  est linéaire.
2. Pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ , on a  $\varphi(x, y) = \overline{\varphi(y, x)}$ .

On pourrait aussi s'intéresser aux formes anti-hermitiennes etc.

Définition 12 - 19

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. On appelle forme quadratique hermitienne sur  $E$  une application  $q$  de  $E$  dans  $\mathbf{R}$  telle qu'il existe une forme sesquilinéaire hermitienne  $\varphi$  vérifiant, pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $q(x) = \varphi(x, x)$ . On note  $\mathcal{Q}^h(E)$  l'ensemble de ces formes quadratiques hermitiennes.

On peut la qualifier de positive, négative ou définie selon qu'elle est à valeurs dans  $\mathbf{R}_+$ , dans  $\mathbf{R}_-$  ou ne s'annule qu'en 0.

Remarques 12 - 20

Si  $\varphi$  est une forme sesquilinéaire hermitienne, alors l'application  $q$  donnée par  $q(x) = \varphi(x, x)$  est bien une forme quadratique hermitienne puisqu'elle est à valeurs réelles en raison du côté hermitien de  $\varphi$ .

L'ensemble des formes quadratiques hermitiennes est un espace vectoriel réel.

Définition 12 - 20

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe. On appelle produit scalaire sur  $E$  une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive. On le note en général  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  et on dit que  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  est un espace préhilbertien complexe.

Si, de plus,  $E$  est de dimension finie, on dit que  $E$  est hermitien.

Exemples 12 - 13

a. Sur  $\mathbf{C}^n$ , on définit  $\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i$ . C'est le produit scalaire canonique sur  $\mathbf{C}^n$ , i.e. c'est une forme quadratique définie positive.

b. Sur  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , on définit  $\varphi(A, B) = \text{Tr}(\overline{A}B)$  mais, comme dans le cas réel, ce n'est pas le meilleur choix. On pose  $A^* = \overline{A}^t$  et  $\varphi(A, B) = \text{Tr}(A^*B)$ , alors  $\varphi$  est définie positive et correspond au produit scalaire canonique sur  $\mathbf{C}^{n^2}$ .

c. Sur  $C^0(I, \mathbf{C})$ , on définit  $\varphi(f, g) = \int_I \overline{f}g$ . On peut encore l'interpréter comme un produit scalaire canonique.

d. Sur  $\ell^2(\mathbf{C})$ , i.e. l'espace des suites  $(a_n)$  telles que  $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2$  est convergente, on a le produit scalaire canonique  $\langle (a_n) | (b_n) \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a_n} b_n$ .

**Identités de polarisation**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe,  $\varphi$  une forme sesquilinéaire hermitienne sur  $E$  et  $q$  sa forme quadratique hermitienne associée. Pour  $x$  et  $y$  dans  $E$  et  $\lambda$  et  $\mu$  dans  $\mathbf{C}$ , on a

$$q(\lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 q(x) + |\mu|^2 q(y) + 2 \operatorname{Re}(\bar{\lambda} \mu \varphi(x, y))$$

Propriété 12 - 10

et en particulier

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y) + iq(x-iy) - iq(x+iy))$$

ou encore

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{\operatorname{Card}(\mathbf{U}_4)} \sum_{\zeta \in \mathbf{U}_4} \zeta q(\zeta x + y) = \frac{1}{\operatorname{Card}(\mathbf{U}_4)} \sum_{\zeta \in \mathbf{U}_4} \bar{\zeta} q(x + \zeta y).$$

*Démonstration.* Avec les notations de la propriété, on a

$$q(\lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 q(x) + |\mu|^2 q(y) + \bar{\lambda} \mu \varphi(x, y) + \bar{\mu} \lambda \varphi(y, x)$$

et la formule s'en déduit en utilisant  $\varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$ . Les autres formules sont immédiates.  $\square$

Remarque 12 - 21

L'association entre formes sesquilinéaires hermitiennes et formes quadratiques est donc bijective. On dit que  $\varphi$  est la forme polaire de  $q$ .

Aparté

En particulier  $\mathcal{L}_2^h(\bar{E} \times E) \simeq \mathcal{Q}^h(E)$ .

**Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe,  $\varphi$  une forme sesquilinéaire hermitienne sur  $E$  et  $q$  sa forme quadratique hermitienne associée. Si  $\varphi$  (ou  $q$ ) est positive, alors, pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a

Théorème 12 - 23

$$|\varphi(x, y)|^2 \leq q(x)q(y).$$

Si  $\varphi$  (ou  $q$ ) est définie positive, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est liée.

On en déduit directement

**Inégalité de MINKOWSKI**

Soit  $E$  un espace vectoriel complexe,  $\varphi$  une forme sesquilinéaire hermitienne sur  $E$  et  $q$  sa forme quadratique hermitienne associée. Si  $\varphi$  (ou  $q$ ) est positive, alors, pour tous  $x$  et  $y$  de  $E$ , on a

Théorème 12 - 24

$$\sqrt{q(x+y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

Si  $\varphi$  (ou  $q$ ) est définie positive, il y a égalité dans cette inégalité si et seulement si la famille  $(x, y)$  est positivement liée, i.e. il existe  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}_+$  tel qu'on ait soit  $x = \lambda y$ , soit  $y = \lambda x$ .

*Démonstration.* Une subtilité intervient par rapport à la démonstration dans le cas réel. Il faut en effet pouvoir se ramener à une étude de fonctions réelles. Soit donc  $x$  et  $y$  dans  $E$ . On choisit  $\theta$  dans  $\mathbf{R}$  tel que  $\varphi(x, y) = e^{i\theta} |\varphi(x, y)|$  et alors on a

$$\varphi(e^{i\theta} x, y) = e^{-i\theta} \varphi(x, y) = |\varphi(x, y)| = |\varphi(e^{i\theta} x, y)| .$$

Comme on a affaire à une quantité réelle (positive), il vient dans le cas  $q(x) = q(y) = 1$

$$0 \leq q(e^{i\theta} x - y) = 2 - 2|\varphi(x, y)|$$

et on termine les démonstrations comme dans le cas réel. □

Grâce au choix de la sesquilinearité, on peut définir une norme, et donc mesurer des grandeurs, sur  $E$ .

Propriété 12 - 11

Soit  $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  un espace préhilbertien complexe. La fonction sur  $E$  définie par  $\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle} = \sqrt{q(x)}$  est une norme, dite norme hilbertienne (ou hermitienne) sur  $E$  associée à  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ .

**6 9 Inégalité isoperimétrique**

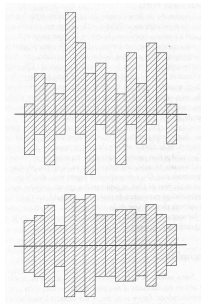
La méthode consistant à mesurer une surface à l'aide de son périmètre est fréquente durant l'antiquité grecque. HOMÈRE indique que la ville de TROIE fait 10 200 pas, indiquant par là qu'en faire le tour demande une marche de 10 200 pas. À l'époque des grecs, tous ne semblent pas au courant du théorème isoperimétrique et de ses conséquences. PROCLOS (412-495) mentionne le cas de tricherie de géomètres datant de cette époque. Des terrains étaient divisés en différents lopins de même périmètre mais de surfaces différentes, les géomètres, responsables du partage, obtenaient les plus grosses parcelles. La supercherie fut découverte au moment des moissons, dont l'abondance est proportionnelle à la surface et non au périmètre !

Une légende raconte que la ville de Carthage fut fondée par la princesse phénicienne ELISSA, surnommée DIDON. Au IX<sup>e</sup> siècle avant Jésus-Christ, DIDON dut s'enfuir après que son frère PYGMALION eut assassiné son époux afin de prendre le pouvoir. Elle accosta à Byrsa<sup>b</sup>, citadelle proche du Tunis actuel, et demanda asile au roi de Numidie IARBAS et l'octroi d'un terrain pour s'y installer. Il ne lui concéda que ce que pourrait entourer la peau d'un boeuf. Elle découpa la peau en si fines lanières qu'elle obtint, bout à bout, une longueur fantastique de près de 4 km. Puis elle fit disposer cette corde sur le sol en formant un demi-cercle, la côte de Byrsa étant presque rectiligne.

Une conséquence directe de l'égalité de BESSEL et du calcul des coefficients de FOURIER d'une dérivée par intégration par parties, donne l'inégalité de WIRTINGER, i.e.  $\|f\|_2 \leq \|f'\|_2$  si  $a_0(f) = 0$ , permettant de répondre à la question (moins générale) suivante : si on dispose d'une corde de longueur fixée, quelle est la plus grande surface que l'on puisse entourer avec cette corde ?

La réponse est le cercle et cette question, ainsi que cette réponse, peut se généraliser en dimension supérieure. Par exemple si on considère tous les objets de surface  $S$  donnée, quel est la valeur maximale de leur volume  $V$  et quand est-elle atteinte ? Il s'agit encore une fois de la sphère, mais la démonstration ne fait plus appel aux séries de FOURIER et elle date de 1882, par Hermann SCHWARZ. Deux idées importantes apparaissent dans ce problème :

b. la peau de boeuf

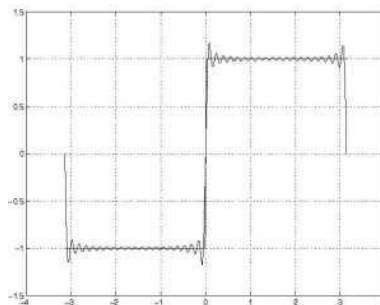


1. Le théorème de BRUNN-MINKOWSKI : si  $A$  et  $B$  sont deux compacts de l'espace euclidien de dimension  $n$ , alors  $\text{Vol}(A + B)^{1/n} \geq \text{Vol}(A)^{1/n} + \text{Vol}(B)^{1/n}$ , avec égalité dans le cas de deux convexes (compacts) homothétiques. Il s'agit d'une inégalité de convexité (ou plutôt de log-convexité).
2. La symétrisation de STEINER. En voici une illustration tirée du livre de Gilles GODEFROY, *Mathématiques mode d'emploi*. Elle montre que les figures symétriques ont, à surface égale, un périmètre moins important.

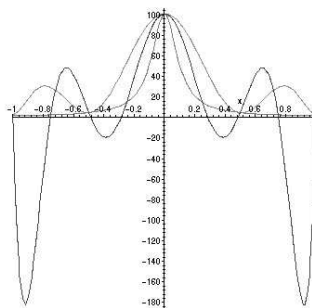
On peut généraliser ce problème : étant donnés deux volumes  $V$  et  $V'$ , quelle est la surface minimale susceptible de les contenir ? L'observation incite à penser qu'il s'agit d'une double bulle, limitée par deux portions de sphère, avec un « disque » de séparation. Ceci n'a cependant été prouvé que pour  $V = V'$  et ce en 1995 !

### 6 10 Phénomène de GIBBS

Le phénomène de GIBBS est un effet de bord qui se produit à proximité d'une discontinuité pour la somme partielle d'une série de FOURIER d'une fonction de classe  $C^1$  par morceaux. Il y a une amplification des discontinuités, malgré l'augmentation du nombre de coefficients calculés.



Ce phénomène est à rapprocher du phénomène de RUNGE qui montre que l'augmentation du nombre de points d'interpolation pour l'interpolation polynomiale d'une fonction continue n'est pas nécessairement une bonne chose : il ne faut pas croire qu'augmenter le nombre de termes dans une série convergente est toujours une bonne chose !



### 6 11 Charles FOURIER

Quant à l'homonyme du Baron napoléonien Joseph FOURIER, le philosophe Charles FOURIER, créateur lui aussi de « séries de FOURIER », c'est un utopiste proche des idées de Robert OWEN, père fondateur du mouvement coopératif. Ses phalanstères ont inspiré diverses tentatives de vie communautaire, dont la plus connue à l'heure actuelle est *Longo Mai*.

# Exercices

## Pratique

### 12 - 1 Ⓢ ★ Projection sur un plan

Soit  $E = \mathbf{R}^3$  et  $\varphi$  l'application de  $E^2$  dans  $\mathbf{R}$  donnée par

$$\varphi(u, u') = xx' + xy' + x'y + 2yy' + 2yz' + 2y'z + 5zz'$$

où  $u = (x, y, z)$  et  $u' = (x', y', z')$ .

- Montrer qu'on a  $\varphi(u, u) = (x + y)^2 + (y + 2z)^2 + z^2$ .
- Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.  
On munit dorénavant  $E$  de ce produit scalaire.
- Soit  $P$  le plan d'équation  $z = 0$ . Trouver une base orthonormée de  $P$  dont les deux premiers vecteurs de base sont dans  $P$ .
- Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur  $P$ ?

### 12 - 2 Ⓢ ★ Projection sur un hyperplan

On munit  $\mathbf{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $H$  l'hyperplan d'équation  $x + y + z + t = 0$  et  $p$  la projection orthogonale sur  $H$ .

- Pour  $u$  dans  $\mathbf{R}^4$ , calculer  $\|u - p(u)\|$ .
- Quelle est la matrice de  $p$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^4$ ?

### 12 - 3 Ⓢ ★ Symétrie hyperplane

On munit  $\mathbf{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique. Soit  $H$  le sous-espace de  $\mathbf{R}^4$  engendré par les trois vecteurs donnés par  $u_1 = (1, 1, 0, 1)$ ,  $u_2 = (-2, 0, 1, 1)$  et  $u_3 = (0, 1, 0, 1)$ .

- Montrer que  $H$  est un hyperplan et en donner une équation.
- Trouver un vecteur unitaire dans  $H^\perp$ .
- Quelle est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à  $H$  dans la base canonique de  $\mathbf{R}^4$ ?

### 12 - 4 Ⓢ ★ Projection sur un plan

On munit  $\mathbf{R}^4$  de sa structure euclidienne canonique et on se donne les vecteurs  $(u_i)_{1 \leq i \leq 4}$  donnés par  $u_1 = (1, -3, 0, 2)$ ,  $u_2 = (3, -3, -2, 1)$ ,  $u_3 = (1, 0, 1, 0)$  et  $u_4 = (0, 0, 0, 1)$ .

- Montrer que  $(u_1, u_2, u_3, u_4)$  est une base de  $\mathbf{R}^4$ .
- Orthonormaliser cette base selon le procédé de GRAM-SCHMIDT.
- Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan de  $\mathbf{R}^4$  d'équations  $x - 3y + 2t = 3x - 3y - 2z + t = 0$ ?

### 12 - 5 Ⓢ ★★ Parallélépipède

Soit  $E$  un espace euclidien et  $u, v, w$  des vecteurs de  $E$ . On pose, pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $T(x, y) = \|x\| + \|y\| - \|x + y\|$  et  $P(x, y) = \|x\| + \|y\| + \|x + y\|$ . Enfin on pose  $S = \|u\| + \|v\| + \|w\|$  et  $S' = \|u + v + w\|$ .

- Montrer  $S + S' \geq \max(P(u, v), P(v, w), P(w, u))$ .
- On pose  $Z = T(u, v)P(u, v) + T(v, w)P(v, w) + T(w, u)P(w, u)$ . Montrer  $Z = S^2 - S'^2$ .
- En déduire  $S - S' \leq T(u, v) + T(v, w) + T(w, u)$ .
- Démontrer  $\|u + v\| + \|v + w\| + \|w + u\| \leq \|u\| + \|v\| + \|w\| + \|u + v + w\|$ .

### 12 - 6 Ⓢ ★★ Calcul de distance ♥

Calculer  $\inf_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \int_0^\pi (a \sin(t) + b \cos(t) + t)^2 dt$ .

### 12 - 7 Ⓢ ★★ Calcul de distance ♥

Calculer  $\inf_{(a,b) \in \mathbf{R}^2} \int_0^1 (t \ln(t) - a - bt)^2 dt$ .

### 12 - 8 Ⓢ CCP 2017 ★★ Projeté orthogonal

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{R}$ . On définit, pour  $f$  et  $g$  dans  $E$   $\langle f | g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x) dx$ .

- Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .
- On note  $F$  le sous-espace de  $E$  engendré par les fonctions  $\cos$  et  $x \mapsto \cos(2x)$ . Déterminer le projeté orthogonal de  $\sin^2$  sur  $F$ .

### 12 - 9 Ⓢ ★★ Projeté orthogonal

Soit  $E$  l'espace préhilbertien  $C^0([0; 1], \mathbf{R})$  muni du produit scalaire canonique donné par  $\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$ .

- Soit  $f$  dans  $E$ . Montrer qu'il existe des scalaires  $a, b$  et  $c$  uniques tels que l'infimum

$$\inf_{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3} \int_0^1 (f(t) - x - yt - zt^2)^2 dt$$

soit atteint en  $(a, b, c)$ .

- Calculer explicitement ces scalaires dans le cas où  $f$  est donnée par  $f(t) = \exp(-t)$ .

## Espaces préhilbertiens

**12 - 10** ⑤ ★ **Théorème de représentation de RIESZ**

Soit  $E$  un espace euclidien. Démontrer que l'application  $x \mapsto \varphi_x$ , avec  $\varphi_x$  donnée par  $\varphi_x(y) = \langle x | y \rangle$ , est un isomorphisme entre  $E$  et  $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ .

**12 - 11** ⑤ ★ **Sphères et plans**

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel,  $\alpha, \beta, \gamma$  des réels et  $a$  dans  $E$ . Déterminer  $\{x \in E \mid \alpha \|x\|^2 + \beta \langle x | a \rangle + \gamma = 0\}$ .

**12 - 12** ⑤ **M 2015** ★ **Familles libres**

Soit  $E$  un espace préhilbertien. Montrer que  $\{(x, y) \in E^2 \mid (x, y) \text{ est libre}\}$  est un ouvert de  $E^2$ .

**12 - 13** ⑤ ★★ **Orthogonal**

Soit  $E$  l'espace préhilbertien  $C([0; 1], \mathbf{R})$  muni du produit scalaire donné par  $\langle f | g \rangle = \int_0^1 fg$ , et  $F$  le sous-espace des fonctions polynomiales. Déterminer  $F^\perp$  et en déduire :  $F \neq (F^\perp)^\perp$  et  $E \neq F \oplus F^\perp$ .

**12 - 14** ⑤ ★★ **Approximation quadratique**

Soit  $E$  l'espace préhilbertien des fonctions continues par morceaux sur un segment  $[a; b]$ , muni du produit scalaire donné par  $\langle f | g \rangle = \int_a^b fg$ .

Montrer que pour tout  $f$  dans  $E$  et  $\varepsilon$  dans  $\mathbf{R}_+^*$ , on dispose d'un polynôme  $P$  tel que  $\|f - P\| \leq \varepsilon$ . Que dire de la famille  $(X^n)_{n \in \mathbf{N}}$  dans  $E$  ?

**12 - 15** ⑤ ★★ **Norme hilbertienne**

Soit  $E = C^0([0; 1], \mathbf{R})$  et  $q$  de  $E$  dans  $\mathbf{R}$  défini par  $q(f) = \int_0^1 f^2(t) dt - \left(\int_0^1 f(t) dt\right)^2$ . Déterminer tous les sous-espaces vectoriels de  $E$  sur lesquels  $q$  définit le carré d'une norme hilbertienne.

**12 - 16** ⑤ ★★ **Identité du parallélogramme**

Soit  $E$  un espace vectoriel réel muni d'une norme  $\|\cdot\|$  vérifiant l'égalité du parallélogramme. On pose, pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $\varphi(x, y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$ .

- Montrer, pour  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $\varphi(x, y) = 2\varphi\left(x, \frac{1}{2}y\right)$ .
- En déduire, pour  $x, x'$  et  $y$  dans  $E$ ,  $\varphi(x + x', y) = \varphi(x, y) + \varphi(x', y)$ .
- En déduire, pour  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}$  et  $x$  et  $y$  dans  $E$ ,  $\varphi(\lambda x, y) = \lambda\varphi(x, y)$ .
- En déduire que  $\|\cdot\|$  est une norme hilbertienne.

**12 - 17** ★★★ **Espaces de HILBERT** ♠

Soit  $E$  un espace préhilbertien possédant une base dénombrable  $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ . Montrer que  $E$  n'est pas un espace de HILBERT (i.e. n'est pas complet).

## Endomorphismes symétriques

**12 - 18** ⑤ ★ **Racines de l'identité**

Soit  $f$  un endomorphisme symétrique de  $E$ , euclidien, et  $p$  un entier strictement positif tel que  $f^p = \text{Id}_E$ . Montrer  $f^2 = \text{Id}_E$ .

**12 - 19** ⑤ ★ **Matrice nilpotente**

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer que si la matrice  $A + {}^tA$  est nilpotente, alors  $A$  est antisymétrique.

**12 - 20** ⑤ ★★ **Extrema**

Déterminer les extrema de  $\frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$  pour  $(x, y, z)$  dans  $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ .

**12 - 21** ⑤ ★★ **Diagonalisation**

Diagonaliser dans une base orthonormée la matrice dont tous les éléments diagonaux sont égaux à  $a$  et les autres à  $b$ , avec  $a$  et  $b$  réels.

**12 - 22** ⑤ **M 2015** ★★ **Étude d'un endomorphisme symétrique**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  un endomorphisme défini par  $f : x \mapsto \langle b | x \rangle a + \langle a | x \rangle b$ , avec  $(a, b)$  une famille libre.

- Montrer que  $f$  est un endomorphisme symétrique et déterminer ses éléments propres.
- Calculer  $\sup_{\|x\|=1} \{|\langle a | x \rangle \cdot \langle b | x \rangle|\}$ .

**12 - 23** **X 2017** ★★ **Quadrique**

Tracer la surface d'équation  $x + y^2 + z^2 = 1$  dans  $\mathbf{R}^3$ .

**12 - 24** ⑤ ★★ **Moindres carrés**

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ .

- Montrer  $\mathbf{R}^p = \text{Ker}(A) \oplus \text{Im}({}^tA)$ .
- En déduire  $\text{Im}({}^tAA) = \text{Im}({}^tA)$ .
- Montrer que le spectre de  ${}^tAA$  est inclus dans  $\mathbf{R}_+$  et que, pour tous entiers  $j$  et  $k$  strictement positifs, on a  $\text{Im}(({}^tAA)^j) = \text{Im}(({}^tAA)^k)$ .
- Soit  $Y$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Montrer que les points de  $\mathbf{R}^p$  où  $X \mapsto \|AX - Y\|^2$  atteint son minimum sont solutions de l'équation  ${}^tAAX = {}^tAY$ .
- Montrer que l'équation précédente a une unique solution orthogonale à  $\text{Ker}(A)$ . On la note  $\varphi(Y)$ .
- Montrer  $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}({}^tA)$  et  $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}({}^tA)$ .



**12 - 25** Ⓢ ★★ **Moindres carrés**

On se donne des observations sous la forme de couples  $(x_i, y_i)$  et on cherche un couple de réels  $(a, b)$  de sorte que la droite d'équation  $y = ax + b$  passe le près possible des données observées. Le principe du maximum de vraisemblance consiste à minimiser la fonction  $(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - (ax_i + b)|^2$ . On pose

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix},$$

et il s'agit donc de minimiser la quantité  $\|Y - AU\|^2$  où  $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ . On a donc  $U \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbf{R})$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbf{R})$  et  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ .

La droite d'équation  $y = ax + b$  ainsi obtenue s'appelle **droite des moindres carrés de  $y$  par rapport à  $x$** .

**a.** À quelle condition  $A$  est-elle de rang 2? On supposera cette condition vérifiée par la suite.

**b.** En utilisant l'exercice 12 - 24, montrer

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} \text{ et } b = \mathbf{E}(Y) - \frac{\mathbf{E}(X) \text{Cov}(X, Y)}{V(X)}.$$

(On donnera un sens aux espérances, variances et covariances.)

**c.** Montrer que, si  $X$  et  $Y$  ont même variance, la droite des moindres carrés de  $x$  par rapport à  $y$  est symétrique de la droite des moindres carrés de  $y$  par rapport à  $x$  par rapport à la parallèle à la première bissectrice passant par  $(\mathbf{E}(X), \mathbf{E}(Y))$ .

**d.** Que se passe-t-il dans le cas général?

**12 - 26** Ⓢ ★★  $\mathcal{O}_{2,2}(\mathbf{R})$

Soit  $A, B, C$  et  $D$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . On définit  $K$  et  $M$  dans  $\mathcal{M}_{2n}(\mathbf{R})$  par

$$K = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \text{ et } M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

et on suppose  ${}^tMKM = K$ .

**a.** Montrer que  $A$  et  $D$  sont inversibles.

**b.** On pose  $U = CA^{-1}$ . Montrer que  $I - {}^tUU$  est symétrique et que son spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

**12 - 27** Ⓢ ★★ **Ellipsoïdes**

Soit  $A$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ ,  $C$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  et  $a$  dans  $\mathbf{R}$ . On définit  $S$  dans  $\mathcal{S}_{n+1}(\mathbf{R})$  par

$$S = \begin{pmatrix} A & C \\ {}^tC & a \end{pmatrix}$$

et on suppose que le spectre de  $S$  est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

Calculer le minimum de  $\varphi$  définie de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  dans  $\mathbf{R}$ , par

$$\varphi(X) = {}^tXAX - 2{}^tCX + a.$$

**12 - 28** Ⓢ **C** ★★ **Inverse de HADAMARD** ♥

**a.** Soit  $S$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  dont le spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+$ .

Montrer qu'il existe  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tel que  $S = {}^tAA$ .

**b.** Soit  $S$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  à coefficients tous non nuls et dont le spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+$ , et  $T$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  donné par  $t_{ij} = \frac{1}{s_{ij}}$  pour  $1 \leq i, j \leq n$ .

Montrer que le spectre de  $T$  est inclus dans  $\mathbf{R}_+$  si et seulement si  $S$  est de rang 1.

**12 - 29** Ⓢ **M 2017** ★★ **Traces**

On considère un espace euclidien  $E$ , ainsi qu'une base  $(e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  orthonormale.

**a.** Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$ . Vérifier que  $\text{Tr}(f) = \sum_{k=1}^n \langle f(e_k) | e_k \rangle$ .

**b.** Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes symétriques de  $E$  ayant leurs valeurs propres positives. Montrer que  $0 \leq \text{Tr}(f \circ g) \leq \text{Tr}(f) \text{Tr}(g)$ .

**c.** On suppose de plus  $f$  inversible. Dans quel cas a-t-on  $\text{Tr}(f \circ g) = 0$ ? Et  $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(f) \text{Tr}(g)$ ?

**12 - 30** Ⓢ ★★ **Équation différentielle**

Soit  $M$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  dont le spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$  et  $V$ , de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ , la solution du problème de CAUCHY  $X' = MX$  et  $X(0) = X_0$  avec  $X_0 \neq 0$ .

On munit  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$  de la norme euclidienne usuelle. Montrer que, pour tout  $r > 0$ , la trajectoire de  $V$  ne passe en un point de la sphère  $S(0, r)$  que pour une unique valeur de  $t$ .

**12 - 31** Ⓢ **X 2017** ★★ **Théorème de COURANT-FISCHER**

Soit une matrice carrée d'ordre  $n > 1$  symétrique réelle  $A$  et  $B$  la matrice extraite obtenue en supprimant sa dernière ligne et sa dernière colonne. Que dire des valeurs propres de  $A$  par rapport à celles de  $B$ ?

**12 - 32** Ⓢ ★★★ **Théorème de COURANT-FISCHER**

Soit  $E$  un espace euclidien et  $f$  dans  $\mathcal{S}(E)$ . On note  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  les valeurs propres de  $f$  et on suppose  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ .

Pour  $k$  dans  $[[1; n]]$  on note  $G_k$  l'ensemble des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension  $k$ .

**a.** Démontrer

$$\lambda_k = \inf_{F \in G_k} \sup_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x) | x \rangle}{\|x\|^2}.$$

b. Démontrer

$$\lambda_k = \sup_{F \in \mathcal{G}_{n+1-k}} \inf_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle f(x) | x \rangle}{\|x\|^2}.$$

c. En déduire les extrema de  $\frac{\langle f(x) | x \rangle}{\|x\|^2}$  sur  $E \setminus \{0\}$ .

d. Que faire pour trouver ces extrema si  $f$  n'est plus supposé symétrique ?

### 12 - 33 (S) M ★★★ Matrices symétriques ♥♥

a. Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (i)  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  et  $\text{Sp } A \subset \mathbf{R}_+^*$ ,
- (ii) il existe  $Q \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$  telle que  $A = {}^tQQ$ ,
- (iii)  $A \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  et pour tout  $x \in \mathbf{R}^n$  non nul,  ${}^t_xAx > 0$ .

On notera alors  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ .

b. Montrer que si  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ , il existe  $B \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$  telle que  $A = B^2$ .

c. Soit  $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbf{R})$  et  $B \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ , montrer que  $AB$  est diagonalisable.

### 12 - 34 (S) M ★★★ Produit de HADAMARD ♥

Soit  $A$  et  $B$  dans  $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  dont les spectres sont inclus dans  $\mathbf{R}_+$ . On pose  $M = [a_{ij}b_{ij}]_{1 \leq i, j \leq n}$ .

- a. Montrer que le spectre de  $M$  est inclus dans  $\mathbf{R}_+$ .
- b. Montrer que le spectre de  $[e^{a_{ij}}]_{1 \leq i, j \leq n}$  est inclus dans  $\mathbf{R}_+$ .

### 12 - 35 X 2013 ★★★ Produit de HADAMARD

Soit  $t$  dans  $\mathbf{R}_+^*$  et  $M = (\exp(t|j-i|))_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  et que son spectre est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

### Réduction simultanée

### 12 - 36 C 1991 ★★ Composition bi-latérale †

Soit  $a$  et  $b$  deux endomorphismes diagonalisables de  $E$ ,  $\mathbf{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On définit  $\xi_{a,b}$  endomorphisme de  $\mathcal{L}(E)$  par  $\xi_{a,b} : u \mapsto a \circ u \circ b$ . Montrer que  $\xi_{a,b}$  est diagonalisable.

### 12 - 37 (S) ★★ Vecteurs propres communs

On définit  $u$  et  $v$  des endomorphismes de  $\mathbf{R}_n[X]$  par :  $u(P) = X^2P' - nXP$  et  $v(P) = 2XP' - nP$ .

- a. Déterminer  $\text{Ker}(u)$ .
- b. Étudier  $[v, u]$ .
- c. Montrer que si  $P$  est vecteur propre de  $v$ , il en est en général de même pour  $u(P)$ . Quel est le cas d'exception ?

### 12 - 38 (S) ★★ Produit tensoriel

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ , avec  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ , et  $B$  dans  $\mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ . On définit  $A \otimes B$  dans  $\mathcal{M}_{np}(\mathbf{C})$  par

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,j}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}B & \cdots & a_{i,j}B & \cdots & a_{i,n}B \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,j}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}.$$

a. Soit  $(A, B)$  et  $(A', B')$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$ . À quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité  $A \otimes B = A' \otimes B'$  ?

b. Soit  $f_{A,B} : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$  l'application définie par  $f_{A,B}(M) = AM {}^tB$ . Montrer que  $A \otimes B$  est la matrice représentative de  $f_{A,B}$  dans une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{C})$  que l'on précisera.

c. Établir la formule valable pour tout  $(A, B)$  et  $(A', B')$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbf{C}) \times \mathcal{M}_p(\mathbf{C})$  :

$$(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (AA') \otimes (BB').$$

d. On suppose  $A$  et  $B$  inversibles. Montrer que  $A \otimes B$  est inversible. Quel est alors son inverse ?

e. Calculer le déterminant de  $A \otimes B$ .

f. On suppose  $A$  et  $B$  diagonalisables. Montrer que  $A \otimes B$  l'est aussi. Quelles sont ses valeurs propres ?

### 12 - 39 (S) ★★★ Réduction simultanée d'endomorphismes symétriques

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien  $E$ ,  $\mathcal{B}$  une base orthonormée de  $E$  et  $A$  et  $B$  les matrices de  $f$  et  $g$  relativement à  $\mathcal{B}$ . On suppose que le spectre de  $f$  est inclus dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

- a. On pose  $\varphi(x, y) = \langle f(x) | y \rangle$ . Montrer que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- b. Montrer que  $f^{-1}g$  est un endomorphisme symétrique sur  $(E, \varphi)$ .
- c. Montrer qu'il existe  $P$  inversible dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tel que  ${}^tPAP = I_n$  et  ${}^tPBP$  soit diagonale.

### Inégalités

### 12 - 40 (S) ★ Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ

Soit  $a, b$  et  $c$  des réels strictement positifs. Montrer  $a + b + c \leq \frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab}$  et donner le cas d'égalité.

### 12 - 41 (S) ★ Extrema d'un produit

Soit  $E$  l'ensemble des fonctions continues d'un segment  $[a; b]$  dans  $\mathbf{R}$ , à valeurs strictement positives. Déterminer l'infimum et le supremum sur  $E$  de la quantité

$$\left( \int_a^b f \right) \cdot \left( \int_a^b \frac{1}{f} \right).$$

Ces extrema sont-ils atteints, et où ?

**12 - 42** ⑤ ★★ **Sur un air de CAUCHY-SCHWARZ**

Soit  $(a_k)_{1 \leq k \leq n}$ ,  $(b_k)_{1 \leq k \leq n}$  et  $(c_k)_{1 \leq k \leq n}$  des réels. Démontrer

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k c_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 \sum_{k=1}^n c_k^2.$$

**12 - 43** ⑤ ★★ **Concavité du cosinus**

- a. Soit  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  les angles d'un triangle. Démontrer  $\tan(\alpha) + \tan(\beta) + \tan(\gamma) = \tan(\alpha) \tan(\beta) \tan(\gamma)$ .
- b. Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois réels strictement positifs vérifiant  $a + b + c = abc$ . Démontrer

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{3}{2}.$$

**12 - 44** ⑤ ★★★ **Inégalité de CARLEMAN**

- a. Montrer que l'on peut définir par récurrence une suite  $(c_k)_{k \in \mathbf{N}^*}$  par la formule  $(c_1 c_2 \cdots c_k)^{1/k} = k + 1$  et calculer  $\sum_{j=k}^{+\infty} \frac{1}{j(c_1 c_2 \cdots c_j)^{1/j}}$ .
- b. En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, démontrer que, pour toute série convergente  $\sum a_n$  à termes positifs, on a l'inégalité de CARLEMAN

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (a_1 a_2 \cdots a_k)^{1/k} \leq e \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

et en particulier que la série du membre de gauche est convergente.

- c. Exhiber une fonction en escalier sur  $\mathbf{R}_+$  telle qu'on ait, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} = \exp\left(\int_0^1 \ln(f(nx)) dx\right)$ . En déduire

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{1/n} \leq \frac{e}{2n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1)a_k$$

et retrouver l'inégalité de CARLEMAN.

**12 - 45** ⑤ ★★★ **Cône de lumière de MINKOWSKI**

- a. On définit le cône de lumière de MINKOWSKI dans  $\mathbf{R}^{d+1}$  (avec  $d \in \mathbf{N}^*$ ) par

$$C = \left\{ (t, x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{R}^{d+1} \mid \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2} \leq t \right\}$$

et pour  $x$  et  $y$  dans  $C$ , avec  $x = (t, x_1, \dots, x_d)$  et  $y = (u, y_1, \dots, y_d)$ , on pose

$$[x, y] = tu - x_1 y_1 - \cdots - x_d y_d.$$

Démontrer qu'on a alors  $[x, x]^{1/2} [y, y]^{1/2} \leq [x, y]$  et décrire le cas d'égalité.

- b. Soit  $u$  et  $v$  dans un espace euclidien  $E$ . On se donne  $A$  et  $B$  dans  $\mathbf{R}_+$  vérifiant  $\|u\| \leq A$  et  $\|v\| \leq B$ . Que dire de  $\langle u | v \rangle$  ?

**12 - 46** ⑤ ★★★ **Inégalité de HILBERT**

- a. En considérant le cercle unité et les points de coordonnées  $(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ , montrer que, pour  $m$  entier naturel non nul, la série  $\sum \frac{1}{n+m} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2}$  est convergente et qu'on a  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+m} \left(\frac{m}{n}\right)^{1/2} < \pi$ .
- b. En déduire que, pour toutes séries réelles  $\sum_{m \geq 1} a_m$  et  $\sum_{n \geq 1} b_n$  de carré intégrable (i.e.  $\sum_{m \geq 1} a_m^2$  et  $\sum_{n \geq 1} b_n^2$  sont convergentes), on a

$$\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi \left( \sum_{m=1}^{+\infty} a_m^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2 \right)^{1/2}$$

avec égalité si et seulement si l'une des deux séries est nulle.

- c. En considérant la série  $\sum n^{-\frac{1}{2}-\epsilon}$ , montrer que  $\pi$  est une constante optimale.

**12 - 47** ★★★ **Inégalités de MONTGOMERY**

Soit  $E$  un espace préhilbertien et  $x, y_1, \dots, y_n$  dans  $E$ . Établir

$$\sum_{k=1}^n |\langle x | y_k \rangle| \leq \|x\| \left( \sum_{1 \leq p, q \leq n} |\langle y_p | y_q \rangle| \right)^{1/2}$$

et  $\sum_{k=1}^n \langle x | y_k \rangle^2 \leq \|x\|^2 \max_{1 \leq p \leq n} \left( \sum_{1 \leq q \leq n} |\langle y_p | y_q \rangle| \right)$ .

**Orthogonalité**

**12 - 48** ★ **Intersection d'hyperplans**

Soit  $E$  un espace euclidien,  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  une base de  $E$  et  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $\mathbf{R}^n$ . Montrer, sans utiliser l'exercice 12 - 10 qu'il existe un unique vecteur  $x$  de  $E$  tel qu'on ait  $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \langle x | u_i \rangle = x_i$ .

**12 - 49** ⑤ ★★ **Produit scalaire**

Soit  $E = \mathbf{R}[X]$  muni de  $\varphi$  défini par  $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(k) Q^{(k)}(k)$ .

- a. Montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire.
- b. Montrer que la famille  $(X(X-k)^{k-1})_{k \in \mathbf{N}}$  est orthogonale.

**12 - 50** ⑤ ★★ **Codimension**

Soit  $E$  un espace euclidien,  $F$  un sous-espace de  $E$ . Montrer qu'il existe une constante  $c(F)$  telle que, pour toute base orthonormée  $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$  de  $E$ , on ait

$$\sum_{i=1}^n d(e_i, F)^2 = c(F).$$
**12 - 51** ⑤ ★★ **Matrices de GRAM** ♥

Soit  $E$  un espace euclidien,  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de vecteurs de  $E$  et  $F$  le sous-espace qu'elle engendre. On note  $\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)$  la matrice carrée d'ordre  $n$  de terme général  $\langle u_i | u_j \rangle$ .

- Montrer que si  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est liée, alors  $\det(\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)) = 0$ .
- Montrer que si  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est libre, alors  $\det(\text{Gram}(u_1, \dots, u_n)) > 0$ .
- Dans ce dernier cas, montrer, pour  $x$  dans  $E$ , qu'on a

$$d(x, F)^2 = \frac{\det(\text{Gram}(u_1, \dots, u_n, x))}{\det(\text{Gram}(u_1, \dots, u_n))}.$$

**12 - 52** ⑤ ★★ **Polynômes de LEGENDRE**

Soit  $E = \mathbf{R}[X]$  muni du produit scalaire donné par  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$  et  $n$  dans  $\mathbf{N}$ .

- Montrer qu'il existe un unique polynôme  $P$  dans  $\mathbf{R}_{n+1}[X]$ , unitaire et orthogonal à  $\mathbf{R}_n[X]$ .
- Montrer que  $P$  est simplement scindé sur  $\mathbf{R}$  et que ses racines appartiennent à l'intervalle ouvert  $] - 1; 1 [$ .
- On note  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$  l'orthonormalisée de GRAM-SCHMIDT de la base canonique et  $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la famille définie par  $Q_n = \frac{1}{2^n n!} [(X^2 - 1)^n]^{(n)}$ . Montrer que pour tout entier  $n$  il existe un scalaire  $\lambda_n$  tel que  $P_n = \lambda_n Q_n$  et le déterminer.
- Montrer, pour  $n \geq 2$ ,  $nQ_n = (2n - 1)XQ_{n-1} - (n - 1)Q_{n-2}$ .
- Montrer, pour tout entier  $n$ , que  $P_n$  est solution de l'équation différentielle  $(1 - t^2)y'' - 2ty' + n(n + 1)y = 0$  sur tout  $\mathbf{R}$ .
- Déterminer  $\int_0^1 P_n$ .

**12 - 53** ⑤ ★★ **Polynômes orthogonaux**

Soit  $E = \mathbf{R}[X]$  muni du produit scalaire donné par  $\langle P | Q \rangle = \int_{-1}^1 P(t)Q(t)(1 + t^2) dt$ .

- Établir l'existence et l'unicité d'une famille orthogonale de  $\mathbf{R}[X]$  formée de polynômes unitaires et étagée en degré, i.e. si  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est cette famille  $\deg(P_n) = n$ .

- Étudier la parité des polynômes  $P_n$ .

c. Démontrer, pour  $n$  dans  $\mathbf{N}^*$ , que  $P_{n+1} - XP_n$  appartient à  $\mathbf{R}_{n-2}[X]^\perp$ .

d. En déduire une relation de récurrence d'ordre 2 satisfaite par les polynômes  $P_n$ .

e. Calculer  $P_n$  pour  $0 \leq n \leq 4$ .

**12 - 54** ⑤ ★★ **Polynômes de LAGUERRE**

On reprend l'exercice 12 - 52 mais avec  $\langle P | Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t) dt$  et  $Q_n(t) = \frac{1}{n!} e^t \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t} t^n)$ . Reprendre les questions a. à e. en adaptant selon les indications suivantes.

b. Montrer que  $Q_n$  est simplement scindé à racines dans  $\mathbf{R}_+^*$ .

d. Montrer, pour  $n \geq 2$ ,  $nQ_n + (X - (2n - 1))Q_{n-1} - (n - 1)Q_{n-2} = 0$ .

e. Montrer, pour tout entier  $n$ , que  $P_n$  est solution de l'équation différentielle  $ty'' + (1 - t)y' + ny = 0$  sur tout  $\mathbf{R}$ .

**12 - 55** ⑤ ★★★ **Méthode de quadrature de GAUSS**

Soit  $\omega$  une fonction continue du segment  $]a; b[$  à valeurs strictement positives.

a. Montrer que  $\langle P | Q \rangle = \int_a^b PQ\omega$  définit un produit scalaire sur  $\mathbf{R}[X]$ .

b. On note  $(P_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la base de  $\mathbf{R}[X]$  obtenue par procédé d'orthonormalisation de GRAM-SCHMIDT à partir de la base canonique. Montrer l'existence de scalaires  $\alpha_n, \beta_n$  et  $\gamma_n$  tels que, pour tout entier non nul  $n$ ,  $P_{n+1} = (\alpha_n X + \beta_n)P_n + \gamma_n P_{n-1}$ .

c. Montrer que, pour tout entier  $n$  strictement positif,  $P_n$  est simplement scindé sur  $\mathbf{R}$  et que ses racines appartiennent à  $]a; b[$ .

d. On note  $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$  les racines de  $P_n$  et on suppose  $x_1 < \dots < x_n$ . Démontrer qu'il existe un unique  $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$  dans  $\mathbf{R}^n$  tel que, pour tout  $Q$  dans  $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$ , on a

$$\int_a^b Q(t)\omega(t) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k Q(x_k).$$

e. Soit  $f$  dans  $C^{2n}([a; b], \mathbf{R})$  et  $x$  dans  $]a; b[$  distinct des racines de  $P_n$ .

i. Démontrer qu'il existe un unique  $H$  dans  $\mathbf{R}_{2n-1}[X]$  tel que, pour tout entier  $i$  de  $[[1; n]]$ , on ait  $H(x_i) - f(x_i) = H'(x_i) - f'(x_i) = 0$ .

ii. Montrer qu'il existe un scalaire  $\lambda$  et un réel  $c$  dans  $]a; b[$  tels que  $f(x) = H(x) + \lambda \prod_{k=1}^n (x - x_k)^2$  et  $f^{(2n)}(c) = (2n)! \lambda$ .

- iii. En déduire, en notant  $a_n$  le coefficient dominant de  $P_n$ ,

$$f(x) - H(x) = \frac{P_n(x)^2 f^{(2n)}(c)}{a_n^2 (2n)!}.$$

- iv. Conclure qu'on a

$$\left| \int_a^b f\omega - \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \right| \leq \frac{\|f^{(2n)}\|_\infty}{a_n^2 (2n)!}.$$

**12 - 56** ★★★ Normes équivalentes ♥

Soit  $E$  un sous-espace vectoriel de  $C^0(I, \mathbf{R})$ , où  $I$  est un intervalle compact de  $\mathbf{R}$ . Montrer que  $\|\cdot\|_2$  et  $\|\cdot\|_\infty$  induisent des normes équivalentes sur  $E$  si et seulement si  $E$  est de dimension finie.

*Indication* : On pourra majorer, pour une famille orthonormée  $(f_1, \dots, f_n)$  dans  $E$ ,  $\|f_1^2 + \dots + f_n^2\|_\infty$  par  $\sup_{x,y} |\sum f_i(x)f_i(y)|$ .

**12 - 57** ENS Paris 2000 ★★★ Spectre d'un opérateur différentiel

Soit  $I$  un segment  $[a; b]$  dans  $\mathbf{R}$ . On se donne une fonction  $\Delta$  strictement positive sur  $I$ .

On pose  $E = \{f \in C^2(I) \mid f(a) = f(b) = 0\}$ . On considère enfin l'opérateur  $K : f \mapsto \frac{f''}{\Delta}$ .

- a. Montrer que  $\text{Sp}(K) \subset \mathbf{R}_*$ .
- b. Trouver un produit scalaire pour lequel deux vecteurs propres de  $K$  associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.
- c. On suppose maintenant  $I = \mathbf{R}^+$  et  $\Delta \geq 1$  sur  $[2; +\infty[$ . Soit  $\lambda$  dans  $\mathbf{R}_*$ .
  - i. Montrer qu'il existe une unique  $f_\lambda$  dans

$$C^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}) \text{ vérifiant } \begin{cases} f''_\lambda = \lambda \Delta f_\lambda \\ f_\lambda(0) = 0 \\ f'_\lambda(0) = 1. \end{cases}$$

- ii. Montrer que  $f_\lambda$  a une infinité dénombrable de zéros  $(x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots)$  et que la suite  $(x_n)$  tend vers  $+\infty$ .

**Groupe orthogonal**

**12 - 58** Ⓢ M 2013 ★ Matrices orthogonales

- a. Soit  $A$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ . Exprimer  $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{ij} - a_{ji})^2$  en fonction de  $\text{Tr}(A^2)$ .
- b. Pour  $A$  dans  $\text{SO}_3(\mathbf{R})$ , calculer

$$(1 - \text{Tr}(A))^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} (a_{ij} - a_{ji})^2.$$

**12 - 59** Ⓢ ★ Inégalité de CAUCHY-SCHWARZ †

Soit  $A$  dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ . Montrer  $\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$  et  $\sum_{1 \leq i, j \leq n} |a_{i,j}| \leq n^{3/2}$ .

**12 - 60** Ⓢ ★ Groupe abélien

Démontrer que  $\text{SO}_n(\mathbf{R})$  est abélien si et seulement si  $n \leq 2$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base orthonormée d'un plan  $P$  euclidien. Démontrer qu'il y a un homomorphisme de groupes entre  $\text{SO}(P)$  et  $\mathbf{U}$ , induit par l'identification de  $P$  à  $\mathbf{C}$  via la base  $\mathcal{B}$ . En déduire les formules d'addition pour cos et sin.

**12 - 61** Ⓢ ★ Isométries

Soit  $E$  un espace préhilbertien réel et  $u$  une application de  $E$  dans  $E$  telle que, pour tout  $(x, y)$  dans  $E^2$ , on ait  $\langle u(x) \mid u(y) \rangle = \langle x \mid y \rangle$ . Montrer que  $u$  est linéaire et injective.

**12 - 62** Ⓢ ★ Orthogonalité

Soit  $u$  dans  $\mathcal{L}(E)$  avec  $E$  euclidien tel que, pour tout  $x$  dans  $E$ ,  $\langle u(x) \mid x \rangle = 0$ . Montrer que  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont orthogonaux.

**12 - 63** Ⓢ ★★ Projection stéréographique

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tel que  ${}^t A = -A$ .

- a. Montrer  $I_n + A \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$ .
- b. En posant  $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$ , montrer  $B \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$  et préciser  $\det(B)$ .

**12 - 64** Ⓢ ★★ Équation différentielle

Soit l'équation différentielle linéaire  $Y' = A(x)Y$  où  $A$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  avec  $A(x)$  antisymétrique. Soit  $X_0 \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ . Montrer que la solution du problème de CAUCHY aux conditions initiales  $X(0) = X_0$  est à valeurs dans  $\mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ .

**12 - 65** Ⓢ ★★★ Espaces stables d'une isométrie

Soit  $u$  une isométrie d'un espace euclidien.

- a. Montrer qu'il existe  $x$  dans  $E$ , de norme 1, tel que  $\|u(x) - x\| = \min_{\|y\|=1} \|u(y) - y\|$ .
- b. Que dire si  $u(x)$  est colinéaire à  $x$  ?
- c. On suppose  $(x, u(x))$  libre et on pose  $y = \frac{1}{2}(x + u(x))$ . Montrer que  $u(y)$  est le symétrique de  $y$  par rapport à la droite  $\mathbf{R}u(x)$  et en déduire que le plan  $(x, u(x))$  est  $u$ -stable.

**12 - 66** ★★★ Racines de  $-I_n$ 

Soit  $A$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$  tel que  $A^2 = -I_n$  et  $A^t A = {}^t A A$ . Montrer  $A \in \mathcal{O}_n(\mathbf{R})$ .

**12 - 67** ⑤ ★★★ Théorème du pentagone

Ce théorème a été énoncé en 1970 par Bartel Leendert VAN DER WAERDEN. La démonstration qui suit est celle de Gerrit BOL et Harold Scott MacDonald COXETER.

Soit  $(ABCDE)$  un pentagone dans l'espace  $\mathbf{R}^3$  euclidien tel que tous ses côtés soient de même longueur et tous ses angles soient égaux, i.e.  $\|\overrightarrow{AB}\| = \dots = \|\overrightarrow{EA}\|$  et  $\langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AE} \rangle = \dots = \langle \overrightarrow{EA} \mid \overrightarrow{ED} \rangle$ . Montrer que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont coplanaires en suivant les indications suivantes :

- Se ramener au cas où le centre de gravité du pentagone est l'origine.
- Démontrer que toutes les distances entre chacun des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  et  $E$  sont fixées par  $a$  et  $b$  où  $a = \|\overrightarrow{AB}\|$  et  $b = \langle \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AE} \rangle$ .
- Montrer qu'il existe une isométrie affine  $f$  de  $\mathbf{R}^3$  envoyant  $A$  sur  $B$ ,  $B$  sur  $C$  et  $C$  sur  $D$ .
- Montrer qu'on peut se ramener au cas où  $f(D) = E$  et  $f(E) = A$ .
- Montrer que si  $(ABCDE)$  n'est pas planaire, alors  $f^5 = \text{Id}$  puis  $f \in \text{SO}(\mathbf{R}^3)$ .
- Conclure.

**12 - 68** ★★★ Extrémalité ♠

Soit  $E$  euclidien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\|u\| = 1$ . Montrer que  $\{x \in E \mid \|u(x)\| = \|x\|\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

**Compléments - Séries de Fourier****12 - 69** ★ Séries de Fourier classiques ♠

Développer en série de FOURIER les fonctions  $2\pi$ -périodiques suivantes. Déterminer la somme de la série aux éventuelles discontinuités et aux bornes de l'intervalle (i.e.  $-\pi$  et  $\pi$ ). Représenter fonction et somme de la série de FOURIER sur un même graphique.

- $f(x) = c_1$  si  $-\pi < x < 0$  et  $f(x) = c_2$  si  $0 < x < \pi$ . Tracer le cas  $c_1 = -1$  et  $c_2 = 1$ .
- $f(x) = ax$  si  $-\pi < x < 0$  et  $f(x) = bx$  si  $0 < x < \pi$ . Tracer les cas  $a = b = 1$ ,  $a = -1$  et  $b = 1$ ,  $a = 0$  et  $b = 1$  et enfin  $a = 1$  et  $b = 0$ .
- $f(x) = x^2$ .
- $f(x) = e^{ax}$  ( $a \in \mathbf{C}$ ). En déduire les cas  $f(x) = \cos(ax)$ ,  $f(x) = \sin(ax)$ ,  $f(x) = \text{ch}(ax)$  et  $f(x) = \text{sh}(ax)$  (pour  $a$  réel).

**12 - 70** ★ Séries classiques ♠

a. Utiliser 12 - 69.a. pour calculer  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ ,  $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \dots$  et  $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13}$ .

b. Utiliser 12 - 69.d. pour calculer  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)^2}.$$

c. Calculer  $\zeta(4)$ , i.e.  $1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{81} + \dots$ .

**12 - 71** ★★ Phénomène de GIBBS

On considère la fonction créneau (cf. 12 - 69.a. pour  $c_1 = -1$  et  $c_2 = 1$ ).

- Pour  $n$  dans  $\mathbf{N}$ , déterminer l'abscisse  $x_n$  du premier maximum (local) de  $S_{2n+1}(f)$ .
- Montrer que, lorsque  $n$  tend vers l'infini,  $S_{2n+1}(f)(x_n)$  tend vers  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t} dt$ .
- Comparer cette limite à la limite de  $f(x_n)$ . Qu'en déduire ?

**12 - 72** ★★★ Noyau de FEJÉR

Soit  $f$  continue et  $2\pi$ -périodique.

- a. Soit  $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbf{N}^*}$  la suite des moyennes de CESÀRO de la suite  $(S_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$ , i.e.

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} S_p(f)(x).$$

Montrer que  $\sigma_n(f)(x)$  est égal à

$$\frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} (f(x+2t) + f(x-2t)) \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} dt.$$

- b. Calculer l'intégrale de FEJÉR

$$\frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(nt)}{\sin^2(t)} dt.$$

- Montrer que  $(\sigma_n(f))_{n \in \mathbf{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\mathbf{R}$ .
- En déduire que toute fonction continue  $2\pi$ -périodique est limite uniforme de polynômes trigonométriques.

**12 - 73** ⑤ ★★★ Solution périodique

Compléter l'étude commencée avec l'exercice 4 - 15 et montrer que l'équation :  $y^{(4)} + y'' + y = |\sin(x)|$  admet une et une seule solution  $\pi$ -périodique.