CHAPITRE 11

L^1 – Espaces fonctionnels

En mars 1823, Niels Abel démontre que l'équation quelconque de degré cinq n'est pas résoluble par radicaux. Il a 21 ans. Ses travaux suscitent un tel enthousiasme qu'il obtient une bourse d'étude afin de visiter les grands pôles européens : Paris, Berlin et Göttingen.

En octobre 1825, à Berlin, le mathématicien August Leopold Crelle comprend rapidement qu'il a un diamant brut face à lui. En 1826, il fonde le *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, première publication indépendante de recherche en mathématiques en Allemagne. En l'espace de quatre mois (novembre 1825-février 1826) Abel rédige six articles, dont celui sur l'équation du cinquième degré et celui sur le critère de sommabilité des séries semi-convergentes.

Abel arrive à Paris pendant l'été 1826. Il ne parvient pas à être reçu par les membres de l'Académie des Sciences. Il écrit *Cauchy est fou, et avec lui, il n'y a pas moyen de s'entendre, bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé.*,Il remet un mémoire, présenté le 30 octobre 1826 par Joseph Fourier. Un rapport est demandé à Cauchy, mais il ne verra jamais le jour. Lassé et à court d'argent, Abel quitte Paris le 29 décembre 1826. Quatre mois plus tard il contracte la tuberculose, mais continue à travailler de façon acharnée. Conscient que la situation financière d'Abel est critique, Crelle mène campagne pour lui décrocher un poste de professeur à Berlin. Celle-ci aboutit et le 8 avril 1829, deux jours seulement après sa mort, il lui écrit pour l'en informer : *Tu n'auras plus à te soucier de ton avenir*. Niel Abel avait 26 ans et était en train de développer, avec Jacobi la théorie des fonctions elliptiques, qu'il avait initiée en 1823 à travers l'étude des intégrales abéliennes.

Le prix Abel a été créé en 2003 : il récompense l'œuvre de toute une vie et est l'équivalent du prix Nobel en mathématiques.

Programme

— Convergence simple et uniforme sur A. Interprétation en termes de norme. Théorème de la double limite (démonstration non exigible). Convergence uniforme locale ou en $\pm\infty$. Intégration. Dérivation. Fonctions de classe C^k.

— Séries de fonctions. Convergences simple, uniforme et normale. Les étudiant·e·s doivent savoir étudier la somme d'une série de fonctions (régularité, étude asymptotique, utilisation de la comparaison série-intégrale).

— Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie : continuité. Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.

— Série entière (à coefficients réels ou complexes), lemme d'ABEL, rayon de convergence, convergence normale. Rayon de convergence et relations de comparaison. Règle de D'ALEMBERT.

— Continuité sur le disque ouvert de convergence. L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme. Somme et produit de CAUCHY de deux séries entières.

— Série entière d'une variable réelle. Primitivation et dérivation sur l'intervalle ouvert de convergence. Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme. Unicité du développement en série entière.

— Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r;r[$ de $\mathbf{R}$. Série de TAYLOR d'une fonction de classe C^∞ sur un intervalle $]-r;r[$. Les étudiant·e·s doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan, logarithme et puissances, et doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire

— Fonction génératrice G_X de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$. Rayon de convergence, convergence normale sur $\overline{B}(0,1)$, continuité. Utilisation pour déterminer la loi de X, ses moments. Caractérisation des variables d'espérance finie, admettant un second moment. Les étudiant(e)s doivent savoir retrouver la variance à l'aide de ${G_X}'(1)$ et ${G_X}''(1)$ et calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire de BERNOULLI, binomiale, géométrique, de POISSON.

Dans ce chapitre E et F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie, souvent égaux à $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. La norme est notée $\|\cdot\|$ sauf mention explicite du contraire. Les fonctions sont définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.

1 Modes de convergence

Puisqu'une suite de fonctions, ou une série de fonctions, est une famille de familles, il existe plusieurs façons d'appréhender leur comportement asymptotique : la convergence ponctuelle, en ne s'intéressant qu'aux valeurs des fonctions, la convergence au sens d'une norme ou d'une topologie sur un espace de fonctions, i.e. en considérant les fonctions comme des vecteurs.

On fixe un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbf{K}$, avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, et A une partie de E. L'espace vectoriel E est muni d'une norme arbitraire, les propriétés de nature topologique ne dépendant pas du choix de cette norme.

Les fonctions étudiées seront définies sur A et à valeurs dans un espace de dimension finie F. Dans la plupart des exemples cet espace est tout simplement le corps des réels muni de sa valeur absolue habituelle. Néanmoins toute l'étude peut s'étendre au cas où F est un espace de BANACH !

On se place dans l'espace vectoriel des fonctions de A dans F ou, le plus souvent, dans son sous-espace vectoriel des fonctions bornées. L'avantage de ce dernier étant d'être muni d'une norme, à savoir la norme de la convergence uniforme (ou norme infinie) définie par

$$\|f\|_{A,\infty} = \|f\|_\infty = \sup_{a\in A} \|f(a)\|_F \ .$$

On omettra la mention de A quand la partie A est suffisamment claire de par le contexte.

On commence par se donner une suite ou une série d'éléments de cet espace vectoriel. On note donc $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $\sum f_n$ une suite (respectivement une série) de fonctions de A dans F, i.e. $\forall n \in \mathbf{N}$, $f_n : A \to F$.

Exemples 11 - 1

— On prend $A = [0;1]$ et $f_n(x) = x^n$. Alors $f_n(x)$ tend vers 0 pour tout x distinct de 1 et est constante égale à 1 pour $x = 1$. Autrement dit la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge ponctuellement vers la fonction δ_1, fonction caractéristique de l'ensemble $\{1\}$. On dit qu'on a affaire à une convergence simple ou que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement vers δ_1.

— Pour $A = [-1;1]$ et $f_n(x) = (1-x^2)^n$, la suite (f_n) converge simplement vers δ_0.

— Pour $A = \mathbf{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$, la suite (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{|x|>1} - \mathbb{1}_{|x|<1}$, i.e. la fonction tendant vers 1 si $|x| > 1$, vers 0 si $|x| = 1$ et vers -1 si $|x| < 1$.

— Plus étrange, pour $A = \mathbf{R}$ et $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x/2$ pour $|x| < \pi$ et $f(\pi) = 0$.

Ce dernier résultat provient de la théorie des séries de FOURIER mais il est surtout connu parce qu'il a été présenté par ABEL comme contre-exemple à un théorème de CAUCHY :

Dans l'ouvrage de M. CAUCHY, on trouve le théorème suivant : « Lorsque les différens termes de la série $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ sont des fonctions continues, la somme s de cette série est aussi fonction continue. » mais il me semble que ce théorème admet des exceptions.

Néanmoins ce théorème serait très utile et il existe une classe de convergence qui le garantit. L'ensemble des fonctions continues sur A admet une structure d'espace vectoriel. D'après le théorème de WIERSTRASS, si A est compact, on peut le munir de la norme infinie et en faire un espace vectoriel normé. Plus généralement on donne la définition suivante

Définition 11 - 1

Convergence uniforme

Soit f une fonction et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions, toutes de A dans F. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur A vers f si, à partir d'un certain rang, les fonctions $f_n - f$ sont bornées et qu'on a $\lim \|f_n - f\|_{A,\infty} = 0$.

De même on dit que la série $\sum f_n$ est uniformément convergente sur A si la suite de ses sommes partielles converge uniformément sur A vers f.

Remarque 11 - 1

On peut reformuler la notion de convergence uniforme :

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n \in \mathbf{N}, \forall p \geq n \quad \|f_p - f\|_{A,\infty} \leq \varepsilon$$

ou encore

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*, \exists n \in \mathbf{N}, \forall p \geq n, \forall x \in A \quad \|f_p(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon\,.$$

Le point **crucial** à remarquer est que le rang n dépend de ε (bien sûr), mais qu'il ne dépend pas de x. On est en présence d'un phénomène similaire à celui qui sépare la continuité uniforme de la continuité simple.

Bien entendu la convergence uniforme entraîne la convergence simple. On dit qu'elle est plus forte que la convergence simple.

Proposition 11 - 1

Une série de fonctions $\sum f_n$ à valeurs dans F converge uniformément sur A si et seulement si elle y converge simplement et si la suite des restes $\left(\sum_{n=N}^{+\infty} f_n\right)_N$ converge uniformément vers 0.

Démonstration. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers f, elle converge simplement vers f par définition. Par définition la différence entre f et les sommes partielles de $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers 0, ce qui est le résultat cherché.

Réciproquement, on note f la limite simple de $\sum f_n$. Alors, comme précédemment, par définition du reste, $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers f. □

On définira un peu plus loin un type de convergence un peu plus faible : la convergence uniforme sur tous les compacts de A. En attendant en voici une qui est plus forte.

Définition 11 - 2

Convergence normale – Critère de Weierstrass

Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de fonctions bornées définies sur une partie A de E et à valeurs dans F, la série de fonctions $\sum f_n$ est dite normalement convergente si $\sum \|f\|_\infty$ est convergente.

Remarque 11 - 2

Ainsi qu'on l'a déjà signalé, on réserve la terminologie « normalement » convergente, ou convergente en norme, aux séries de fonctions. Cette notion a été introduite par Karl Weierstrass et la terminologie par René Baire dans ses *Leçons sur les théories générales de l'analyse* en 1908.

Danger

Que la convergence soit simple ou uniforme (voire normale), on note de façon identique $f_n \to f$ ou $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$. Il faut alors préciser en quel sens a lieu la convergence.

Théorème 11 - 1

Convergence normale et convergence absolue et uniforme

Si la série de fonctions $\sum f_n$ à valeurs dans F converge normalement sur A, alors elle y converge uniformément (et donc aussi simplement). De plus, pour tout a dans A, la série $\sum f_n(a)$ converge absolument.

Démonstration. Soit a dans A. La série $\sum f_n(a)$ est absolument convergente en vertu du théorème de comparaison des séries à termes positifs puisque, pour tout entier naturel n, on a $\|f_n(a)\|_F \leq \|f_n\|_{A,\infty}$. La série $\sum f_n$ converge donc simplement sur A.

On note f sa somme. Soit alors p et k deux entiers naturels. On a

$$\left\|\sum_{n=p}^{p+k} f_n(a)\right\|_F \leq \sum_{n=p}^{p+k} \|f_n(a)\|_F \leq \sum_{n=p}^{p+k} \|f_n\|_{A,\infty} \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \|f_n\|_{A,\infty}$$

et donc, par passage à la limite en k,

$$\left\|f(a) - \sum_{n=0}^{p-1} f_n(a)\right\|_F \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \|f_n\|_{A,\infty} ,$$

puis, par passage au supremum,

$$\left\|f - \sum_{n=0}^{p-1} f_n\right\|_{A,\infty} \leq \sum_{n=p}^{+\infty} \|f_n\|_{A,\infty} .$$

On en déduit que la série des restes de $\sum f_n$ converge uniformément vers 0, puisque le terme de droite tend vers 0 en tant que reste d'une série convergente. □

Exemple 11 - 2

La série de fonctions définie sur $\mathbf{R}$ par $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sin(nx)}{n^2}$ est normalement convergente (sur $\mathbf{R}$) puisque la norme de son terme général est n^{-2}, à savoir le terme général d'une série de Riemann convergente.

Aparté

L'ensemble des séries de fonctions normalement convergentes est un espace vectoriel normé pour la norme donnée par $\|\sum f_n\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \|f_n\|_\infty$.

Proposition 11 - 2

Linéarité

L'application qui à une série de fonctions uniformément (resp. normalement) convergente associe sa somme est linéaire, positive et croissante.

Démonstration. Cela résulte du cas des séries à valeurs vectorielles. □

2 Continuité

On commence par le théorème (cité dans le cours de WEIERSTRASS en 1861) qui rectifie le résultat un peu rapide de CAUCHY.

Théorème 11 - 2

Convergence uniforme et continuité

Soit f une fonction et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions, toutes de A dans F. Si $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur A vers f et si toutes les fonctions f_n sont continues en un point a de A, alors f est également continue en a.

La suite de fonctions peut être remplacée par une série de fonctions. Enfin le résultat vaut également pour la continuité sur A.

Remarque 11 - 3

Dans le cas des suites, on peut supposer la continuité uniquement à partir d'un certain rang. C'est plus délicat à formuler pour les séries.

Démonstration. Soit x dans A, on peut écrire

$$f(x) - f(a) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)$$

et il vient

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f_n - f\|_{A,\infty} + \|f_n(x) - f_n(a)\|_F + \|f_n - f\|_{A,\infty}\ .$$

Soit maintenant ε dans $\mathbf{R}_+$. On dispose de n dans $\mathbf{N}$ tel que $\|f_n - f\|_{A,\infty} \leq \varepsilon$ ainsi que de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, si $\|x - a\|_E \leq \eta$, alors $\|f_n(x) - f_n(a)\|_F \leq \varepsilon$. Il en résulte que, sous la condition $\|x - a\|_E \leq \eta$, on a $\|f(x) - f(a)\|_F \leq 3\varepsilon$ et donc que f est continue en a. □

Danger

L'exemple d'une corde fixée en 0 prenant la forme du graphe d'une fonction affine par morceaux nulle en 0 et $1/n$ et valant 1 en $1/2n$ montre que même si la fonction limite (ou somme) est continue, la convergence n'a pas de raison d'être uniforme.

Remarque 11 - 4

Le contre-exemple d'ABEL est fourni par une série qui, bien sûr, ne converge ni normalement, ni uniformément.

On peut parfois affaiblir les hypothèses comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 11 - 3

Si $\mathcal{A}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre normée, i.e. munie d'une norme sous-multiplicative. Alors la fonction $u \mapsto (1-u)^{-1}$ est continue sur la boule unité ouverte de $\mathcal{A}$ et l'exponentielle est continue sur $\mathcal{A}$.

En effet les séries $\sum u^n$ et $\sum \dfrac{u^n}{n!}$ convergent normalement sur la boule fermée de centre 0 et de rayon r avec respectivement $r < 1$ ou $r \in \mathbf{R}_+$ puisque dans de telles boules on a $\|u^n\| \leq \|u\|^n \leq r^n$. Il en résulte que les séries de fonctions convergent, et que leurs sommes sont continues sur ces boules et l'assertion en résulte en prenant la réunion de toutes ces boules fermées.

Définition 11 - 3

Convergence sur un voisinage, sur tous les compacts

On dit qu'une suite (ou une série) de fonctions à valeurs dans F converge uniformément au voisinage de a s'il existe un voisinage de a dans A où elle converge uniformément.

Lorsque A est ouvert, on dit qu'elle converge uniformément sur tous les compacts de A si, pour tout compact K inclus dans A, elle converge uniformément sur K.

Enfin, on parle, de même, de convergence normale sur tous les compacts (dans le cas d'une série).

Proposition 11 - 3

Continuité d'une limite, d'une somme

La limite d'une suite (ou d'une série) de fonctions continues à valeurs dans F et convergeant uniformément au voisinage de tous les points de A est continue sur A.

Lorsque A est ouvert, il en va de même si la suite (ou la série) converge uniformément (voire normalement) sur tous les compacts de A.

Démonstration. Soit a dans A. La continuité étant locale, on applique le résultat général à $A \cap V_a$ où V_a est un voisinage de a. Il en résulte que la limite (ou la somme) est continue sur $A \cap V_a$, donc en a.

Comme toute boule ouverte contenant a contient aussi un voisinage compact de a, puisque E est de dimension finie, le cas de la convergence uniforme sur les compacts est un cas particulier du précédent. $\square$

Proposition 11 - 4

Double limite

Soit a dans $\overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de A dans F ayant toutes une limite en a. Si (f_n) converge uniformément vers f sur A, alors f admet une limite en a et

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = \lim_n \left(\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f_n(x) \right) .$$

En particulier cette dernière limite existe ! Dans le cas $E = \mathbf{R}$, on peut prendre $a = \pm\infty$. Ce résultat s'applique aussi aux séries de fonctions uniformément ou normalement convergentes.

Démonstration. Soit ε strictement positif. On dispose d'un entier naturel n tel que, pour p entier supérieur à n, on ait $\|f_p - f\|_{A,\infty} \leq \varepsilon$ et donc $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} \|f_p(x) - f_n(x)\|_F &\leq \|f_p(x) - f(x)\|_F + \|f(x) - f_n(x)\|_F \\ &\leq \|f_p - f\|_{A,\infty} + \|f - f_n\|_{A,\infty} \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

et donc, par passage à limite quand x vers a, $\|\lim_a f_p - \lim_a f_n\|_F \leq 2\varepsilon$.

En particulier la suite $(\lim_a f_p)_{p\geq n}$ est bornée, et donc aussi $(\lim_a f_p)_{p\geq 0}$. Cette dernière admet donc au moins une valeur d'adhérence, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, puisque F est de dimension finie.

Soit alors ℓ et ℓ' deux valeurs d'adhérence de $(\lim_a f_p)_{p\geq 0}$. On dispose de p et q supérieurs à n tels que $\|\ell - \lim_a f_p\|_F \leq \varepsilon$ et $\|\ell' - \lim_a f_q\|_F \leq \varepsilon$ et donc, par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\|\ell-\ell'\|_F &\leq \left\|\ell-\lim_a f_p\right\|_F+\left\|\lim_a f_p-\lim_a f_n\right\|_F \\
&\quad +\left\|\lim_a f_n-\lim_a f_q\right\|_F+\left\|\lim_a f_q-\ell'\right\|_F \\
&\leq 6\varepsilon\ .
\end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, il en résulte $\ell=\ell'$ et donc que $(\lim_a f_p)_{p\geq n}$ admet une seule valeur d'adhérence. D'après la réciproque partielle du théorème de Bolzano-Weierstrass, on en déduit qu'elle converge.

Enfin, pour x dans A et m dans $\mathbf{N}$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|f(x)-\ell\|_F &\leq \|f(x)-f_m(x)\|_F+\left\|f_m(x)-\lim_a f_m\right\|_F+\left\|\lim_a f_m-\ell\right\|_F \\
&\leq \|f-f_m\|_{A,\infty}+\left\|f_m(x)-\lim_a f_m\right\|_F+\left\|\lim_a f_m-\ell\right\|_F\ .
\end{aligned}$$

Puisque la convergence est uniforme sur A et que $\lim_a f_n$ tend vers ℓ, on dispose de m pour lequel les termes extrémaux du second membre sont inférieurs à ε. Or, pour cet m fixé, on dispose de η dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que, pour x dans A vérifiant $\|x-a\|_E\leq\eta$, on ait $\|f_m(x)-\lim_a f_m\|_F\leq\varepsilon$ et le résultat en découle.

Dans le cas $E=\mathbf{R}$, on remplace l'assertion $\|x-a\|_E\leq\eta$ par $x\geq\eta$ ou $x\leq-\eta$. □

3 Intégration et dérivation

Théorème 11 - 3

Convergence uniforme ou normale et intégration

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions à valeurs dans F, continues sur un segment $[\,a;b\,]$ de $\mathbf{R}$, convergeant uniformément vers une fonction (nécessairement continue) f. Alors $\displaystyle\int_{[\,a;b\,]} f=\lim_n\left(\int_{[\,a;b\,]} f_n\right)$. En particulier cette limite existe.

On peut le formuler ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t\,,$$

i.e. en cas de convergence uniforme, on peut intervertir limite et intégrale.

Le même théorème est vrai pour les séries et on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme par la convergence normale de la série $\sum f_n$.

Démonstration. Puisque f est limite uniforme de fonctions continues, elle est continue, donc intégrable. De plus $\|f-f_n\|_{[\,a;b\,],\infty}$ tend vers 0 et donc, par l'inégalité de la moyenne, il en va de même pour $\displaystyle\int_{[\,a;b\,]}(f-f_n)$. Par linéarité, puisque $\displaystyle\int_{[\,a;b\,]} f$ existe, la limite de $\displaystyle\int_{[\,a;b\,]} f_n$ existe et vaut $\displaystyle\int_{[\,a;b\,]} f$. □

Danger

On prendra garde au fait qu'il s'agit d'intégration sur un segment et pas d'intégrales impropres ! L'outil adapté dans ce dernier cas est le théorème de convergence dominée.

Corollaire 11 - 1

Convergence uniforme ou normale et primitives

Soit (f_n) une suite de fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ et à valeurs dans F, a un point de I. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction f et on pose, pour n dans $\mathbf{N}$ et x dans I,

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Alors (F_n) converge uniformément vers F sur tout segment de I.

Le même théorème est vrai pour les séries et on peut remplacer l'hypothèse de convergence uniforme par la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur tout segment de I.

Démonstration. Le théorème précédent, appliqué sur $[\,a; x\,]$, montre qu'il y a convergence simple sur I et on déduit du théorème de la moyenne, pour tout segment K inclus dans I, $\|F_n - F\|_{K,\infty} \leq \|f_n - f\|_{K,\infty}\,\ell(K)$, où $\ell(K)$ est la longueur du segment K. La convergence uniforme sur K en résulte. □

♠

On peut faire beaucoup mieux ! Si on définit les fonctions intégrables comme celles pour lesquelles la construction de l'intégrale pour les fonctions continues marche, alors on peut se contenter de supposer les fonctions f_n intégrables.

Dans ces conditions, on peut démontrer que la limite f est intégrable et que son intégrale est limite des intégrales des fonctions f_n.

Exemples 11 - 4

— La vague (ou tsunami), i.e. les fonctions f_n affines par morceaux nulle en 0 et $1/n$, mais de masse 1, par exemple valant $2n$ en $\dfrac{1}{2n}$, donnent un exemple de fonctions continues convergeant vers une fonction continue mais pour lesquelles on ne peut intervertir limite et intégrale. En effet

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \int_I f_n = 1 \quad \text{et donc } \lim \int_I f_n = 1\,,$$

tandis qu'on a $\lim_n f_n = 0$ et donc

$$\int_I (\lim f_n) = 0\,.$$

— On a, sur $A = \,]-1;1[\,$,

$$\forall x \in \,]-1;1[\qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots$$

et cette série converge uniformément sur tout compact de la forme $[-a, a]$ inclus dans A. On peut donc intégrer et obtenir le développement d'arctangente bien connu

$$\forall x \in \,]-1;1[\qquad \arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots$$

Proposition 11 - 5

Convergence uniforme ou normale et dérivation

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un segment $[a;b]$ et à valeurs dans F . On suppose

1. (f_n) converge **simplement** vers f sur $[a;b]$;
2. (f'_n) converge **uniformément** vers p sur $[a;b]$.

Alors (f_n) converge uniformément vers f sur $[a;b]$, où f est de classe C^1, et $f' = p$. Autrement dit

$$\left(\lim_n f_n\right)' = \lim_n f'_n \ .$$

Le même théorème est vrai pour les séries et on peut remplacer la seconde propriété par la convergence normale de la série $\sum f'_n$.

Démonstration. D'après le théorème d'intégration précédent, pour x_0 et x dans $[a;b]$

$$\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \lim_n f'_n(t)\,\mathrm{d}t = \lim_n \left(\int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

et donc, en vertu du théorème de Leibniz-Newton (théorème fondamental du calcul différentiel et intégral)

$$\int_{x_0}^{x} p(t)\,\mathrm{d}t = \lim_n \left(f_n(x) - f_n(x_0)\right) = f(x) - f(x_0)$$

par convergence simple de (f_n) vers f. Puisque p est continue, par convergence uniforme de (f'_n), le théorème de Leibniz-Newton montre que f est de classe C^1 de dérivée p et donc, d'après le théorème d'intégration précédent, la suite $(f_n - f(x_0))$ converge uniformément vers $f - f(x_0)$, i.e. (f_n) converge uniformément vers f. □

Exemples 11 - 5

Il ne faut pas mettre la charrue avant les boeufs : c'est la **convergence uniforme des dérivées** qui est cruciale et non celle des fonctions elle-mêmes.

— On prend $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, alors $\|f_n\|_{\mathbf{R},\infty} = \dfrac{1}{2n}$ et donc (f_n) converge uniformément vers 0. Même si f_n est de classe C^1, la suite des dérivées, donnée par $f'_n(x) = \dfrac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$, converge simplement vers δ_0.

— On prend $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n}$, alors (f_n) converge uniformément vers 0, mais la suite de ses dérivées ne converge pas (simplement). L'ensemble des points de convergence de la suite (f'_n) est $2\pi\mathbf{Z}$.

— On prend $f_n(x) = \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + x^2}$ sur $[-1;1]$. Alors (f_n) converge uniformément vers la valeur absolue, mais (f'_n) ne converge pas uniformément : la convergence n'est uniforme que sur les compacts ne contenant pas 0.

En fait on peut montrer un théorème plus précis

Théorème 11 - 4

Convergence locale, uniforme ou normale, et fonctions de classe C^k

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions, k un entier naturel supérieur (ou égal) à 1 et I un intervalle de $\mathbf{R}$. On suppose

1. $\forall n \in \mathbf{N}$, $f_n \in C^k(I, F)$,
2. $\forall p \in [\![0; k-1]\!]$, $\sum f_n^{(p)}$ converge **simplement** et sa somme est notée g_p,
3. $\sum f_n^{(k)}$ converge **uniformément** sur tout segment inclus dans I vers une fonction g_k.

On note $g = g_0$. Alors

1. g est de classe C^k sur I,
2. $\forall p \in [\![0; k]\!]$, $g^{(p)} = g_p$.

Autrement dit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(p)} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(p)} .$$

Le même théorème est vrai pour les suites et on peut remplacer la dernière propriété par la convergence normale de la série $\sum f_n^{(k)}$ sur tous les segments de I.

Démonstration. Soit K un segment de I. Par récurrence immédiate sur p dans $[\![0; k]\!]$, à partir du théorème précédent, on obtient que $\sum f_n^{(k-p)}$ converge uniformément vers g_{k-p} et qu'on a $g_{k-p}^{(p-i)} = g_{k-i}$ pour $0 \leq i \leq p$. Le résultat cherché est obtenu pour $p = k$.

Par ailleurs puisque la continuité et la dérivabilité sont des notions locales et puisqu'au voisinage de tout point x de I de $\mathbf{R}$, on peut trouver un voisinage de x dans I qui soit un segment (si x est intérieur, c'est immédiat, sinon x est une borne et on prend un segment dont il est une des bornes), on en déduit que le résultat est vrai sur I. $\square$

Exemple 11 - 6

Exponentielle

Soit a dans $\mathscr{L}(E)$, pour E espace vectoriel normé de dimension finie. On considère la série de fonctions $\sum f_n$ définies sur $\mathbf{R}$ par $f_n(t) = \frac{t^n}{n!} a^n$. Ce sont des fonctions de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, car polynomiales. On munit $\mathscr{L}(E)$ d'une norme sous-multiplicative et il vient, pour M dans $\mathbf{R}_+$ et k dans $\mathbf{N}$,

$$\left\| f_n^{(k)} \right\|_{[-M;M],\infty} \leq \|a\|^k \frac{(M\|a\|)^{n-k}}{(n-k)!}$$

et donc $\sum f_n^{(k)}$ est normalement convergente sur tout compact de $\mathbf{R}$, par comparaison avec la série définissant $\exp(M\|a\|)$.

Il en résulte que l'application $f : t \mapsto \exp(ta)$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Comme on a pour tous n et k entiers, avec $n \geq k$, $f_n^{(k)} = a^k f_{n-k} = f_{n-k} a^k$, on a aussi $f^{(k)} = a^k f = f a^k$ et ainsi pour t réel on a $f'(t) = a \exp(ta) = \exp(ta) a$ et plus généralement $f^{(k)}(t) = a^k \exp(ta) = \exp(ta) a^k$.

En particulier f est solution sur $\mathbf{R}$ du problème de Cauchy : $y \in C^1(\mathbf{R}, \mathscr{L}(E))$, $y' = ay$ et $y(0) = \mathrm{Id}_E$.

De plus la solution du problème de Cauchy : $x \in C^1(\mathbf{R}, E)$, $x' = a(x)$ et $x(0) = x_0$ est donnée par $x(t) = \exp(ta) x_0$.

4 Étude de fonctions définies par des séries

4 1 Convergence normale sur les intervalles fermés non bornés : $\sum_{n\geq 1} \dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$

Cette série converge simplement sur $\mathbf{R}_+^*$ car, à x fixé dans $\mathbf{R}_+^*$, $\dfrac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(n^{-2}\right)$. Pour $x \leq 0$, il y a divergence (grossière si $x < 0$).

Sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$, avec $a > 0$, la série converge normalement. En effet le terme général est une fonction décroissante de x et est donc majoré, sur $[a; +\infty[$ par la série évaluée en a. Il en résulte, d'après les théorèmes précédents :

— la somme S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ est continue sur tout intervalle de la forme $[a; +\infty[$, pour $a > 0$, donc aussi sur $\mathbf{R}_+^*$;

— la limite en $+\infty$ est obtenue en prenant les limites des termes généraux et donc $\lim_{+\infty} S = 0$.

Puisque le terme général est une fonction décroissante, il en est de même de la somme, par passage à la limite. De même le terme général est convexe et donc S aussi. On peut étudier plus précisément les dérivées. La dérivée k-ième terme à terme est la série $\sum \dfrac{(-1)^k n^k e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et est donc normalement convergente sur tout intervalle $[a; +\infty[$, avec $a > 0$. En résumé

— la fonction S appartient à $C^\infty(\mathbf{R}_+^*, \mathbf{R}_+^*)$;

— elle est strictement décroissante ;

— elle est strictement convexe ;

— pour k dans $\mathbf{N}$ et x dans $\mathbf{R}_+^*$, on a $S^{(k)}(x) = (-1)^k \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{k-\frac{1}{2}} e^{-nx}$.

Puisque S est monotone, elle admet une limite, finie ou infinie, en 0 à droite. En fait cette limite est forcément infinie. En effet, si elle était finie, disons $\lim_{0^+} S = a$, alors, par décroissance : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $S(x) \leq a$. Puisqu'on a affaire à une série à termes positifs, on aurait $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $S_n(x) \leq a$ (où S_n désigne la somme partielle de rang n). Par continuité, on aurait alors $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $S_n(0) \leq a$ et donc, la série à termes positifs $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ serait bornée, donc convergente, ce qui n'est pas le cas. On en conclut $\boxed{\lim_{0^+} S = +\infty.}$

4 2 Équivalents en 0 et $+\infty$: $\sum \dfrac{1}{n^2 + x^2}$

Comme précédemment, on a convergence normale sur tout ensemble de la forme $\mathbf{R} \setminus]-a; a[$ avec $a > 0$, donc la série converge sur $\mathbf{R}^*$ et y est continue. Elle est paire et sa limite en l'infini est nulle. En décomposant S, on a, pour x réel non nul,

$$S(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$$

et le membre de droite est la somme d'une série normalement convergente sur $\mathbf{R}$. Il en résulte $S(x) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Enfin on peut préciser l'étude en l'infini par encadrement entre série et intégrale. On a en effet, pour x dans $\mathbf{R}^*$ et n dans $\mathbf{N}$,

$$\frac{1}{x^2} + \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} \leq S_n(x) \leq \frac{1}{x^2} + \int_0^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+x^2} .$$

Or ce dernier terme est égal à $\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n}{x}\right)$ et, par encadrement, $\boxed{S(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}}$.

4 3 $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+n^2x^2}$

Comme précédemment cette série converge vers une fonction continue sur $\mathbf{R}^*$, admet une limite nulle en l'infini et une limite infinie en 0.

4 4 $\zeta(s) : \sum_{n\geq 1} n^{-s}$

Pour $a > 1$, cette série converge normalement sur $[a;+\infty[$ et ζ est donc continue sur $]1;+\infty[$. La convergence normale est également valide pour les séries dérivées et donc ζ est en fait de classe C^∞ sur son domaine de définition.

Par passage à la limite on a $\lim_{+\infty}\zeta = 1$. Plus précisément, pour $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}$ et donc

$$0 \leq \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} = \frac{2}{2^s(s-1)} = \mathrm{o}_{+\infty}\left(2\right)^{-s}$$

et donc $\zeta(s) = 1 + 2^{-s} + \mathrm{o}_{+\infty}\left(2\right)^{-s}$ au voisinage de l'infini.

5 Séries entières

Définition 11 - 4

Série entière

Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de scalaires (réels ou complexes). On appelle série entière de la variable réelle (ou complexe) attachée à (a_n) la série $\sum f_n$ où $f_n : z \mapsto a_n z^n$, i.e. la série $\sum a_n z^n$.

Exemple 11 - 7

Si f est dans $C^\infty(I,\mathbf{K})$, avec I un intervalle de $\mathbf{R}$, et a est intérieur à I, alors on peut considérer la série de Taylor de f en a :

$$\sum \frac{f^{(n)}(a)}{n!} z^n$$

dont la somme, évaluée en $z = x - a$, peut être comparée à $f(x)$, pour x dans I.

En 1797, Lagrange écrit un traité basé sur le fait que toute fonction est somme de sa série de Taylor, ce qui lui permet d'écrire un traité d'analyse entièrement dégagé de toute considération d'infiniment petit, de limite et de fluxion (nom attribué par Newton aux dérivées). Mais en 1823 Cauchy montre que la formule de Taylor ne peut pas être acceptée en général.

Exemple 11 - 8

Soit f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\exp(-1/x^2)$ pour $x\neq 0$. Alors f est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ et toutes ses dérivées en 0 sont nulles, comme le montre le théorème de la limite de la dérivée et la remarque que la dérivée de f sur $\mathbf{R}^*$ est obtenue en multipliant f par une expression polynomiale en $1/x$.

En fait on peut rencontrer deux types de problèmes avec les séries de Taylor :

— la série de Taylor peut ne pas converger.

— la série de Taylor peut converger sans que sa somme soit la fonction de départ.

En fait l'étude des séries entières est plus naturelle dans le champ complexe.

Définition 11 - 5

Domaine de convergence

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière sur $\mathbf{C}$, on appelle domaine de convergence D de $\sum a_n z^n$ l'ensemble des nombres complexes z tels que la série converge.

Le domaine de convergence contient toujours 0.

Exemples 11 - 9

— Si (a_n) est presque nulle, on a affaire à une fonction polynomiale et $D=\mathbf{C}$.

— $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est la série définissant l'exponentielle. On a $D=\mathbf{C}$ et $f(z)=\exp(z)$.

— $\sum n!\,z^n$: on a alors $D=\{0\}$ et $f(0)=1$.

— $\sum z^n$: on a $D=B(0,1)$ et $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$.

On parle de série entière lacunaire lorsque (a_n) s'annule. Par exemple

Exemples 11 - 10

— $\sum \dfrac{z^{2n}}{n!}$: on a $D=\mathbf{C}$ et $f(z)=\exp(z^2)$.

— $\sum t^n z^{3n}$: on a $D=B(0,t^{-1/3})$ et $f(z)=(1-tz^3)^{-1}$ (pour t dans $\mathbf{R}_+^*$).

L'étude des séries entières est remarquablement plus simple que celle des séries ! Grâce aux travaux d'Abel, on voit qu'il est parfois plus simple de rajouter une variable à un problème pour l'étudier ...

Théorème 11 - 5

Lemme d'Abel

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et ρ dans $\mathbf{R}_+^*$ tel que $(a_n\rho^n)$ soit bornée. Alors

1. la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour $|z|<\rho$, i.e. $B(0,\rho)\subset D$,
2. la converge est normale (donc absolue et uniforme) sur tout compact de $B(0,\rho)$.

Démonstration. Pour z dans $\mathbf{C}$, on a $|a_n z^n| = |a_n\rho^n|\cdot\left|\dfrac{z}{\rho}\right|^n = O\left(\left(\dfrac{|z|}{\rho}\right)^n\right)$. D'où la première assertion par comparaison des séries à termes positifs.

Si K est un compact de $B(0,\rho)$, la fonction module atteint ses bornes sur K et donc K est inclus dans un disque fermé $\overline{B}(0,R)$ avec $R<\rho$. L'inégalité précédente montre que sur K, $(a_n z^n)$ est dominé par $(R/\rho)^n$, d'où la convergence normale. $\square$

Remarquons en particulier que si $\sum a_n z_0^n$ est convergente pour un certain z_0, alors $(a_n z_0^n)$ est bornée et le lemme d'ABEL s'applique avec $\rho = |z_0|$. On en déduit le concept de rayon de convergence :

Définition 11 - 6

Rayon de convergence

On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ la quantité ρ définie par

$$\rho = \sup\{|z| \mid z \in \mathbf{C}\,,\ (a_n z^n) \text{ est bornée}\} = \sup\left\{|z| \;\middle|\; z \in \mathbf{C}\,,\ \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}.$$

On prendra garde au fait que les deux ensembles peuvent différer même si les deux suprema sont, eux, toujours égaux.

Dans le cas complexe, on appelle disque ouvert de convergence le disque $B(0,\rho)$. Dans le cas réel, on appelle intervalle ouvert de convergence l'intervalle $]-\rho;\rho[$.

Propriété 11 - 1

Comparaison entre séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Si $|a_n| = \mathrm{O}(|b_n|)$, alors $R_a \geq R_b$ et si $a_n \sim b_n$, alors $R_a = R_b$.

De plus, si $b_n = n a_n$, alors $R_a = R_b$.

Démonstration. Si $|a_n| = \mathrm{O}(|b_n|)$, alors

$$\{|z| \mid z \in \mathbf{C}\,,\ (b_n z^n) \text{ est bornée}\} \subset \{|z| \mid z \in \mathbf{C}\,,\ (a_n z^n) \text{ est bornée}\}$$

puisque $a_n z^n = O(b_n z^n)$, et donc $R_b \leq R_a$ par définition d'un supremum. Si, de plus $a_n \sim b_n$, alors on a également $|b_n| = \mathrm{O}(|a_n|)$, donc $R_a \leq R_b$ et ainsi $R_a = R_b$.

Si $b_n = n a_n$, alors $|a_n| = \mathrm{o}(|b_n|)$ et donc $R_a \geq R_b$. De plus, pour z et u dans $\mathbf{C}$ tels que $|u| < |z|$, on a $b_n u^n = a_n z^n \times n \left(\dfrac{u}{z}\right)^n$ et donc $|b_n u^n| = \mathrm{o}(|a_n z^n|)$. Il en résulte, pour r dans $\mathbf{R}_+$, $r < R_a \Longrightarrow r \leq R_b$ et donc $R_b \geq R_a$, d'où $R_a = R_b$. □

Théorème 11 - 6

Disque ouvert de convergence

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence ρ. Alors

1. sur $B(0,\rho)$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument ;
2. sur $B(0,\rho)$, la somme de cette série est continue ;
3. sur $\mathbf{C} \setminus \overline{B}(0,\rho)$, la série $\sum a_n z^n$ est grossièrement divergente.

En particulier $B(0,\rho) \subset D \subset \overline{B}(0,\rho)$, où D désigne le domaine de convergence de $\sum a_n z^n$. On appelle $B(0,\rho)$ le disque ouvert de convergence.

Démonstration. Cela résulte de la définition et du lemme d'ABEL. □

Exemple 11 - 11

On considère la série $\sum_{n\geq 1}\dfrac{z^n}{n^\alpha}$ pour α réel. Cette série est de rayon de convergence 1. En effet on peut appliquer le critère de D'ALEMBERT de comparaison aux séries géométriques : pour $z\neq 0$,

$$\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\frac{n^\alpha}{|z|^n}=\frac{|z|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha}$$

dont la limite est toujours $|z|$. Donc il y a convergence pour $|z|<1$ et divergence pour $|z|>1$. Plus précisément :

— Si $\alpha=0$, la somme est $\dfrac{1}{1-z}$ et la série diverge en -1 et 1.

— Si $\alpha=1$, la somme est $-\ln(1-z)$ (pour z réel) et la série converge en -1, mais diverge en 1.

— Si $\alpha=2$, on a affaire au dilogarithme et la série converge en -1 et 1.

En fait, pour $\alpha>1$, la convergence est normale sur $[-1;1]$. Par contre pour $0<\alpha\leq 1$, la série ne convergeant pas en 1, il ne peut y avoir de convergence uniforme sur $[-1;1]$.

Toutefois il y a convergence uniforme sur $[-1;0]$. En effet, en appliquant le critère de LEIBNIZ, on obtient la convergence et une majoration : le reste de la série alternée $\sum(-1)^n\dfrac{x^n}{n^\alpha}$ est majoré en valeur absolue par le terme correspondant de la série, i.e. $|R_n(x)|\leq\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\alpha}\leq\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Recourir à la définition du rayon de convergence n'est pas toujours pratique. On peut plutôt appliquer les résultats sur les séries, comme on vient de le faire dans l'exemple précédent. On a ainsi

Théorème 11 - 7

Règle de D'ALEMBERT - CAUCHY 1821

Si $\sum a_nz^n$ est une série entière et si $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ admet une limite finie ou infinie, alors $\sum a_nz^n$ admet l'inverse de cette limite comme rayon de convergence (l'inverse de l'infini étant 0 et l'inverse de 0 étant l'infini), autrement dit

$$\textbf{Si }\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)\textbf{ converge, alors }\rho=\lim_n\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Démonstration. Cela résulte directement du critère de D'ALEMBERT appliqué à (a_nz^n). □

Exemple 11 - 12

Les fonctions exp, sin et cos (définie sur **C** comme sommes de séries entières) admettent l'infini comme rayon de convergence. Dans le cas de sin et cos, on a affaire à des séries lacunaires.

Le rayon de convergence de $\sum n!\,z^n$ est nul.

Le rayon de convergence de arctan, définie par $z-\dfrac{z^3}{3}+\dfrac{z^5}{5}+\cdots$ est 1.

Dans le cas des séries lacunaires, on applique le critère de D'ALEMBERT aux termes non nuls. Ainsi pour arctan, on considère le rapport de deux termes consécutifs (pour

$z \neq 0$), à savoir $\dfrac{|z|^{2n+1}}{2n+1}\dfrac{2n-1}{|z|^{2n-1}}$, i.e. $|z|^2\dfrac{2n+1}{2n-1}$, de sorte que le rayon de convergence est l'inverse de la racine carrée de la limite de $\dfrac{2n+1}{2n-1}$, ce qui se trouve faire 1.

Exemples 11 - 13

1. Soit (a_n) une suite à valeurs dans $\{0,1\}$ qui n'est pas presque nulle. Alors puisque $\sum a_n$ diverge, $\rho \leq 1$ et puisque (a_n) est bornée, $\rho \geq 1$. D'où $\rho = 1$.
2. $\sum \dfrac{n!}{n^n} z^n$: comme $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, on a $\rho = e$.
3. $\sum \dfrac{n}{2^n} z^{3n}$: comme $\dfrac{a_{3n}}{a_{3n+3}} = 2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-1}$, on a $\rho^3 = 2$ et donc $\rho = 2^{1/3}$.
4. $\sum \operatorname{ch}(n) z^{2n}$: comme $\dfrac{a_{2n}}{a_{2n+2}} \sim \dfrac{e^n}{e^{n+1}} \sim \dfrac{1}{e}$, on a $\rho = 1/\sqrt{e}$.

Pour être plus précis dans le dernier exemple, pour $|z| < 1/\sqrt{e}$, la somme de $\sum e^n z^{2n}$ est $(1-ez^2)^{-1}$ et celle de $\sum e^{-n} z^{2n}$ est $(1-e^{-1}z^2)^{-1}$. Il en résulte

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{ch}(n) z^{2n} = \frac{1-\operatorname{ch}(1)z^2}{1-2\operatorname{ch}(1)z^2+z^4}\ .$$

De plus la série est grossièrement divergente pour $|z| \geq \dfrac{1}{\sqrt{e}}$.

Le dernier exemple invite à réfléchir aux structures algébriques compatibles avec les séries entières. C'est en fait très simple !

Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont deux séries entières, on peut définir leur somme, degré par degré, i.e. par la série entière $\sum (a_n+b_n) z^n$.

On peut également définir leur produit de Cauchy, adapté à la situation puisqu'alors on effectue bien un groupement par degré du produit :

$$\left(\sum a_n z^n\right)\cdot\left(\sum b_n z^n\right) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n\ .$$

Propriétés 11 - 2

Somme et produit de séries entières

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence ρ_a et ρ_b respectivement. Alors

1. $\sum (a_n+b_n) z^n$ a un rayon de convergence supérieur à $\min(\rho_a, \rho_b)$;
2. le produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ défini par $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ a un rayon de convergence supérieur à $\min(\rho_a, \rho_b)$;
3. pour z tel que $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\ ,\quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)\ .$$

Démonstration. Si $|z| < \min(\rho_a, \rho_b)$, les séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes, donc leur somme et leur produit de Cauchy sont absolument convergentes de sommes respectives la somme et le produit des sommes. On en déduit que les rayons de convergence de ces somme et produit sont supérieurs à $\min(\rho_a, \rho_b)$. □

Exemples 11 - 14

1. $\sum(n+1)z^n$ est le produit de CAUCHY de $\sum z^n$ avec elle-même et donc son rayon de convergence est supérieur à 1 et sa somme, pour $|z|<1$, est donnée par $(1-z)^{-2}$. D'après le théorème de continuité de la somme sur le domaine de convergence, on en déduit $\rho=1$ ... mais il y a plein d'autres raison à ce dernier résultat !
2. Pour z et z' dans $\mathbf{C}$, on a $\exp(z+z')=\exp(z)\exp(z')$ puisque cette identité est un produit de CAUCHY.

6 Séries entières de la variable réelle

Si on restreint z à être réel, outre qu'on le notera alors x, le domaine de convergence devient un intervalle puisqu'intersection de D avec $\mathbf{R}$ (et donc intersection de deux convexes). Plus important on peut se poser des questions de dérivation et d'intégration (même si on aurait pu le faire, en dehors du cadre du programme, pour un domaine complexe).

La situation est très agréable du point de vue de la régularité !

Théorème 11 - 8

Intégration et dérivation des séries entières

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence ρ, avec $\rho>0$. On note f sa somme et I l'intervalle ouvert de convergence $]-\rho;\rho[$. Alors

1. Pour tout segment $[a;b]$ inclus dans I, f est intégrable sur $[a;b]$. On dit aussi que f est localement intégrable sur I.
2. Soit F la primitive de f sur I donnée par $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$, i.e. la primitive de f s'annulant en 0. Alors F est somme de la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$, dont I est également l'intervalle ouvert de convergence.

Autrement dit on peut intégrer terme à terme une série entière :

$$\forall x\in I\,,\qquad \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}\,.$$

De plus

1. La série entière $\sum(n+1)a_{n+1}x^n$ est convergente sur I et sa somme est la dérivée de f, qui est donc de classe C^1 sur I.
2. Le rayon de convergence des séries définissant f et f' sont identiques.

Plus généralement f est de classe C^∞ sur I et ses dérivées sont obtenues par dérivation terme à terme, toutes ces séries ayant le même rayon de convergence :

$$\forall x\in I\,,\forall p\in\mathbf{N}\qquad f^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(n+2)\cdots(n+p)a_{n+p}x^n\,.$$

Démonstration. Puisqu'une série entière est normalement convergente sur tout compact de I, on peut l'intégrer terme à terme. D'où les assertions sur l'intégration.

De plus $\sum \frac{a_n}{n}z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence (puisque $a_n=n\times\frac{a_n}{n}$), et donc le même que $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ puisque $\frac{a_n}{n+1} \sim \frac{a_n}{n}$. La deuxième propriété découle donc de la première. La généralisation au caractère C^∞ provient d'une récurrence immédiate. $\square$

On en déduit

Théorème 11 - 9

Coefficients d'une série entière de rayon de convergence non nul

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence non nul et de somme f. Alors, pour tout entier naturel n, on a $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Autrement dit une série entière est somme de sa série de TAYLOR si son rayon de convergence est non nul. Par différence entre deux séries entières, on peut reformuler ce résultat en un principe d'unicité :

Théorème 11 - 10

Unicité du développement en série entière

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de la variable réelle de rayons de convergence non nuls et coïncidant sur un voisinage de 0, alors $(a_n) = (b_n)$.

Autrement dit il y a unicité du développement en série entière.

Définition 11 - 7

Soit f une fonction d'un intervalle réel I, contenant 0 en son intérieur, à valeurs dans $\mathbf{K}$. On dit que f est développable en série entière sur l'intervalle $]-r;r[$, où r est un réel strictement positif, si $]-r;r[\subset I$ et s'il existe une suite (a_n) de scalaires telle que f soit la somme de la série entière $\sum a_n z^n$ sur $]-r;r[$.

Proposition 11 - 6

Développement en série entière et fonctions de classe C^∞

Soit f une fonction développable en série entière sur un intervalle $]-r;r[$, avec r un réel strictement positif. Alors f est de classe C^∞ sur $]-r;r[$, sa série de TAYLOR a un rayon de convergence ρ supérieur à r et f est somme de sa série de TAYLOR.

Réciproquement, pour f dans $C^\infty(]-r;r[,\mathbf{K})$, avec $r>0$, f est développable en série entière sur $]-r;r[$ si et seulement si elle est somme de sa série de TAYLOR, i.e.

$$\forall x \in]-r;r[\qquad \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow 0 .$$

7 Applications

7 1 Fonctions génératrices

Les variables aléatoires discrètes font naturellement apparaître des séries de la forme $\sum p_n$. La série $\sum np_n$ est alors celle qui définit l'espérance, à supposer que p_n représente la probabilité $\mathbf{P}(X=n)$, i.e. si on a affaire à une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$. Cette dernière série est déjà apparue dans l'étude des séries entières et il est donc naturel d'introduire la notion de série génératrice.

Définition 11 - 8

Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, on appelle fonction génératrice de X la somme de la série entière $\sum \mathbf{P}(X=n)\, z^n$ et on la note G_X.

Autrement dit, sous réserve d'existence, on a $G_X(z) = \mathbf{E}\left(z^X\right)$.

Propriétés 11 - 3

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, de fonction génératrice G_X.

1. La série entière définissant G_X a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
2. Elle converge normalement sur le disque **fermé** de centre 0 et de rayon 1.
3. La fonction de la variable réelle G_X est de classe C^∞ sur $]-1;1[$.
4. De plus elle est positive, croissante et convexe, et même absolument monotone (i.e. toutes ses dérivées sont positives) sur $[0;1]$.
5. La loi de X et G_X sont déterminées l'une par l'autre. En particulier on a

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \mathbf{P}(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}\,.$$

Démonstration. Puisque X est à valeurs dans $\mathbf{N}$, la famille $(\mathbf{P}(X=n))_{n\in\mathbf{N}}$ est, par définition, sommable et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n) = 1$. Il en résulte que la série entière définissant G_X converge en 1 et a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. Par positivité des probabilités, on en déduit également la convergence normale sur le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

D'après les propriétés des séries entières, on en déduit que G_X est de classe C^∞ sur $]-1;1[$ et que ses dérivées y sont données par

$$G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathbf{P}(X=n)\, t^{n-k}\,.$$

On en déduit que G_X est absolument monotone sur $[0;1]$ et que G_X détermine la loi de X grâce aux dérivées en 0. □

Théorème 11 - 11

Moment et régularité de la fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, de fonction génératrice G_X, alors

1. X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable à gauche en 1, et dans ce cas $\mathbf{E}(X) = G'_X(1)$;
2. X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas $\mathrm{V}(X) = G''_X(1) + G'_X(1)\,(1 - G'_X(1))$;
3. plus généralement, X admet un moment d'ordre k si et seulement si G_X est k fois dérivable à gauche en 1, et dans ce cas $G_X^{(k)}(1) = \mathbf{E}(X(X-1)\dots(X-k+1))$.

Dans ce qui précède, les dérivées s'entendent comme des dérivées à gauche si le rayon de convergence de la série définissant G_X est égal à 1, et comme des dérivées (bilatérales) quand ce rayon de convergence est strictement supérieur à 1.

Démonstration. Pour k dans $\mathbf{N}^*$, la série dérivée k fois de $\sum \mathbf{P}(X=n)\, z^n$ est donnée par la formule obtenue précédemment : $\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathbf{P}(X=n)\, z^{n-k}$. En particulier si X a un moment d'ordre k, la série précédente converge normalement sur $[0;1]$ puisque, pour t dans $[0;1]$, on a

$$\left|n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathbf{P}(X=n)\, t^{n-k}\right| \leq n^k\mathbf{P}(X=n)$$

et le membre de droite est le terme général d'une série (absolument) convergente, par définition du moment. Or si X a un moment d'ordre k, elle en a un de tout ordre inférieur et donc, d'après le théorème de dérivation des séries de fonctions, on en déduit que G_X admet une dérivée d'ordre k et que celle-ci est somme de la série $\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathbf{P}(X=n)\, t^{n-k}$.

Pour $k=1$, on obtient en particulier $G_X'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\mathbf{P}(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\mathbf{P}(X=n)$, i.e. $\mathbf{E}(X) = G_X'(1)$.

Pour $k=2$, il vient $G_X''(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\mathbf{P}(X=n)$, i.e. $G_X''(1) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)$. On en déduit $\mathrm{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2 = G_X''(1) + \mathbf{E}(X)(1-\mathbf{E}(X))$, d'où le résultat escompté en utilisant le calcul précédent.

Réciproquement, si G_X est k fois dérivable à gauche en 1, alors par monotonie absolue, $G_X^{(k)}$ est croissante (ou encore $G_X^{(k-1)}$ est convexe). Par positivité des termes de la série, on en déduit que, pour t dans $[0;1[$, la somme partielle de la série définissant $G_X^{(k)}(t)$ est inférieure à la somme de cette série, i.e. à $G_X^{(k)}(t)$, et donc aussi à $G_X^{(k)}(1)$. Par passage à la limite en t, on en déduit que les sommes partielles de la série

$$\sum_{n\geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1)\mathbf{P}(X=n)$$

sont toutes majorées par $G_X^{(k)}(1)$, et donc que cette dernière série est convergente, i.e. $X(X-1)\ldots(X-k+1)$ admet un moment d'ordre 1. Ceci étant vrai pour tout ordre inférieur à k, on en déduit que X admet un moment d'ordre k. $\square$

Exemples 11 - 15

1. Loi de Bernoulli – Si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $G_X(t) = 1-p+pt$ et le rayon de convergence de la série définissant G_X est infini.
2. Loi binomiale – Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors $G_X(t) = (1-p+pt)^n$ et le rayon de convergence de la série définissant G_X est infini.
3. Loi géométrique – Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$ et le rayon de convergence de la série définissant G_X est égal à $\dfrac{1}{1-p}$.
4. Loi de Poisson – Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$ et le rayon de convergence de la série définissant G_X est infini.

7 2 Fractions rationnelles

Toute fraction rationnelle sans pôle en 0 est développable en série entière. En effet on peut l'écrire comme somme d'un polynôme et d'éléments simples. Sur $\mathbf{C}$ on obtient les éléments simples par dérivation de ceux de degré -1. Enfin

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\dfrac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{a^k}$$

avec un rayon de convergence égal à $|a|$. Par dérivation il vient

$$\frac{1}{(z-a)^n} = \frac{(-1)^n}{a^n}\frac{1}{\left(1-\dfrac{z}{a}\right)^n} = \frac{(-1)^n}{a^n}\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{n+k-1}{n-1}\frac{z^k}{a^k}\ .$$

Exercice

Développer en série entière $\dfrac{1}{1-2x\cos(\alpha)+x^2}$.

7 3 Intégration de la série entière pour la dérivée

Soit f définie par $f(x) = \ln(1+x+x^2)$ sur $\mathbf{R}$. La dérivée de f est une fraction rationnelle que l'on peut développer en série entière, puis intégrer en tenant compte de la valeur en 0.

Concrètement la dérivée est donnée par

$$f'(x) = \frac{2x+1}{1+x+x^2} = \frac{1}{x-j} + \frac{1}{x-\overline{j}} = 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{x-j}\right)$$

et les calculs sont simples. On peut néanmoins faire encore plus simple !

On écrit $1-x^3 = (1-x)(1+x+x^2)$ et donc $f(x) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x)$, au moins pour $|x| < 1$. Il vient

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

7 4 Résolution d'équation différentielle

On peut chercher les solutions d'équations différentielles linéaires développables en série entière. Si une fonction est développable en série entière au voisinage de 0, avec un rayon de convergence non nul R, et somme de $\sum a_n x^n$, alors ses dérivées sur $]-R;R[$ sont données par dérivation terme à terme et l'équation différentielle se traduit par des équations sur les coefficients par unicité du développement en série entière de la fonction nulle.

Par exemple pour

$$2xy'' + y' - y = 0$$

une solution de la forme $\sum a_n x^n$ doit vérifier, pour n dans $\mathbf{N}$, $(n+1)(2n+1)a_{n+1} = a_n$ et donc $a_n = \dfrac{2^n}{(2n)!}a_0$. On obtient donc une série entière dont le rayon de convergence est infini. Plus précisément $y(x) = a_0\,\mathrm{ch}(\sqrt{2x})$ si $x \geq 0$ et $y(x) = a_0\cos(\sqrt{-2x})$ sinon. Pour trouver une autre solution, on applique la méthode de Lagrange dite de variation de la constante.

Néanmoins la série entière peut très bien avoir un rayon de convergence nul. Dans ce cas, autant dire qu'on n'a pas trouvé de solution puisqu'elle n'est définie qu'en un point ! Il se peut aussi que la relation trouvée ne donne rien. Par exemple pour cette équation, tirée du concours CCINP MP 2016

$$x^2y'' + (x^2-x)y' + 2y = 0\ .$$

On obtient $a_0 = 0$, $-a_1 + 2a_1 = 0$ et, pour $n \geq 2$, $(n(n-1) - n + 2)a_n + (n-1)a_{n-1} = 0$, et ainsi la seule solution développable en série entière est la série nulle.

On peut aussi trouver un rayon de convergence non nul et non infini. Par exemple pour

$$(x^2 + x)y'' + (3x + 1)y' + y = 0 \,.$$

On trouve $a_n + a_{n+1} = 0$ et donc $y(x) = \dfrac{a_0}{1+x}$ avec un rayon de convergence égal à 1. La solution trouvée convient, par chance, pour $I = \left]-\infty; -1\right[$ et pour $\left]-1; +\infty\right[$. Pour trouver les solutions générales, on applique la méthode de Lagrange sur un des trois intervalles où $x^2 + x$ ne s'annule pas, i.e. $\left]-\infty; -1\right[$, $\left]-1; 0\right[$ et $\mathbf{R}_+^*$. On écrit $y(x) = f(x)/(x+1)$ et il vient $xf'' + f' = 0$ et donc $y(x) = \dfrac{a\ln(|x|) + b}{1+x}$.

Pour avoir un raccordement en -1, il faut $b = 0$ et les solutions sur $\mathbf{R}_-^*$ sont de la forme $y(x) = \dfrac{a\ln(|x|)}{1+x}$ avec $y(-1) = -a$.

Pour avoir un raccordement en 0, il faut $a = 0$ et les solutions sur $\left]-1; +\infty\right[$ sont de la forme $y(x) = \dfrac{b}{1+x}$.

Enfin il n'y a qu'une seule solution sur $\mathbf{R}$ entier, à savoir la solution nulle.

7 5 Utilisation d'équation différentielle

La fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est solution de l'équation différentielle $(1+x)y' = \alpha y$ avec condition initiale $y(0) = 1$. On peut en chercher une solution développable en série entière : $\sum a_n x^n$ est solution si et seulement si $(1+x)\sum n a_n x^{n-1} = \alpha \sum a_n x^n$ et on obtient la relation de récurrence $a_{n+1} = \dfrac{\alpha - n}{n+1} a_n$, avec $a_0 = 1$. D'où $a_n = \binom{\alpha}{n}$.

Comme la série $\sum \binom{\alpha}{n} x^n$ est de rayon de convergence 1, par unicité de la solution de l'équation différentielle au voisinage de 0, on a $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

Exercice

Développer la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1-x^2}\,\arcsin(x)$ en utilisant l'équation différentielle $y' = 1 - \dfrac{xy}{1-x^2}$.

Dans l'autre sens on peut remarquer qu'une série entière est solution d'une équation différentielle comme par exemple pour $\sum \dfrac{x^{3n}}{(3n)!}$. On a alors $y + y' + y'' = \exp$. Cette remarque, combinée à $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$, donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!} = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-x/2}\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right) \,.$$

7 6 Calculs explicites

Soit P un polynôme et $\sum P(n)x^n$ la série entière formée à partir de la suite $(P(n))$.

On décompose P dans la base des polynômes de Newton $X(X-1)\cdots(X-k+1)$. Comme

$$\sum n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n = x^k \left(\sum x^n\right)^{(k)} \,,$$

on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)x^n = \frac{k!\,x^k}{(1-x)^{k+1}} \,.$$

Par exemple $\sum n^3 x^n = \dfrac{x^3+4x^2+x}{(x-1)^4}$, puisque $X^3 = X(X-1)(X-2)+3X(X-1)+X$ et

$$\begin{aligned} \frac{6X^3}{(1-X)^4} + 3\frac{2X^2}{(1-X)^3} + \frac{X}{(1-X)^2} &= \frac{6X^3-6X^2(X-1)+X(X-1)^2}{(X-1)^4} \\ &= \frac{X^3+4X^2+X}{(X-1)^4}\,. \end{aligned}$$

Vu la technique employée, l'opérateur Δ de Newton peut être utilisé efficacement. En termes de séries on peut le voir simplement

$$(1-x)\sum a_n x^n = a_0 + \sum (\Delta a)_n x^{n+1} = a_0 + x\sum (\Delta a)_n x^n$$

et on en déduit, en notant $P(n) = n^3 = a_n$ et en remarquant $\Delta^4 P = 0$,

$$\begin{aligned} (1-x)^4 \sum n^3 x^n &= (1-x)^3 P(0) + x(1-x)^3 \sum \Delta P(n) x^n \\ &= (1-x)^3 P(0) + x(1-x)^2 \Delta P(0) + x^2(1-x)^2 \sum \Delta^2 P(n) x^n \\ &= (1-x)^3 P(0) + x(1-x)^2 \Delta P(0) + x^2(1-x)\Delta^2 P(0) + \\ &\quad x^3(1-x)\sum \Delta^3 P(n) x^n \\ &= (1-x)^3 P(0) + x(1-x)^2 \Delta P(0) + x^2(1-x)\Delta^2 P(0) + \\ &\quad x^3 \Delta^3 P(0) + x^4 \sum \Delta^4 P(n) x^n \\ &= (1-x)^3 P(0) + x(1-x)^2 \Delta P(0) + x^2(1-x)\Delta^2 P(0) + \\ &\quad x^3 \Delta^3 P(0) \end{aligned}$$

ce qui est bien la même chose puisque $P(0) = 0$, $\Delta P(0) = P(1) - P(0) = 1$ etc.

La même astuce permet de calculer les séries entières de la forme $\sum \dfrac{P(n)}{n!} x^n$.

De façon réciproque on peut expliciter le terme général d'une suite, par exemple une suite récurrente linéaire. Soit (F_n) la suite de Fibonacci, i.e. $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout entier naturel n. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F_n x^n$, ce qui est licite car (F_n) est combinaison linéaire de séries géométriques et donc la série $\sum F_n x^n$ a un rayon de convergence non nul.

On a alors $1 + x + (x+x^2)f(x) = f(x)$ et donc $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x-x^2}$. On termine en calculant le développement en série entière comme une fraction rationnelle.

7 7 Régularité

La fonction définie par $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ puisque développable en série entière ! Il en va de même pour $\dfrac{\sin(x)}{x}$ ou $\dfrac{x}{e^x-1}$.

Pour le dernier exemple, c'est $1/f$ qui est développable en série entière, donc de classe C^∞, ce qui suffit à assurer à que f est aussi de classe C^∞. Mais on peut montrer que f est développable en série entière (cf. exercice 11 - 29).

7 8 Formulaire

— Sur $\mathbf{C}$, $\exp(z) = 1 + z + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{6} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

— Sur $\mathbf{C}$, $\exp(\lambda z) = 1 + \lambda z + \dfrac{\lambda^2 z^2}{2} + \dfrac{\lambda^3 z^3}{6} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^n z^n}{n!}$.

— Sur $\mathbf{C}$, $\mathrm{ch}(z) = 1 + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{24} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$.

— Sur $\mathbf{C}$, $\mathrm{sh}(z) = z + \dfrac{z^3}{6} + \dfrac{z^5}{120} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

— Sur $\mathbf{C}$, $\cos(z) = 1 - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^4}{24} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$.

— Sur $\mathbf{C}$, $\sin(z) = z - \dfrac{z^3}{6} + \dfrac{z^5}{120} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

— Sur $B(0,1)$, $\dfrac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

— Sur $B(0,1)$, $\dfrac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z^n$.

— Sur $]-1;1[$, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$.

— Sur $]-1;1[$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$.

— Sur $]-1;1[$, $\arctan(x) = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

8 Compléments

8 1 Continuité, intégration des suites de fonctions

Voici quelques pathologies :

— Comme $\mathbf{Q}$ est dénombrable, on dispose d'une bijection φ de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}$. On note alors f_n la fonction caractéristique de $\varphi(⟦0;n⟧)$. Alors f_n est en escalier, d'intégrale nulle. La suite (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ qui, elle, n'est pas intégrable au sens de Riemann (i.e. au sens précédemment évoqué). Il faut des théories de l'intégration plus puissantes, comme celle de Lebesgue ou de Kurzweil-Henstock, pour donner un sens à l'intégrabilité de $\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}$ et alors son intégrale sera nulle.

— Riemann donne en 1854 un exemple théoriquement important. On note φ la fonction donnant le plus proche entier, i.e. $\varphi(x) = \left[\left(x + \dfrac{1}{2}\right)\right]$, et f_n la suite définie par $f_n(x) = \dfrac{\varphi(nx)}{n^2}$. Alors la série $\sum f_n$ est normalement convergente. Pourtant sa somme est discontinue sur tout intervalle ouvert (non vide). Autrement dit l'ensemble des points de discontinuité de sa somme est dense dans $\mathbf{R}$. Néanmoins cette somme est intégrable au sens de Riemann !

8 2 Séries de Taylor

La formule de Taylor avec reste de Lagrange (hors-programme) permet souvent de conclure au côté développable en série entière. Il s'agit en effet de montrer que $\dfrac{x^n}{n!} f^{(n)}(\xi)$ tend vers 0 pour tout x, avec ξ donné par la formule de Taylor-Lagrange.

Par exemple si $\left\| f^{(n)} \right\|_{I,\infty} = \mathrm{O}\left(n!\, r^n\right)$, on obtient directement la convergence pour $|x| < r$.

Abel a utilisé directement le reste de Laplace pour démontrer complètement la formule du binôme en 1826. En voici la formulation par Weierstrass (1861). On a donc $f(t) = (1+t)^\alpha$ et le reste de Laplace est

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}\,\mathrm{d}t$$

ou encore, en utilisant le théorème de la moyenne (ou l'égalité des accroissements finis)

$$\begin{aligned} R_n(x) &= x\frac{(x-\xi)^n}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)x^{n+1}}{n!}(1+\xi)^{\alpha-1}\left(\frac{1-\dfrac{\xi}{x}}{1+\xi}\right)^n \end{aligned}$$

et le reste est écrit comme le produit de trois termes : un terme convergent, un terme borné par $\max(1,(1+x)^{\alpha-1})$ et un dernier terme borné par 1 (car $0 < \dfrac{\xi}{x} < 1$ et donc $1 - \dfrac{\xi}{x} < 1 + \xi$, puisque $|x| < 1$).

En voici une autre démonstration : on a

$$R_n(x) = x^{n+1}\binom{\alpha}{n}\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+xt)^n}(1+xt)^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

$\left|\dfrac{1-t}{1+xt}\right| \leq 1$ et $\left|(1+xt)^{\alpha-1}\right| \leq \max(1,(1+x)^{\alpha-1})$, par monotonie en t des deux membres de gauche. Il en résulte $R_n(x) = \mathrm{O}\left(\binom{\alpha}{n}|x|^n\right)$, ce qui suffit à conclure.

8 3 Fonctions absolument monotones

La fonction tangente est absolument monotone au sens que toutes ses dérivées sont positives, comme le voit à partir de $\tan' = 1 + \tan^2$ et d'une récurrence forte en utilisant la formule de Leibniz. On en déduit que le reste de Lagrange de sa série de Taylor vérifie $0 \leq R_n(x) \leq \tan(x)$, pour x positif. On écrit alors le reste de Lagrange en utilisant l'argument d'homotopie, i.e. en ramenant l'intégrale entre 0 et a à une intégrale entre 0 et x, pour $0 < x < a < \dfrac{\pi}{2}$:

$$R_n(a) = \frac{1}{n!}\left(\frac{a}{x}\right)^{n+1}\int_0^x (x-t)^n \tan^{(n+1)}\left(t\frac{a}{x}\right)\mathrm{d}t$$

et par monotonie, il vient $0 \leq R_n(x) \leq \left(\dfrac{x}{a}\right)^{n+1} R_n(a)$ et donc

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x}{a}\right)^{n+1}\tan(a)\,.$$

D'où la convergence de la série de Taylor pour $x \in [0;\pi/2[$. Par imparité on en déduit le résultat sur $]-\pi/2;\pi/2[$.

8 4 Critère de Cauchy uniforme

Proposition 11 - 7

Critère de Cauchy uniforme

La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur A si et seulement si

$$\forall \varepsilon \in \mathbf{R}_+^*\,, \exists n \in \mathbf{N}\,, \forall p \geq n\,, \forall k \in \mathbf{N} \quad \|f_p - f_{p+k}\|_{A,\infty} \leq \varepsilon\,.$$

Avec cette remarque, on obtient une démonstration rapide du théorème de convergence normale : on vérifie qu'une série de fonctions convergeant normalement satisfait au critère de Cauchy. Or, pour une tranche de Cauchy l'inégalité triangulaire donne directement

$$\left\|\sum_{n=p}^{p+k} f_n\right\|_{A,\infty} \leq \sum_{n=p}^{p+k} \|f_n\|_{A,\infty}$$

et donc si la série $\sum \|f_n\|_{A,\infty}$ converge, elle vérifie le critère de Cauchy et donc la série $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy uniforme.

Exercices

Suites de fonctions

11 - 1 Ⓢ ★ Exemples

Étudier la convergence simple, uniforme ou uniforme sur les segments des suites de fonctions définies de la façon suivante :

a. $f_n(x) = \dfrac{x}{n(1+x^n)}$ sur $\mathbf{R}_+$,

b. $g_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^3x^2}$ sur $\mathbf{R}$,

c. $h_n = \cos\left(\dfrac{n}{n+1}x\right)$ sur $\mathbf{R}$.

11 - 2 Ⓢ ★ Exponentielle

Étudier la suite de fonctions définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f_n(x) = \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$ pour $x < n$ et nulle ailleurs.

11 - 3 Ⓢ ★★ Fonction Γ

Étudier la convergence simple, uniforme et uniforme sur les segments de la suite de fonctions définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par

$$f_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t\ .$$

11 - 4 Ⓢ ★★ Suite de polynômes

Montrer qu'une suite de fonctions polynomiales de degré borné (par N) qui converge simplement sur un compact de $\mathbf{R}$ y converge uniformément et que sa limite est également une fonction polynomiale dont le degré est inférieur à N.

11 - 5 Ⓢ ★★ Suite récurrente avec $f < \mathrm{Id}$

Soit f continue de $\mathbf{R}_+^*$ dans lui-même vérifiant

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*\,, \quad f(x) < x$$

et $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des itérées de f, i.e. $f_0 = Id_{\mathbf{R}_+}$ et $f_{n+1} = f \circ f_n$.

Montrer qu'elle converge uniformément vers 0 sur tout compact.

11 - 6 Ⓢ ★★ Thèorème de Chisholm-Young

Soit f une fonction obtenue comme limite uniforme de fonctions en escalier.

a. Montrer que f admet des limites à gauche et à droite en tout point.

b. Montrer que f est discontinue sur un ensemble au plus dénombrable.

11 - 7 Ⓢ ★★ Théorème de Dini - cas convexe ♥

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions convexes d'un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement (sur I) vers f et K un intervalle compact inclus dans I.

a. Soit g une fonction convexe et a, b, x et y dans le domaine de définition de g tels que $a < \alpha < x < y < \beta < b$. Montrer

$$\frac{g(\alpha)-g(a)}{\alpha - a} \leq \frac{g(y)-g(x)}{y-x} \leq \frac{g(b)-g(\beta)}{b-\beta}$$

et en déduire que g est lipschitzienne sur le segment $[\alpha, \beta]$.

b. En déduire que les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ainsi que f sont continues et lipschitziennes sur K.

c. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniforme sur K.

11 - 8 Ⓢ ★★★ Théorème de Dini - convergence monotone ♥

a. Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues d'un intervalle compact I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement (sur I) vers f. On suppose que f est continue et que la suite est croissante (au sens que, pour x dans I et n dans $\mathbf{N}$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$).
Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniforme sur I.

b. En déduire que la suite définie par $f_0(x) = 1$ et $f_{n+1}(x) = f_n(x) + \dfrac{1}{2}(x - f_n^2(x))$ est une suite de fonctions polynomiales sur $[0;1]$ convergeant uniformément vers $t \mapsto \sqrt{t}$.

11 - 9 Ⓢ ★★★ Approximation polynomiale de tous ordres

Soit f dans $C^1(I, \mathbf{R})$, avec I un segment.

a. Montrer qu'on peut trouver une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $P_n' \to f'$ et $P_n \to f$, les deux limites étant uniformes.

b. On suppose f de classe C^∞, montrer qu'on peut trouver une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $P_n^{(k)} \to f^{(k)}$, pour tout entier k, les limites étant uniformes.

11 - 10 Ⓢ ★★★ Théorème de Dini - cas monotone ♥

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions croissantes d'un intervalle compact I de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ convergeant simplement (sur I) vers f. On suppose que f est continue. Montrer que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est uniforme sur I.

11 - 11 Ⓢ ★★★ Fonction de Lebesgue

On construit une suite de fonctions sur $[0;1]$ par récurrence en partant de l'identité. La fonction f_{n+1} coïncide avec f_n sur les points $k/3^n$ $(0 \leq k \leq 3^n)$, est constante égale à $f_n((2k+1)/2.3^n)$ sur le segment $\left[\dfrac{3k+1}{3^{n+1}};\dfrac{3k+2}{3^{n+1}}\right]$ et est affine par morceaux.

a. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

b. Montrer que f est dérivable, de dérivée nulle, sur une réunion d'intervalles disjoints $]a_n;b_n[$ avec $\sum_n(b_n-a_n)=1$, i.e. f est dérivable presque partout de dérivée presque partout nulle.

11 - 12 ★★★ Théorème de sélection de Helly

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions croissantes de $\mathbf{R}$ dans $[0;1]$.

a. Démontrer qu'on peut extraire de $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite convergeant simplement vers une fonction f de $\mathbf{R}$ dans $[0;1]$.

Indication : On pourra faire converger une sous-suite sur tous les rationnels, puis définir $f(x)$ comme un supremum, sur tous les rationnels inférieurs à x, de $f(r)$.

b. Démontrer que si f est continue, alors la convergence de cette sous-suite est uniforme sur tout compact.

Indication : On pourra montrer qu'une fonction monotone est continue sauf peut-être sur un ensemble de points au plus dénombrable.

Séries de fonctions

11 - 13 Ⓢ ★ Interversion série-intégrale

Soit x dans $\mathbf{R}_+^*$. Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int_1^x \ln^n(t)\,\mathrm{d}t$.

11 - 14 Ⓢ ★★ Convergence uniforme

Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{x^2}{1+x^2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^n$ est absolument convergente pour tout x réel mais ne converge pas uniformément sur $[-1;1]$. Sa somme est-elle continue ?

11 - 15 Ⓢ ★★ Étude de fonction ♥

a. Montrer que $\displaystyle\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+x}}$ est bien définie sur $\mathbf{R}_+^*$.

b. Montrer qu'elle est de classe C^1 et étudier ses variations. Préciser ses limites en 0 et $+\infty$.

c. Donner un équivalent simple en 0^+.

d. Simplifier $f(x)+f(x+1)$, où f désigne la somme de la série, et en déduire un équivalent simple en $+\infty$.

11 - 16 Ⓢ C 2017 ★★ Étude de fonction ♥

On note $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

a. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbf{R}$.

b. Montrer que f y est de classe C^1.

c. Déterminer $\lim\limits_{\infty} f$.

11 - 17 Ⓢ ★★ Étude de fonction

a. Étudier $\sum_{n\geq1}\dfrac{x^n}{n}\sin(nx)$.

b. Pour quelles valeurs de x peut-on dériver la somme de cette série de fonctions ?

c. Calculer les sommes de cette série et de sa série dérivée.

11 - 18 Ⓢ ★★ Fonction ζ de Riemann

Soit ζ et L les fonctions définies comme sommes des séries $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{1}{n^x}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^n}{n^x}$.

a. Donner le domaine de définition de ζ et L, et en étudier la continuité.

b. Établir une relation entre ces deux fonctions valide pour $x>1$.

c. Calculer $L(1)$ et en déduire un équivalent de ζ en 1^+.

11 - 19 Ⓢ ★★ Équation différentielle

Soit $k\in\mathbf{R}$. Résoudre $y''+k^2y=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n^2}$.

11 - 20 Ⓢ ★★★ Étude de fonction

a. Étudier la fonction définie comme somme de la série $\displaystyle\sum\frac{x}{n(1+nx^2)}$. On donnera en particulier la régularité de la fonction et des équivalents aux bornes de l'intervalle de définition.

b. En déduire l'étude de la fonction somme de $\displaystyle\sum\frac{x^3}{(1+nx^2)(2+nx^2)}$.

11 - 21 Ⓢ ★★★ Produit de Wallis

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions définies sur un segment I. On lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ donnée par $p_n=\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1+u_k)$ ainsi que, si les fonctions sont de classe C^1, la série $\sum v_n$ donnée par $v_n=\dfrac{u_n'}{1+u_n}$.

a. Montrer que si $\sum u_n$ converge normalement sur I, alors p_n converge uniformément sur I. On note p cette fonction et on écrit $p=\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1+u_n)$.

b. Montrer que si, de plus, $\sum v_n$ converge normalement sur I, alors p_n converge vers une fonction de classe C^1 et $p' = p\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

c. Donner la décomposition primaire dans $\mathbf{R}[X]$ de $\operatorname{Im}\left[\left(1+\frac{iX}{2n}\right)^{2n}\right]$, pour n dans $\mathbf{N}^*$.

d. En déduire, pour x dans $\mathbf{R}\setminus\pi\mathbf{Z}$,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$$

$$\text{et}\quad \cot(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi^2}\ .$$

Séries entières

11 - 22 Ⓢ ★ Exemples

Déterminer pour quelles valeurs de z les séries suivantes sont absolument convergentes.

$$\sum n^3 z^n\ ,\quad \sum \frac{2^n}{n!}z^n\ ,\quad \sum \frac{2^n}{n^2}z^n\ ,\quad \sum \frac{n^3}{3^n}z^n\ .$$

11 - 23 Ⓢ ★ Série des produits

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. Que dire du rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$?

11 - 24 Ⓢ ★ Même rayon

Montrer que les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{n}{n^2-n+2}a_n z^n$ ont même rayon de convergence.

11 - 25 Ⓢ MT 2017 ★ Série harmonique

On note $H_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ et on s'intéresse à $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{H_n}{2^n}$.

Montrer son existence puis la calculer. On pourra introduire une série entière.

11 - 26 Ⓢ ★ Écriture décimale

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum t^{a_n} z^n$ les séries entières données par a_n le nombre de chiffres de n dans son écriture décimale et t dans $\mathbf{R}_+^*$. Donner leurs rayons de convergence.

11 - 27 Ⓢ ★★ Calculs explicites

Calculer $\sum_{n=0}^{\infty}(n^3-2n^2+n)z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3-1}{n!}z^n$.

11 - 28 Ⓢ ★★★ Logarithme complexe

Soit D un ouvert connexe par arcs de $\mathbf{C}$. On appelle détermination continue du logarithme dans D toute application continue φ de D dans $\mathbf{C}$ telle que $\exp\circ\varphi = \mathrm{Id}$.

a. Soit φ une telle détermination. Montrer que toute détermination continue du logarithme sur D est de la forme $\varphi + 2ik\pi$, avec k dans $\mathbf{Z}$.

b. Montrer que, si D contient $\mathbf{U}$, alors une telle détermination n'existe pas.

c. On prend $D = \mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$ et on pose, pour z dans D et $x\in[0;1]$, $f_z(x) = 1-x+xz$. Montrer que φ, définie par $\varphi(z) = \int_0^1 \frac{f_z'(t)}{f_z(t)}\,\mathrm{d}t$, est une détermination continue du logarithme sur D et montrer que, pour $|z|<1$, on a

$$\varphi(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{n+1}}{n+1}\ .$$

d. Déduire de ce qui précède une détermination continue de $\operatorname{Arg}(z)$ et de $\sqrt{z}$ sur $\mathbf{C}\setminus\mathbf{R}_-$.

11 - 29 Ⓢ ★★★ Inverse

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière telle que $a_0 = 1$ et, pour $n\geq 1$, $|a_n|\leq 1$.

a. Montrer que son rayon de convergence est supérieur à 1 et que sa somme, f, ne s'annule pas sur $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[$.

b. Montrer qu'il existe une série entière $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence supérieur à $1/2$ dont le produit de Cauchy avec $\sum a_n x^n$ est 1.

c. En déduire que $1/f$ est développable en série entière en 0.

Séries entières d'une variable réelle

11 - 30 Ⓢ ★ Nombres de Stirling

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, G sa fonction génératrice et m_k ses éventuels moments d'ordre k.

a. On note S_n^k les nombres de Stirling de première espèce, i.e. pour tous entiers n et k avec $k\leq n$, $X(X-1)\cdots(X-n+1) = \sum_{k=0}^{n} S_n^k X^k$. Montrer que, sous réserve d'existence, on a $G^{(n)}(1) = \sum_{k=0}^{n} S_n^k m_k$ et en déduire une expression de $G^{(4)}(1)$.

b. On note s_n^k les nombres de Stirling de deuxième espèce, i.e. pour tous entiers n et k avec $k\leq n$, $X^n = \sum_{k=0}^{n} s_n^k X(X-1)\cdots(X-k+1)$. Montrer que, sous réserve d'existence, on a $m_n = \sum_{k=0}^{n} s_n^k G^{(k)}(1)$ et en déduire une expression de m_4.

11 - 31 Ⓢ ★ **Binôme**

Étudier la convergence en -1 et 1 du développement en série entière de $(1+x)^\alpha$.

11 - 32 Ⓢ ★★ **Calculs de séries classiques ♥**

Utiliser des séries entières pour obtenir des valeurs simples de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n+1}$.

11 - 33 Ⓢ ★★ **Exemples**

Donner le développement en série entière des fonctions suivantes (s'il existe) :

a. $\dfrac{1}{1-2x\,\mathrm{ch}(\alpha)+x^2}$

b. $\dfrac{1}{1+x^2}\ln(1+x)$

c. $(x+\sqrt{1+x^2})^k$ $(k \in \mathbf{N})$

d. $\dfrac{\sin(4x)}{\sin(x)}$

e. $(1+x^2)^{\alpha/2}\cos(\alpha\arctan(x))$ $(\alpha \in \mathbf{R})$.

11 - 34 Ⓢ ★★ **Logarithmes**

Rayon de convergence et calcul de $\displaystyle\sum_{n\geq 3} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$.

11 - 35 Ⓢ ★★ **Fonctions trigonométriques**

Rayon de convergence et calcul de $\displaystyle\sum \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n!}$.

11 - 36 Ⓢ ★★ **Fonctions trigonométriques**

Rayon de convergence et simplification de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\alpha)x^n}{n}$.

11 - 37 Ⓢ ★★ **Arcsinus**

Donner le développement en série entière de arcsin au voisinage de 0 et en étudier la convergence en -1 et 1.

11 - 38 Ⓢ ★★ **Variable de Poisson**

Soit X une variable aléatoire avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et G sa fonction génératrice.

a. Montrer, pour $t \geq 1$ et a réel, $\mathbf{P}(X \geq a) \leq \dfrac{G(t)}{t^a}$.

b. En déduire $\mathbf{P}(X \geq 2\lambda) \leq \left(\dfrac{e}{4}\right)^\lambda$ et comparer avec la majoration fournie par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

11 - 39 Ⓢ ★★ **Seconde fonction génératrice**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ et G sa fonction génératrice. On note H la somme de la série entière $\sum \mathbf{P}(X > n)\, t^n$.

a. Montrer que H est définie sur $]-1;1[$.

b. Montrer, pour $t \in]-1;1[$, $H(t) = \dfrac{1-G(t)}{1-t}$.

11 - 40 Ⓢ ★★ **Équation diophantienne ♥**

Soit a_n le nombre de couples (x,y) d'entiers naturels tels que $x+5y=n$. Développer en série entière la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1-t)(1-t^5)}$ et en déduire a_n.

11 - 41 Ⓢ ★★ **Équation différentielle**

Déterminer les solutions développables en série entière (en 0) de l'équation différentielle $(x^2-x)y''+(x+4)y'-y=0$.

11 - 42 Ⓢ ★★ **Système différentiel linéaire**

Résoudre le système différentiel :

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x^2+1)y' & = & xy+z+2x^2-1 \\ (x^2+1)z' & = & y-xz+3x\ . \end{array}\right.$$

On pourra rechercher des solutions développables en série entière.

11 - 43 Ⓢ **Mines MP 2000** ★★ **Équation différentielle**

Résoudre (E) : $4xy''+2y'+y=0$ sachant que (E) admet deux solutions y et z telles que $yz=1$. Comment résoudre cette équation sans l'indication ?

11 - 44 ★★ **Équations différentielles scalaires**

Chercher les solutions développables en série entière des équations suivantes, puis les résoudre complètement.

a. $4xy''-2y'+9x^2y=0$.

b. $xy''+2y'-xy=0$.

c. $4xy''+2y'-y=0$.

d. $y''+xy'+3y=0$.

e. $x^2y''+6xy'+(6-x^2)y=-1$.

f. $x(x-1)y''+3xy'+y=0$.

11 - 45 ★★★ **Rayon de convergence nul**

a. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\cos(2^n x)}{n!}$ ainsi que toutes ses dérivées converge uniformément sur $\mathbf{R}$.

b. Montrer que sa série de Taylor en 0 est donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{2^{2n}}}{(2n)!} x^{2n}$ et que son rayon de convergence est nul.

c. Pourtant le calcul des deux premiers termes est utile pour évaluer $f(0,01)$. Pourquoi ?

11 - 46 Ⓢ ★★★ **Théorème d'Abel ♥**

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle et ρ son rayon de convergence, avec $\rho > 0$. Soit x_0 tel que $|x_0| = \rho$ et $\sum a_n x_0^n$ converge. On désire démontrer le théorème d'Abel : en notant f la somme de la série entière, la limite (à gauche ou à droite) de f en x_0 est égale à $f(x_0)$.

a. On suppose $\rho = x_0 = 1$ et on note $f_n(x)$ la somme partielle $a_0 + \cdots + a_n x^n$. Montrer que, pour n et k entiers naturels, $f_{n+k}(x) - f_n(x)$ est égal à

$$\sum_{p=n+1}^{n+k} a_p x^{n+k} + \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{p=n+1}^{n+j} a_p (x^{n+j} - x^{n+j+1}) \ .$$

b. Conclure dans le cas $\rho = x_0 = 1$ puis dans le cas général.

c. En déduire que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent ainsi que leur produit de Cauchy, alors la somme de leur produit de Cauchy est égale au produit de leurs sommes.

d. En déduire également que si $\sum a_n x^n$ est une série entière de somme f, alors l'identité

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

est valide dès que le terme de droite converge.

11 - 47 Ⓢ **Magistère 2018** ★★★ **Étude asymptotique**

On définit, pour n dans $\mathbf{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$ et $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$.

a. Calculer le rayon de convergence de cette série entière.

b. Montrer $\lim a_n = \ln(2)$.

c. Calculer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} f(x)$ et en déduire un équivalent de f en $+\infty$.