CHAPITRE

2 Espaces vectoriels

Hermann Günther GRASSMANN (1809–1877) est, avec Niels ABEL, Évariste GALOIS et Georg CANTOR, l'un des grands mathématiciens « malheureux » du XIX^{e} siècle. Il est considéré comme le fondateur du calcul tensoriel et de la théorie des espaces vectoriels.

En 1839, dans sa thèse *Théorie des flots et des marées*, GRASSMANN utilise des méthodes vectorielles. Mais cette thèse n'est pas lue par son examinateur et ne sera publiée qu'en 1911. Il y définit pourtant la somme de deux vecteurs dans l'espace, leur déterminant (comme l'aire de la surface orientée du parallélogramme qu'ils engendrent), le déterminant de trois vecteurs de l'espace (comme volume). Ce calcul vectoriel lui permet de simplifier les calculs de LAGRANGE parus dans sa *Mécanique analytique.*

« La première impulsion est venue de considération sur la signification des nombres négatifs en géométrie. Habitué à voir AB comme une longueur, j'étais néanmoins convaincu que $AB = AC + CB$, quelle que soit la position de A, B et C sur une droite. »

En 1844, dans son *Die Lineale Ausdehnungslehre*, il développe l'idée d'une structure algébrique dans laquelle les symboles représentant des quantités (points, droites, plans) sont régis par des règles et dégage une structure générale : l'algèbre linéaire prend véritablement naissance dans cet ouvrage. Il y définit le produit scalaire et le produit extérieur (généralisation du produit vectoriel). Il y dénonce aussi le piège de la confusion entre nombre et grandeur. Bien trop en avance sur son temps, abstrait et assez mal écrit, ce livre demeure, de fait, ignoré pendant quinze ans.

Il anticipe le calcul barycentrique de MÖBIUS, allant plus loin que lui dans la formalisation de la multiplication d'un scalaire par un vecteur :

« le rectangle est réellement le vrai produit de deux longueurs. » Il en résulte une idée neuve qui fonde la théorie des espaces vectoriels et plus précisément de l'algèbre extérieure.

Programme

- Rappels de première année : espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels, famille de vecteurs, somme de deux sous-espace ; espaces de dimension finie : existence de bases, dimension d'un espace de dimension finie, sous-espaces et dimension ; applications linéaires : généralités, endomorphismes, détermination d'une application linéaire, théorème du rang, formes linéaires et hyperplans ; sous-espaces affines d'un espace vectoriel.
- Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Projecteurs associés à une décomposition en somme directe.
- Si $F_1, \dots, F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$

  avec égalité si et seulement si la somme est directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.
- Si $E_1, \dots, E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe un et un seul u dans $\mathscr{L}(E, F)$ tel que $u_{|E_i} = u_i$ pour tout i.
- Algèbre (les algèbres sont unitaires). Exemples : $\mathbf{K}[X]$, $\mathrm{End}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{F}(X, \mathbf{K})$. Sous-algèbre. Morphisme d'algèbre.
- Matrices définies par blocs. Interprétation géométrique des blocs.
- Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition). La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible.
- Transvection par blocs. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

1 Rappels

Cette section reprend le cours de première année et en étend brièvement le formalisme, dans l'esprit des travaux fondateurs de Grassmann et Peano.

La notion d'espace vectoriel a germé dans les travaux de Hermann Günther Grassmann (1809–1877) et a été formalisée par Giuseppe Peano (1858–1932).

Définition 2 - 1

Espace vectoriel – Grassmann, Peano

Un **espace vectoriel** E sur un corps $\mathbf{K}$ est un groupe abélien pour une loi notée $+$, muni d'une loi externe de $\mathbf{K}$ sur E, notée $\star$, qui est distributive par rapport à $+$, associative au sens suivant :

$$\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \star (\mu \star x) = (\lambda \cdot \mu) x$$

et compatible avec l'élément neutre de $\mathbf{K}$ (noté 1) : $\forall x \in \mathbf{K}$, $1 \star x = x$.

Exemple 2 - 1

L'ensemble des solutions d'un problème linéaire (équation différentielle linéaire, suite récurrente linéaire etc.) forme un espace vectoriel.

Exemples 2 - 2

Espaces vectoriels de référence

La notion de corps inclut celle d'espace vectoriel et ainsi $\mathbf{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Plus généralement un produit cartésien est muni d'une structure vectorielle par multiplication coordonnée par coordonnée. Ainsi $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}[X]$, $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels. Il en va de même pour $\mathbf{K}^I$ si I est un ensemble quelconque.

Le sous-espace $\{0\}$ est un sous-espace vectoriel minimal de E : il est inclus dans tout sous-espace vectoriel de E. De même E est un sous-espace vectoriel maximal de E. Tout sous-espace vectoriel distinct de $\{0\}$ et E est dit non-trivial.

Définition 2 - 2

Sous-espace vectoriel

Un **sous-espace vectoriel** de E est une partie F de E qui, munie des birestrictions des lois de $(E, +, \star)$, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Exemples 2 - 3

Sous-espaces vectoriels

Les sous-espaces vectoriels non-triviaux du plan $\mathbf{K}^2$ sont des droites vectorielles. Ceux de l'espace $\mathbf{K}^3$ sont des droites et des plans vectoriels. Les parties $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ sont des sous-espaces vectoriels respectivement de $\mathbf{K}[X]$ et $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Si I est un intervalle de $\mathbf{R}$, $C^0(I, \mathbf{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^I$.

Définition 2 - 3

Application linéaire

Une **application linéaire** est un morphisme d'espaces vectoriels, i.e. une application respectant la structure de $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Exemples 2 - 4

Sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Si E et F sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, l'ensemble $\mathscr{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est également un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Si u appartient à $\mathscr{L}(E, F)$ on note $\mathrm{Ker}(u)$ le **noyau** de u, i.e. $u^{-1}(0)$, et $\mathrm{Im}(u)$ son **image**, i.e. $u(E)$. Si E' et F' sont des sous-espaces vectoriels respectivement de E et F, $u(E')$ et $u^{-1}(F')$ sont des espaces vectoriels. Si $F = \mathbf{K}$, u est appelée **forme linéaire** et si elle est non nulle son noyau est appelé **hyperplan** de E.

Définition 2 - 4

Sous-espace affine

Un sous-espace affine d'un espace vectoriel E est un ensemble de la forme $x_0 + F$ avec $x_0 \in E$ et F un sous-espace vectoriel de E, appelé direction du sous-espace affine. On note $x_0 + F$ ce sous-espace affine.

Remarque 2 - 1

La direction F est unique, mais le point x_0 peut être pris quelconque dans l'espace affine. On a $x_0 + F = x_1 + F \iff x_1 - x_0 \in F$.

Remarque 2 - 2

Points et vecteurs
On identifie les vecteurs de E aux points de l'espace affine sous-jacent. Il est d'usage de noter avec une lettre majuscule les points et une lettre minuscule les vecteurs.

Définition 2 - 5

Translation
Soit u dans E. L'application $x \mapsto x+u$ de E dans E est appelée translation de vecteur u. Ainsi un sous-espace affine peut se définir comme l'ensemble des translatés d'un point A fixé, par un vecteur quelconque u de la direction du sous-espace affine. On a $B = A + u$ ou encore $B - A = u$.

Exemples 2 - 5

Sous-espaces affines de référence
Les sous-espaces affines du plan $\mathbf{R}^2$ sont $\mathbf{R}^2$ lui-même, ses points et les droites affines de la forme (AB) avec A et B deux points distincts du plan, i.e. $A + \mathrm{V}ect\left(\vec{AB}\right)$. Les points de la droite (AB) sont donc de la forme $A + t\vec{AB}$ avec t réel, i.e. $A + t(B-A)$ ou encore $(1-t)A + tB$.

Les sous-espaces affines de $\mathbf{R}^3$ sont $\mathbf{R}^3$ lui-même, ses points, des droites affines comme ci-dessus, et les plans affines (ABC) avec A, B et C non alignés, i.e. avec $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ indépendants. Les points d'un tel plan sont de la forme $(1-t-u)A + tB + uC$ avec t et u réels, ou encore $\alpha A + \beta B + \gamma C$ avec α, β, γ réels de somme 1.

Les solutions d'un système d'équations linéaires avec second membre forment un ensemble vide ou un sous-espace affine dirigé par l'espace des solutions du système sans second membre. Il en va de même *mutatis mutandis* pour les équations différentielles d'ordre 1 ou 2 avec second membre, ou encore les suites récurrentes linéaires avec second membre, comme par exemple les suites arithmético-géométriques.

Remarque 2 - 3

Composition des applications linéaires
La composée de deux applications linéaires en est une, de même que la réciproque d'un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective). Une application linéaire u est injective si et seulement si son noyau $\mathrm{Ker}(u)$ est réduit à $\{0\}$.

Remarque 2 - 4

Produit de composition et produit matriciel
L'application $(u, v) \mapsto u \circ v$ est bilinéaire. La linéarité à gauche est tautologique tandis que la linéarité à droite résulte de la définition d'application linéaire.

Pour A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ l'application $X \mapsto AX$ de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ est linéaire. La composée de deux telles applications associées respectivement à A et B est donnée par le produit matriciel, qui est donc bilinéaire et associatif.

On étend aux familles les objets introduits pour les ensembles finies : intersection quelconque, combinaison linéaire.

Remarque 2 - 5

Intersection

Une intersection quelconque de sous-espaces vectoriels de E en est un.

Une intersection quelconque de sous-espaces affines de E est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines.

Définition 2 - 6

Soit I un ensemble quelconque d'indices, on appelle **famille à support fini** de scalaires indexée par I toute famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$, i.e. telle que $\{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$ est fini. Cet ensemble est le support de la famille $(\lambda_i)_{i\in I}$. On note $\mathbf{K}^{(I)}$ leur ensemble.

Propriété 2 - 1

Combinaison linéaire

Soit $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ une famille de scalaires de support fini S et $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille de vecteurs de E. Alors pour toute partie finie J de I contenant S, on a $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i = \sum_{i\in S} \lambda_i x_i$, i.e. la quantité $\sum_{i\in J} \lambda_i x_i$ ne dépend pas de J. On la note $\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ et on dit que c'est une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$.

Pour toute famille $(x_i)_{i\in I}$ de E^I, on a une application linéaire canonique de $\mathbf{K}^{(I)}$ dans E donnée par $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \sum_{i\in I} \lambda_i x_i$.

Propriété 2 - 2

Caractérisation des applications linéaires

Une application entre $\mathbf{K}$-espaces vectoriels est linéaire si et seulement si elle préserve les combinaisons linéaires, ce qui peut se réduire à l'une des deux assertions suivantes : $\forall \lambda \in \mathbf{K}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $(u(\lambda x) = \lambda u(x)) \wedge (u(x+y) = u(x)+u(y))$ ou encore $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall (x, y) \in E^2$, $u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$.

La notion de combinaison linéaire est la notion clef en algèbre linéaire. Elle permet notamment de décrirer les sous-espaces vectoriels.

Propriété 2 - 3

Espace engendré

Soit $A \in \mathscr{P}(E)$ où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. L'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E contenant A est un sous-espace vectoriel de E contenant A et c'est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace vectoriel de E contenant A. On le note indifféremment $\mathrm{V}ect\,(A)$, $\langle A \rangle$ ou $\mathrm{V}ect\,(a)_{a\in A}$ et, si $A = \{x_i \mid i \in I\}$, on le note également $\mathrm{V}ect\,(x_i)_{i\in I}$. On a

$$x \in \mathrm{V}ect\,(A) \Leftrightarrow \exists (\lambda_a)_{a\in A} \in \mathbf{K}^{(A)}\,, \quad x = \sum_{a\in A} \lambda_a a\,.$$

On en déduit quatre caractérisations (au moins) des sous-espaces vectoriels.

Propriété 2 - 4

Une partie F de E en est un **sous-espace vectoriel** si et seulement si $F = \mathrm{V}ect\,(F)$. On en déduit les caractérisations suivantes :

— $\forall(\lambda_x)_{x\in F} \in \mathbf{K}^{(F)}$, $\sum_{x\in F} \lambda_x x \in F$ (avec la convention qu'une somme vide est égale à 0) ;

— $0 \in F$ et $\forall\lambda \in \mathbf{K}$, $\forall(x,y) \in F^2$, $\lambda x \in F \wedge x+y \in F$;

— $0 \in F$ et $\forall\lambda \in \mathbf{K}$, $\forall(x,y) \in F^2$, $\lambda x + y \in F$;

— $0 \in F$ et $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, $\forall(x,y) \in F^2$, $\lambda x + \mu y \in F$.

La notion de combinaison linéaire, une famille étant fixée, permet de décrire des vecteurs de E à partir de familles de scalaires. La nature de cette description, selon qu'elle permet de décrire tous les vecteurs, de façon unique ou non, est une notion cruciale et amène à la définition des propriétés les plus importantes des familles de vecteurs.

Définition 2 - 7

Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Si l'application canonique de $\mathbf{K}^{(I)}$ dans E donnée par $(\lambda_i)_{i\in I} \mapsto \displaystyle\sum_{i\in I} \lambda_i x_i$ est injective, surjective, bijective, on dit qu'on a affaire à une **famille libre**, une **famille génératrice** ou une **base** respectivement.

Propriété 2 - 5

Image d'une famille

L'image d'une base de E, ou plus généralement d'une famille génératrice, par une application linéaire u dans $\mathscr{L}(E,F)$ engendre $\mathrm{Im}(u)$. De plus u est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Réciproquement une application d'une base de E dans F étant donnée, il existe une et une seule application linéaire dans $\mathscr{L}(E,F)$ la prolongeant.

Exemples 2 - 6

Base canonique

L'espace nul admet $\emptyset$ comme base et $\mathbf{K}$ admet $\{1\}$ comme base en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Elle est appelée base canonique. Plus généralement la base canonique d'un espace produit est obtenu par produit cartésien. Ainsi les bases canoniques de $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}_n[X]$ et $\mathbf{K}[X]$ sont respectivement $((\delta_{ij})_{1\leq j\leq n})_{1\leq i\leq n}$, $(E_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$, $(X^k)_{0\leq k\leq n}$ et $(X^k)_{k\in\mathbf{N}}$.

Définition 2 - 8

Formes coordonnées

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel et $(e_i)_{i\in I}$ en est une base. Les formes coordonnées associées à cette base sont les formes linéaires $(e_i^*)_{i\in I}$ uniquement déterminées par les conditions $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Les formes linéaires $(e_i^*)_{i\in I}$ constituent une base de $\mathscr{L}(E,\mathbf{K})$.

♠

L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,\mathbf{K})$, appelé dual de E, est aussi noté E^*.

Définition 2 - 9

Hyperplans et codimension

Si E est un espace de dimension finie n et H un hyperplan obtenu comme $\mathrm{Ker}(u)$, où u est une forme linéaire, une décomposition $\sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*$ de u correspond à une équation $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ de H, relativement à la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$. Pour H donné, il n'y a pas unicité de u et donc pas non plus de l'équation, mais il y a unicité à multiplication par un scalaire non nul près.

Un hyperplan H de E est un sous-espace vectoriel de codimension 1, i.e. $\dim(E) - \dim(H) = 1$. Plus généralement si $\dim(E) - \dim(F) = m$, on dit que F est de codimension m.

L'intersection de m hyperplans est un espace de codimension au plus m et, réciproquement, tout espace de codimension m est intersection de m hyperplans. Un tel espace est donc défini par un système de m équations (non unique).

♠

La codimension de F peut se définir même si E est de dimension infinie, c'est alors la dimension de l'espace vectoriel quotient E/F. Elle correspond au nombre d'équations nécessaires pour définir F.

Définition 2 - 10

Applications linéaires, bases et matrices

Étant donné deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies E et F et deux bases (e) et (f) de E et F respectivement, avec $(e) = (e_j)_{1\leq j\leq q}$ et $(f) = (f_i)_{1\leq i\leq p}$ une application linéaire entre E et F correspond de façon unique à une matrice $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$ dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ telle que, pour tout x dans E on ait $u(x) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij} e_j^*(x) f_i$.

La matrice précédente est appelée matrice de u relativement aux bases (e) et (f) et notée $\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$. Ainsi le vecteur de coordonnées $(x_i)_{1\leq i\leq q}$ dans (e) a pour image le vecteur de coordonnées $(\sum_{j=1}^{q} a_{ij} x_j)_{1\leq i\leq p}$ dans (f).

L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Remarque 2 - 6

La composition entre applications linéaires correspond à la multiplication matricielle. Si $E = F$ et $(e) = (f)$, on écrit $\mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ et l'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$ est un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres entre $\mathrm{End}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Aparté

On écrit aussi $\mathrm{Mat}(u; (e), (f))$ ou $\mathrm{Mat}_{(f)}^{(e)}(u)$, ainsi que $u = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} a_{ij} e_j^* \otimes f_i$ et on a $\mathscr{L}(E,F) \simeq E^* \otimes F$. Les trois dernières écritures rappellent que la dépendance en E est **contravariante** alors que celle en F est **covariante**. La matrice de $e_j^* \otimes f_i$ est la matrice E_{ij} de la base canonique, i.e. $a_{ij} = E_{ij}^*(\mathrm{Mat}_{(e),(f)}(u))$.

Définition 2 - 11

Application linéaire canoniquement associée à une matrice

À M dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ on associe canoniquement l'application linéaire de $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,1}$ donnée par $X \mapsto MX$. Sa matrice relativement aux bases canoniques est alors M. Le noyau et l'image de M sont ceux de l'application linéaire associée.

On peut également identifier canoniquement $\mathscr{M}_{q,1}(\mathbf{K})$ à $\mathbf{K}^q$ et $\mathscr{M}_{p,1}$ à $\mathbf{K}^p$, puisque ce sont des espaces de mêmes dimensions et admettant chacun une base canonique. Ainsi M est également canoniquement associée à une application linéaire de $\mathbf{K}^q$ dans $\mathbf{K}^p$.

La notion de base est fondamentale en algèbre linéaire. Le travail de Grassmann a justement été de permettre de ne pas travailler avec une seule base, i.e. de se détacher du modèle de $\mathbf{K}^n$, pour pouvoir *choisir* des bases adaptées à chaque problème.

Théorème 2 - 1

Lemme fondamental de la théorie de la dimension

Soit $(x_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E et $(y_j)_{j \in J}$ une famille finie de vecteurs, tous combinaisons linéaires des (x_i) avec $\operatorname{Card} J > \operatorname{Card}(I)$. Alors la famille (y_j) est liée.

Théorème 2 - 2

Dimension

Un espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il admet une famille génératrice finie. Tout tel espace admet une base et toutes ses bases ont un même cardinal fini.

Plus précisément on a le résultat suivant, valide en toute dimension, et conséquence des mêmes arguments.

Théorème 2 - 3

Base incomplète et base extraite

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, L une famille libre dans E et G une famille génératrice de E, vérifiant $L \subset G$. Alors il existe une base B de E vérifiant $L \subset B \subset G$. En particulier pour $G = E$, cela permet de compléter toute famille libre en une base et, pour $L = \emptyset$, cela permet d'extraire une base de toute famille génératrice.

Stricto sensu le théorème de la base incomplète est le cas $G = E$, celui de la base extraite est le cas $L = \emptyset$ et celui de l'existence de base le cas $L = \emptyset$ et $G = E$.

♠

Un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie est dit de dimension infinie. Un tel espace admet également une base et toutes ses bases sont de cardinal infini. Le théorème précédent est encore vrai en dimension infinie.

Le résultat en dimension infinie résulte, comme en dimension finie, de l'existence d'élément maximal parmi les familles libres ou, comme on voudra, de l'existence d'élément minimal parmi les familles génératrices. En dimension finie la maximalité ou la minimalité s'expriment en termes de cardinaux (finis) et l'existence de base résulte du lemme fondamental de la théorie de la dimension.

Exemples 2 - 7

Dimensions de référence

La dimension d'un produit d'espaces vectoriels (de dimensions finies) est la somme de leurs dimensions. Ainsi les espaces $\mathbf{K}^n$, $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}_n[X]$ sont de dimensions respectives n, n^2, np et $n+1$.

L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre n (sous forme résolue) est un espace vectoriel de dimension n. Il en va de même pour l'ensemble des suites satisfaisant une relation de récurrence linéaire homogène (à coefficients constants) d'ordre n.

Définition 2 - 12

Rang d'une famille de vecteurs

La dimension de l'espace engendré par une famille de vecteurs est appelé rang de la famille. Le rang est inférieur à la fois au cardinal de la famille et à la dimension de l'espace ambiant.

Définition 2 - 13

Rang d'une application linéaire ou d'une matrice

Le rang d'une application linéaire u, noté $\mathrm{rg}(u)$ est la dimension de $\mathrm{Im}(u)$, i.e. le rang de l'image d'une base par u. Le rang est invariant par composition (à gauche comme à droite) par un isomorphisme.

Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire canoniquement associée ou, ce qui revient au même, au rang de la famille de ses vecteurs colonnes.

Le rang est en particulier invariant par pré-composition ou post-composition par une application linéaire bijective. Matriciellement il est donc invariant par multiplication par une matrice inversible.

Propriété 2 - 6

Caractérisation par la dimension

Dans un espace vectoriel E de dimension finie n, une famille de cardinal n est une base si et seulement si elle est libre ou génératrice. De plus tout sous-espace vectoriel de E est de dimension inférieure à n et E est le seul sous-espace de dimension exactement n.

Soit u une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Alors u est bijective si et seulement si elle est injective (i.e. $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$) et si et seulement si elle est surjective. En particulier un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est inversible à droite si et seulement s'il l'est à gauche ou encore est inversible.

Il existe un unique $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie n donnée, à isomorphisme près.

Théorème 2 - 4

Existence de supplémentaire

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace de E. Alors il existe au moins un sous-espace G de E tel que $E = F \oplus G$. On dit alors que G est un supplémentaire de F dans E.

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires si et seulement si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0\}$.

C'est une conséquence directe du théorème de la base incomplète. En particulier

♠

Ce résultat est encore valide en dimension infinie.

Théorème 2 - 5

Théorème du rang

Soit u dans $\mathscr{L}(E,F)$, avec E et F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, et E' un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Alors

$$u_{|E'} \ : \ E' \simeq \mathrm{Im}(u) \ .$$

En particulier, en dimension finie, on a $\mathrm{rg}(u) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(u))$.

Exemple 2 - 8

Isomorphisme entre supplémentaires

Soit F un sous-espace vectoriel de E et G_1 et G_2 deux supplémentaires de F, de sorte qu'on a $E = F \oplus G_1$ et $E = F \oplus G_2$. Soit p le projecteur canonique sur G_1 associé à la décomposition $E = F \oplus G_1$, i.e. le projecteur sur G_1 parallèlement à F. Alors p induit, par restriction à G_2 un isomorphisme de G_2 sur G_1.

En effet $\mathrm{Ker}(p) = F$ et G_2 en est un supplémentaire, tandis que $\mathrm{Im}(u) = G_1$.

Danger

Ne pas confondre les mots supplémentaire et complémentaire : un supplémentaire est un espace vectoriel tandis que le complémentaire est un ensemble.

Il n'y a pas unicité d'un supplémentaire de F, par exemple parce qu'il n'y a pas unicité de la façon de compléter une base de F en une base de E.

Exemple 2 - 9

Formule de Grassmann

Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel. On a $\dim(E \times F) = \dim(E \cap F) + \dim(E + F)$ ou encore

$$\dim(E + F) + \dim(E \cap F) = \dim(E) + \dim(F) \ .$$

Exemple 2 - 10

Endomorphismes remarquables

Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathrm{End}(E)$, i.e. $\mathscr{L}(E,E)$, est une $\mathbf{K}$-algèbre. Ses éléments sont appelés endomorphismes de E. Les endomorphismes scalaires sont les multiples de l'identité, elle-même notée Id_E. L'application $\lambda \mathrm{Id}_E$ est appelée **homothétie** de rapport λ. L'algèbre $\mathrm{End}(E)$ n'est pas commutative, sauf en dimension inférieure à 1, et son centre (i.e. l'ensemble des endomorphismes commutant à tous les autres) est formé des homothéties.

Si $E = F \oplus G$, le **projecteur** sur F parallèlement à G est l'unique endomorphisme dont la bi-restriction à F est l'identité et celle à G est l'endomorphisme nul. On le note p_F^G et on parle aussi de projection sur F parallèlement à G. Géométriquement, pour x dans E, le projeté $p_F^G(x)$ est l'unique point d'intersection de F avec l'espace affine passant par x de direction G, i.e. $(x+G) \cap F = \left\{p_F^G(x)\right\}$. Un endomorphisme p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$ et alors c'est un projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

La **symétrie** par rapport à F et parallèlement à G est l'isomorphisme s_F^G donné par $s_F^G = 2p_F^G - \mathrm{Id}_E$, i.e. sa birestriction à F est Id_F et celle à G est $-\mathrm{Id}_G$. Le symétrique $s_F^G(x)$ est l'unique point de E tel que le milieu de x et $s_F^G(x)$ soit $p_F^G(x)$. Un endomorphisme s est une symétrie si et seulement si c'est une involution, i.e. $s^2 = \mathrm{Id}_E$, et alors c'est un symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Proposition 2 - 1

Systèmes linéaires

Un système linéaire peut s'écrire sous la forme $AX = B$ avec A et B fixés respectivement dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et où l'inconnue X est cherchée dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$.

Le système est dit homogène si $B = 0$ et alors l'ensemble des solutions est un espace vectoriel, à savoir le noyau de A. Quand B n'est pas nul, le système admet des solutions si et seulement si B appartient à l'image de A et dans ce cas l'ensemble des solutions forme un sous-espace affine de direction $\mathrm{Ker}(A)$. On appelle rang du système le rang de A et si $n = p$ et A est inversible, le système est dit de Cramer et admet une unique solution donnée par $A^{-1}B$.

Pour clore ces rappels, on donne quelques propriétés du rang.

Proposition 2 - 2

Composition et rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$ des applications linéaires de rangs finis. On a

— $\mathrm{rg}(v \circ u) \leq \min(\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v))$

— si v est injective, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(u)$

— si u est surjective, $\mathrm{rg}(v \circ u) = \mathrm{rg}(v)$.

En particulier la composition à gauche ou à droite par une application linéaire bijective ne modifie pas le rang.

2 Sommes directes

L'intersection est, on l'a vu, compatible à la notion de sous-espace vectoriel : une intersection quelconque en est un. Il n'en va pas de même pour la réunion et ni non plus pour le complémentaire. On y supplée en considérant le sous-espace engendré par la réunion. En termes de familles génératrices il s'agit donc bien d'une réunion : si (f) et (g) engendrent respectivement les sous-espaces vectoriels F et G, alors $F + G$ est l'espace engendré par $(f) \cup (g)$. Le travail avec des bases n'étant pas intrinsèque, la définition de la somme peut se faire en considérant les sommes de vecteurs. Il est alors bien plus commode de raisonner avec les applications linéaires naturelles associées.

Définition 2 - 14

Somme de sous-espaces vectoriels

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E. On a une application linéaire canonique

$$\sigma : \begin{array}{rcl} \displaystyle\prod_{i\in I} E_i & \to & E \\ (x_i)_{i\in I} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} x_i \end{array}.$$

Elle n'est pas nécessairement surjective et on définit la somme $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i$ comme l'image de cette application linéaire : $\displaystyle\sum_{i\in I} E_i = \mathrm{Im}(\sigma)$.

Définition 2 - 15

Somme directe

Soit I un ensemble fini et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. On dit que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe si l'application

$$\sigma : \begin{array}{rcl} \prod_{i\in I} E_i & \to & \sum_{i\in I} E_i \\ (x_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} x_i \end{array}$$

est bijective.

Remarque 2 - 7

Par construction σ est surjective. Elle est donc bijective si et seulement si elle est injective, ou encore si et seulement si son noyau est réduit à $(0)_{i\in I}$.

Autrement dit, la somme est directe si et seulement si l'écriture de tout élément de $\sum_{i\in I} E_i$ comme somme d'éléments des $(E_i)_{i\in I}$ est unique. Quand la somme est directe, on écrit $\oplus_{i\in I} E_i$ au lieu de $\sum_{i\in I} E_i$.

Danger

Tout comme la notation $\exists!$, la notation $\oplus$ est dangereuse. En effet c'est à la fois une notation et une assertion mathématique. On ne peut en particulier par l'utiliser pour définir un nouvel objet, i.e. on ne peut pas écrire *Soit E l'espace vectoriel défini par $E = F \oplus G$* sans avoir démontré avant que F et G sont en somme directe.

Dans le cas où on effectue la somme de deux espaces véctoriels, il y a un moyen simple de détecter si la somme est directe. En effet, en étudiant une décomposition de 0 en $0 = x + y$, on constate qu'on a $y = -x$, de sorte que y appartient à E_2 et est l'opposé d'un élément de E_1. Comme un espace vectoriel est stable par passage à l'opposé, y appartient donc à $E_1 \cap E_2$. Réciproquement si u appartient à $E_1 \cap E_2$, il en va de même pour $-u$, et en posant $x = u$ et $y = -u$, on a $x + y = 0$, $x \in E_1$ et $y \in E_2$. Ainsi on obtient le critère suivant :

Remarque 2 - 8

Caractérisation de la somme directe

Soit E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. On a

$$\begin{aligned} E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2 &\Longleftrightarrow E_1 \cap E_2 = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow (\forall (x,y) \in E_1 \times E_2 \quad x + y = 0 \Longrightarrow x = y = 0) \ . \end{aligned}$$

♥

La caractérisation précédente est un **faux ami**. En effet, plus généralement, si $(E_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i\in I} E_i = \oplus_{i\in I} E_i &\Longleftrightarrow \forall i \in I \qquad E_i \cap \sum_{j\in I\setminus\{i\}} E_j = \{0\} \\ &\Longleftrightarrow \left(\forall (x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} E_i \left(\sum_{i\in I} x_i = 0 \Longrightarrow (\forall i \in I\,, x_i = 0)\right)\right) \ . \end{aligned}$$

Remarque 2 - 9

Caractérisation de la somme directe par la dimension

Si E est de dimension finie on a $\dim(\sum_{i\in I} E_i) \leq \sum_{i\in I} \dim(E_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.

C'est en effet une conséquence directe du théorème du rang appliqué à

$$\sigma : \begin{array}{ccc} \prod_{i\in I} E_i & \to & \sum_{i\in I} E_i \\ (x_i)_{i\in I} & \mapsto & \sum_{i\in I} x_i \end{array}$$

puisque l'image d'une application linéaire surjective est de dimension inférieure à l'espace de départ, avec égalité si et seulement si cette application est bijective.

Si E se décompose en somme directe, $E = \oplus_{i\in I} E_i$, l'application σ précédente est bijective. La bijection réciproque permet de définir des projecteurs associés. Pour i dans I, en composant σ^{-1} avec la projection canonique sur la i^{e} composante et l'injection canonique de E_i dans E. Concrètement si $\sigma^{-1}(x) = (x_i)_{i\in I}$, i.e. $x = \sum_{i\in I} x_i$ avec $\forall i \in I$ $x_i \in E_i$, on pose $p_i(x) = x_i$ de sorte qu'on a

$$x = \sum_{i\in I} p_i(x)\ .$$

La famille de projecteurs $(p_i)_{i\in I}$ est dite associée à la somme directe.

Propriété 2 - 7

Projecteurs et décomposition de l'unité

Soit $(p_i)_{i\in I}$ la famille (finie) de projecteurs associée à une décomposition en somme directe $E = \oplus_{i\in I} E_i$. On a les relations suivantes :

1. Idempotence - $\forall i \in I$, $p_i^2 = p_i$
2. Orthogonalité - $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \implies p_i p_j = 0$
3. Décomposition de l'unité - $\sum_{i\in I} p_i = \mathrm{Id}_E$.

Propriété 2 - 8

Bases adaptées et dimensions

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Tous les supplémentaires de F ont même dimension, appelée co-dimension de F et notée $\operatorname{codim}(F)$.

Une base $\mathcal{B}_E$ de E est dite adaptée à F si on peut en extraire une base $\mathcal{B}_F$ de F. Une telle base peut être obtenue en complétant une base de F en une base de E. Le complémentaire relativement à $\mathcal{B}_E$ de la base $\mathcal{B}_F$ de F ainsi obtenue est une base d'un supplémentaire de F.

Une base $\mathcal{B}_E$ de E est dite adaptée à une somme directe $\oplus_{i\in I} E_i$ si on peut en extraire une base de chacun des E_i. Si $\mathcal{B}_\rangle$ est une base de E_i ainsi obtenue, les $(\mathcal{B}_\rangle)_{i\in I}$ sont deux à deux disjoints. Si de plus $E = \oplus_{i\in I} E_i$, les $(\mathcal{B}_\rangle)_{i\in I}$ forment un partage de $\mathcal{B}_E$.

3 Algèbres

La notion d'algèbre a une histoire très complexe. Elle puise ses sources à la fois dans la logique, notamment avec les travaux de George BOOLE (1815–1864) complétés par ceux de Benjamin PEIRCE (1809–1880) et Charles Sanders PEIRCE (1839–1914), et l'algèbre linéaire, avec la recherche de multiplication sur des n-uplets. C'est notamment William Rowan HAMILTON (1805–1865) et GRASSMANN qui explorent les algèbres extérieures et amènent aux quaternions, bientôt suivis des octaves, découverts par John Thomas GRAVES (1806–1870) puis par Arthur CAYLEY (1821–1895). Leurs généralisations sont étudiées par William Kingdon CLIFFORD (1845-1879). L'ensemble de ces structures porte initialement le nom de systèmes hypercomplexes, puisqu'ils généralisent en quelque sorte la notion de nombre complexe. Le terme d'algèbre est donné par Bartel Leendert VAN DER WAERDEN (1903—1996) dans son ouvrage fondateur *Moderne Algebra* en 1930.

Définition 2 - 16

Algèbre – G. BOOLE, GRASSMANN, . . . , VAN DER WAERDEN

Une **algèbre** sur un corps $\mathbf{K}$, ou $\mathbf{K}$-algèbre, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $(A, +, \star)$ muni d'une multiplication interne qui est bilinéaire. Dans le cadre du programme, on demande en sus que $(A, \times)$ soit unifère. Autrement dit $(A, +, \times)$ est un anneau où l'axiome d'associativité de la multiplication est remplacé par

$\forall \lambda \in \mathbf{K}, \forall (x, y) \in A^2\ \lambda \star (x \times y) = (\lambda \star x) \times y = x \times (\lambda \star y)$.

Exemple 2 - 11

Très souvent les algèbres sont aussi associatives, donc $(A, +, \times)$ est vraiment un anneau, et contiennent $\mathbf{K}$, ce qui fait que l'associativité externe résulte de l'associativité. C'est le cas pour les $\mathbf{K}$-algèbres $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ ou $\mathscr{F}(X, \mathbf{K})$ pour un ensemble X quelconque.

Le corps non commutatif des quaternions ou l'agèbre non associative des octonions forment les seules $\mathbf{R}$-algèbres de dimension finie dites à division, i.e. sans diviseurs de 0. Elles ne sont que le début d'une suite infinie d'algèbres obtenue par la construction de CAYLEY-DICKSON (Leonard Eugene DICKSON, 1874-1954), avec par exemple les sedenions qui forment une algèbre de dimension 16 sur $\mathbf{R}$.

Il existe bien d'autres types d'algèbres : algèbre extérieure (avec comme exemple celle fournie par le produit vectoriel de vecteurs en dimension 3), algèbre de LIE, algèbre de JORDAN, algèbre de BANACH. Les plus importantes dans ce cours seront toutefois $\mathbf{K}[X]$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Définition 2 - 17

Soit A et B des $\mathbf{K}$-algèbres. On appelle morphisme d'algèbres une application linéaire qui est multiplicative.

Autrement dit φ est un morphisme de $\mathbf{K}$-algèbre si pour tous a et a' dans A et λ dans $\mathbf{K}$, on a

$$\varphi(a + a') = \varphi(a) + \varphi(a')\,,\ \varphi(aa') = \varphi(a)\varphi(a') \text{ et } \varphi(\lambda a) = \lambda\varphi(a)\,.$$

Remarque 2 - 10

Soit φ un homomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres de A dans B. On a $\varphi(0_A) = 0_B$. Pour a dans A on a $\varphi(-a) = -\varphi(a)$ et, pour n dans $\mathbf{N}$, $\varphi(na) = n\varphi(a)$ et $\varphi(a^n) = \varphi(a)^n$. La première propriété est encore vraie pour n dans $\mathbf{Z}$. La seconde l'est aussi si, de plus, a est inversible.

Définition 2 - 18

Soit A une $\mathbf{K}$-algèbre. On dit que B est une sous-algèbre de A si B en est un sous-espace vectoriel et que B est stable par multiplication.

Propriété 2 - 9

Détermination d'une application linéaire

Par propriété universelle de la somme directe, si E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels et si $E = \oplus_{i \in I} E_i$, alors on a un isomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres

$$\mathscr{L}(E, F) \simeq \prod_{i \in I} \mathscr{L}(E_i, F)$$

et plus précisément, étant donné des applications linéaires u_i dans $\mathscr{L}(E_i, F)$, il existe une unique application linéaire les prolongeant simultanément à E.

4 Expression matricielle

Toute matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ peut être interprétée comme un élément de $\mathrm{End}(\mathbf{K}^n)$, ou plutôt de $\mathrm{End}(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}))$. Néanmoins il est naturel de s'intéresser à l'ambiguïté soulevée par ces interprétations et donc à la stabilité des notions par isomorphisme.

On commence par quelques rappels relatifs au calcul matriciel.

Définition 2 - 19

Matrice de passage

Soit (e) et (e) deux bases d'un même espace de dimension finie E. On appelle matrice de passage de (e) à (e') la matrice de l'identité relativement aux bases (e') et (e) dans cet ordre. On note

$$P_{(e)}^{(e')} = \mathrm{Mat}_{(e'),(e)}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{(e)}^{(e')}(\mathrm{Id}_E)$$

et donc cette matrice correspond aux coordonnées des vecteurs de (e') dans la base (e), i.e.

$$P_{(e)}^{(e')} = (e_i^*(e_j'))_{1 \leq i,j \leq n} \ .$$

La matrice de passage $P_{(e)}^{(e')}$ est inversible d'inverse $P_{(e')}^{(e)}$. Réciproquement toute matrice inversible peut être interprétée comme une matrice de changement de base, à savoir de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ à la base donnée par ses vecteurs colonnes.

Les matrices de passages constituent donc l'ensemble $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ des matrices inversibles de taille n. En particulier elles forment un groupe multiplicatif.

Propriété 2 - 10

Changement de base

Soit x dans E et u dans $\mathrm{End}(E)$. On note X et X' les matrices associées à x relativement aux bases (e) et (e') respectivement, i.e. $X = (e_i^*(x))_{1 \leq i \leq n}$ et $X = (e_i'^*(x))_{1 \leq i \leq n}$, $A = \mathrm{Mat}_{(e)}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{(e')}(u)$ et $P = P_{(e)}^{(e')}$. Alors on a

$$X = PX' \qquad A' = P^{-1}AP \quad \text{et} \quad AX = PA'X' \ .$$

Propriété 2 - 11

Rang – Équivalence

On note J_r ou $I_{r,n}$ la matrice dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, diagonale, dont les r premiers termes de la diagonale valent 1 et les autres sont nuls. C'est une matrice de rang r et toute matrice de r lui est équivalente, i.e.

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \quad \mathrm{rg}(A) = r \iff \exists (P, Q) \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{K})^2 \ A = PJ_rQ \ .$$

Le rang d'une matrice A est également le plus grand entier r pour lequel il existe une matrice extraite de A de taille r et inversible.

Propriété 2 - 12

Invariants – Similitude

Deux matrices A et B sont dite semblables si elles représentent le même endomorphisme relativement à des bases éventuellement différentes, i.e. s'il existe P dans $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ tel que $B = P^{-1}AP$.

Le rang, la trace et le déterminant sont invariants dans une classe de similitude. En particulier si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, le rang, la trace et le déterminant de la matrice représentant u ne dépend pas de la base choisie. On les note $\mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{tr}(u)$ et $\det(u)$.

Propriété 2 - 13

Trace

La trace est linéaire, commutative et invariante par similitude, i.e. $A \mapsto \mathrm{tr}(A)$ est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, pour A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ on a $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ et si de plus B est inversible $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}\left(B^{-1}AB\right)$.

Exemple 2 - 12

Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Propriété 2 - 14

Déterminant

Le déterminant est multiplicatif et est en particulier un morphisme de groupes entre $\mathrm{GL}_n(\mathbf{K})$ et $\mathbf{K}^*$. Le déterminant est donc commutatif et invariant par similitude.

Exemple 2 - 13

Matrice diagonale

Une matrice diagonale, notée $\mathrm{diag}(a_i)$, est la matrice dont tous les termes non diagonaux sont nuls et dont le terme d'indice (i, i) est a_i. Soit D cette matrice. On a

$$\mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} a_i \,, \quad \det(D) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

et D est inversible si et seulement tous les a_i sont non nuls. Dans ce cas on a $D^{-1} = \mathrm{diag}(a_i^{-1})$.

Plus généralement un produit de matrices diagonales l'est et on a $\mathrm{diag}(a_i)\mathrm{diag}(b_i) = \mathrm{diag}(a_ib_i)$.

Exemple 2 - 14

Matrice triangulaire

Un matrice T dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous ses termes d'indice (i,j) avec $i > j$ (resp. $i < j$) sont nuls. Le déterminant d'une telle matrice est le produit de ses éléments diagonaux et elle est donc inversible si et seulement si ceux-ci sont non nuls. Dans ce cas son inverse est une matrice triangulaire de même type et dont la diagonale est obtenue en inversant les termes diagonaux de T.

Plus généralement un produit de matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) dont les termes diagonaux sont obtenus par produit des termes diagonaux terme à terme.

Exemple 2 - 15

Blocs

Si (I_k) est une partition de $[\![1;n]\!]$, le plus souvent telle que les ensembles I_k soient formés de n_k entiers consécutifs, et (J_ℓ) une partition de $[\![1;p]\!]$, une décomposition d'une matrice A de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ par blocs est la donnée des matrices $A_{k,\ell}$ dans $\mathscr{M}_{n_k,n_\ell}(\mathbf{K})$ avec $A_{k,\ell} = (a_{ij})_{(i,j)\in I_k\times J_\ell}$.

Une matrice est dite diagonale (resp. triangulaire) par blocs si les matrices $A_{k,\ell}$ sont nulles si $k \neq \ell$ (resp. $k > \ell$ pour triangulaire supérieure, $k < \ell$ pour triangulaire inférieure).

Propriété 2 - 15

La décomposition par blocs correspond à une décomposition en somme directe de l'espace de départ et de celui d'arrivée. En note E_k l'espace engendré par les vecteurs e_i de la base canonique tels que $i \in I_k$ et F_j le pendant dans l'espace d'arrivée, la matrice $A_{k,\ell}$ représente une application linéaire de E_k dans F_ℓ. On prendra garde que ces applications linéaires n'ont qu'un rapport lointain avec la matrice initiale.

On peut effectuer une combinaison linéaire de matrices décomposées selon les mêmes blocs en effectuant les combinaisons linéaires blocs par blocs.

On peut effectuer le produit par blocs. Ainsi si A et B sont décomposées en blocs, correspondant respectivement à des partitions (I_k) et (J_ℓ) pour A et (J_ℓ) et (K_m) pour B, alors AB, noté C, est décomposée en blocs correspondant à (I_k) et (K_m), et on a $C_{k,\ell} = \sum_m A_{k,m}B_{m,\ell}$.

En particulier une matrice diagonale (resp. triangulaire) par blocs est inversible si et seulement tous ses blocs diagonaux le sont. Dans ce cas son inverse admet des blocs diagonaux égaux aux inverses des blocs correspondant. Par ailleurs le déterminant d'une telle matrice est le produit des déterminants de ses blocs diagonaux.

Définition 2 - 20

Transposition

Si A est dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ avec $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;p]\!]\times[\![1;q]\!]}$, sa transposée notée A^{T} est la matrice donnée par

$$A^{\mathrm{T}} = (a_{ij})_{(j,i)\in[\![1;q]\!]\times[\![1;p]\!]} \quad \text{i.e.} \quad E_{ji}^*(A^{\mathrm{T}}) = E_{ij}^*(A)\ .$$

Propriété 2 - 16

Transposition

La transposition est une application linéaire, commutant à l'inverse et c'est un antimorphisme linéaire, i.e. si A et B sont dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbf{K})$ alors

$$\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = A \qquad (AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \quad \text{et si } A \text{ est inversible } \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^{-1} .$$

De plus la transposée d'une matrice par blocs $(A_{k,\ell})$ est la matrice par blocs $(A^{\mathrm{T}}_{k,\ell})$, correspondant aux partitions (J_ℓ) et (I_k).

Propriété 2 - 17

Transvection par blocs

Une tranvection est un endomorphisme u tel que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$ contienne un hyperplan. Il revient au même de dire qu'il existe une forme linéaire φ et un vecteur h tels qu'on ait : $\forall x \in E\ u(x) = x + \varphi(x)h$. Une matrice de transvection élémentaire est une matrice de la forme $I_n + \lambda E_{i,j}$ avec $i \neq j$. Il s'agit alors d'une tranvection de base l'hyperplan d'équation $x_j = 0$ et de direction e_i, du moins si λ est non nul.

En reprenant les notations utilisées ci-dessus pour définir les matrices par blocs, une tranvection par blocs est une matrice de la forme $I_n + A_{k,\ell}$ avec $k \neq \ell$ et $A_{k,\ell}$ quelconque dans $\mathscr{M}_{n_k,n_\ell}$. Autrement dit les blocs diagonaux sont tous égaux à l'identité et il y a au plus un bloc non diagonal non nul.

Remarque 2 - 11

Rang de la transposée

C'est un fait non totalement évident que le rang d'une matrice est *aussi* celui de ses vecteurs lignes. Autrement dit le rang d'une matrice est invariant par transposition.

5 Exemples

Exemple 2 - 16

Équations différentielles linéaires à coefficients constants

L'ensemble des solutions de l'équation $y' + ay = 0$ sur $\mathbf{R}$ est une droite vectorielle. Toutes ses bases sont donc proportionnelles. Si on rajoute un second membre, lui-même solution d'une telle équation, e.g. $y' + ay = e^{bx}$, on obtient une droite affine.

Si $a + b \neq 0$, on peut considérer le plan vectoriel engendré par les fonctions données par e^{-ax} et e^{bx}. L'ensemble des solutions est alors une droite affine contenue dans ce plan et de direction donnée par la première fonction (considérée comme un vecteur de ce plan). Toute droite horizontale coupant l'axe vertical, on en déduit qu'il existe une solution de cette équation différentielle proportionnelle à la seconde fonction. On peut ainsi complètement résoudre cette équation en appliquant une recette : chercher β tel que βe^{bx} soit solution, i.e. tel que $\beta(b+a)e^{bx} = e^{bx}$, puis rajouter un multiple quelconque de e^{-ax} pour obtenir la solution générale ou un multiple précis si on dispose d'une condition initiale. Ainsi la formule $y(x) = \alpha e^{-ax} + \beta\frac{e^{bx}-e^{-ax}}{a+b}$ définit l'unique solution du problème de Cauchy : $y' + ay = e^{bx}$ et $y(0) = \alpha$.

On voit ici l'intérêt d'une base. L'espace ambient est un espace de dimension infinie, celui des fonctions de classe C^∞ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{C}$. On en extrait un sous-espace vectoriel (de dimension 2), puis on choisit une base de ce sous-espace.

Exemple 2 - 17

Ordre 2 homogène

Les équations du type $y'' + ay' + b = 0$ se résolvent en considérant l'équation polynomiale associée $X^2 + aX + b = 0$. Si cette équation a deux solutions distinctes, i.e. si $a^2 + 4b \neq 0$, les solutions à valeurs complexes sont de la forme $\alpha y_1 + \beta y_2$ où $y_k(x) = e^{r_k x}$ en notant r_1 et r_2 sont les deux racines de $X^2 + aX + b$.

La base (y_1, y_2) n'est toutefois pas la plus adaptée si a et b sont réels alors que r_1 et r_2 ne le sont pas. On peut préférer une base prenant des valeurs réelles, e.g. $(\frac{1}{2}(y_1 + y_2), \frac{1}{2i}(y_1 - y_2))$. Si $r_k = \lambda \pm i\varphi$, il s'agit de $e^{\lambda x}\cos(\varphi x)$ et $e^{\lambda x}\sin(\varphi x)$.

Si $a^2 + 4b = 0$ et r est racine double de $X^2 + aX + b$, une base de l'espace des solutions est donnée par e^{rx} et xe^{rx}.

En fonction du problème considéré la première base trouvée n'est donc pas toujours la bonne et tout l'objet de l'algèbre linéaire est de comprendre comment trouver des bases adaptées et calculer avec.

Aparté

On verra que d'une façon générale une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n dont le second membre est lui-même solution d'une telle équation d'ordre m, admet un espace de solutions qui est naturellement un sous-espace affine de dimension n d'un espace vectoriel de dimension $n + m$.

Exemple 2 - 18

Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Le même principe prévaut dans l'étude des suites complexes vérifiant $\forall n \in \mathbf{N}$ $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$. On résout la même équation polynomiale $X^2 + aX + b = 0$ et on dispose d'une base de l'espace vectoriel des solutions donnée par les suites (r_1^n) et (r_2^n), si $a^2 + 4b \neq 0$, ou (r^n) et (nr^n) sinon. L'analogie est frappante.

Pour voir que les espaces de solutions, dans le cas homogène, sont des espaces vectoriels, il suffit d'introduire une application linéaire dont c'est le noyau. Ici il s'agit de $y \mapsto y'' + ay' + by$, d'un côté, et de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n)_{n\in\mathbf{N}}$, de l'autre. Ce sont des endomorphismes l'une de $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, l'autre de $\mathbf{C}^{\mathbf{N}}$.

Aparté

On verra qu'on les construits de la même façon à partir de la dérivation ou de l'opération de décalage respectivement, i.e. de $y \mapsto y'$ et $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$ respectivement. En notant u cette application (linéaire), on étudie le noyau de $u \circ u + au + b\mathrm{Id}$, ce que l'on pourrait noter $u^2 + au^1 + bu^0$ en prenant soin d'interpréter les exposants relativement au produit de composition. Autrement dit, en notant $P = X^2 + aX + b$, le noyau de $P(u)$ s'étudie en trouvant les racines de P... ce qui n'est plus très surprenant.

Pour aller plus loin

La bonne analogie entre continu et discret est donnée par l'opérateur de dérivation discrète, i.e. $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \mapsto (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Le noyau de cet opérateur est formé des suites constantes, tandis que celui de la dérivation est formé des fonctions constantes.

Exercices

Algèbre linéaire

2 - 1 Ⓢ ★ Espaces vectoriels

Déterminer si les équations suivantes définissent des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Si oui, en donner dimension et base.

1. $(x+y)^2+(x-y)^2=0$
2. $(x+y)^2-(x-y)^2=0$
3. $e^x e^y=0$
4. $\sin^2(x)+\sin^2(y)=0$
5. $(x-y)^2-(y-z)^2-(z-x)^2=2(x-z)(z-y)$
6. $xz+y^2=x+2y-z=0$
7. $x+y+z+t=x-y-z-t=0$

2 - 2 Ⓢ ★ Calcul de coordonnées

Dans l'espace $\mathbf{R}^4$, on donne les vecteurs $x_1=(1,1,2,1)$, $x_2=(1,-1,0,1)$, $x_3=(0,0,-1,1)$, $x_4=(1,2,2,0)$ et $x=(1,1,1,1)$.

a. Montrer que les quatre vecteurs $(x_i)_{1\leq i\leq 4}$ forment une base de $\mathbf{R}^4$.

b. Déterminer les coordonnées de x dans la base $(x_i)_{1\leq i\leq 4}$.

2 - 3 Ⓢ ★ Espace engendré

Dans un espace vectoriel E sur le corps des complexes, on donne trois éléments a, b et c et on pose $u=b+c$, $v=c+a$ et $w=a+b$.

a. Montrer que les sous-espaces vectoriels engendrés par a, b et c d'une part et u, v et w de l'autre sont identiques.

b. Montrer que les vecteurs u, v et w sont indépendants (i.e forment une famille libre) si et seulement si a, b et c le sont.

2 - 4 ★ $\cos$ et $\sin$

Soit E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions de la forme $x\mapsto f(x)=a\cos(x)+b\sin(x)+c$ pour a, b et c réels. Soit φ et ψ de E dans lui-même définies par $\varphi(f)(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ et $\psi(f)(x)=f'(x)$.

a. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.

b. Comparer $\varphi\circ\psi$ et $\psi\circ\varphi$.

2 - 5 Ⓢ ★ Dérivation

Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur (ou égal) à n.

a. Montrer que les applications d et u définies par $d(P)=P'$ et $u(P)=P-P'$ sont des endomorphismes de E.

b. Montrer que u est inversible et exprimer u^{-1} au moyen de d.

2 - 6 Ⓢ ★ Composition et noyau

Pour $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}(F,G)$, montrer $\dim(\operatorname{Ker}(v\circ u))\leq\dim(\operatorname{Ker}(u))+\dim(\operatorname{Ker}(v))$.

2 - 7 Ⓢ ★ Composition et rang

Pour u et v dans $\operatorname{End}(E)$, montrer $\dim(E)+\operatorname{rg}(v\circ u)\geq\operatorname{rg}(v)+\operatorname{rg}(u)$.

2 - 8 Ⓢ ★ Image réciproque

Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$ avec E de dimension finie. Soit H un sous-espace vectoriel de F. Établir $\dim\left(u^{-1}(H)\right)=\dim E-\operatorname{rg}(u)+\dim\left(H\cap\operatorname{Im}(u)\right)$.

2 - 9 Ⓢ ★ Valeurs absolues

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels deux à deux distincts et $(f_i)_{i\in I}$ la famille de fonctions de $C(\mathbf{R},\mathbf{R})$ définie par $f_i : x\to|x-a_i|$. Cette famille est-elle libre ?

2 - 10 ★★ Endomorphismes de carré nul

Pour E de dimension inférieure à 3, donner tous les u dans $\operatorname{End}(E)$ tels que $u\circ u=0$.

2 - 11 Ⓢ ★★ Supplémentarité de l'image et du noyau

Soit u dans $\operatorname{End}(E)$, avec E de dimension finie. Montrer que les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $E=\operatorname{Im}(u)+\operatorname{Ker}(u)$ (c) $\operatorname{Im}(u\circ u)=\operatorname{Im}(u)$
2. $E=\operatorname{Im}(u)\oplus\operatorname{Ker}(u)$ (d) $\operatorname{Ker}(u\circ u)=\operatorname{Ker}(u)$.

2 - 12 ★★ Corps des complexes

On se place dans l'espace vectoriel E des matrices 2×2 à coefficients réels, i.e. $E=\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.

a. Soit $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)$ dans E, calculer A^2 et montrer qu'il existe des réels α et β tels que $A^2=\alpha A+\beta I_2$.

b. Dans quel cas ces coefficients α et β ne sont pas uniques ?

c. On note F le sous-espace vectoriel engendré par A et I_2. Quelle est sa dimension ?

d. Montrer que si B appartient à F et est inversible, son inverse appartient à F.

e. Déterminer quand F admet une structure de corps.

f. Lorsque $a=d=0$ et $b=-c=1$, montrer que ce corps est isomorphe au corps des complexes.

2 - 13 Ⓢ ★★ **Centre ♥**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension supérieure à 2 et $\mathcal{A}$ partie de $\mathscr{L}(E)$. On appelle commutant de $\mathcal{A}$ l'ensemble donné par $c(\mathcal{A}) = \{u \in \mathscr{L}(E) \mid \forall a \in \mathcal{A}, [a,u]=0\}$ et centre de $\mathscr{L}(E)$ le commutant de $\mathscr{L}(E)$.

a. Montrer que le centre de $\mathscr{L}(E)$ est constitué des homothéties de E.

b. On suppose E euclidien. Déterminer le commutant de $\mathscr{O}(E)$.

c. On suppose de plus E orienté. Déterminer le commutant de $\mathrm{SO}(E)$.

2 - 14 Ⓢ **X 2003** ★★ **Endomorphisme nilpotent**

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer qu'on a $f^2 = 0$ si et seulement si $\exists (g,h) \in \mathscr{L}(E)^2$, $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

2 - 15 Ⓢ ★★ **Formule de Grassmann**

Soit E et F deux sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel de dimension finie. On écrit la suite d'applications linéaires

$$\{0\} \longrightarrow E \cap F \longrightarrow E \times F \longrightarrow E + F \longrightarrow \{0\}$$

donnée respectivement par l'application nulle, $x \mapsto (x, -x)$, $(x,y) \mapsto x + y$ et l'application nulle. On note $(u_k)_{0 \leq k \leq 3}$ ces applications et $(E_k)_{0 \leq k \leq 4}$ les espaces vectoriels considérés.

En utilisant le théorème du rang, montrer $\displaystyle\sum_{k=1}^{3} (-1)^{k+1} \dim(E_k) = 0$ et en déduire la formule de Grassmann.

2 - 16 Ⓢ ★★ **Images et noyaux itérés ♥♥**

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie d, avec $d > 0$ et u dans $\mathscr{L}(E)$.

a. Montrer que la suite $(\mathrm{Im}(u^n))_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante stationnaire. On définit alors

$$p = \min \left\{ k \in \mathbf{N} \;\middle|\; \mathrm{Im}(u^{k+1}) = \mathrm{Im}(u^k) \right\} .$$

b. Que dire de la suite $(\mathrm{Ker}(u^n))_{n \in \mathbf{N}}$?

c. Montrer $p = \min \left\{ k \in \mathbf{N} \;\middle|\; \mathrm{Ker}(u^{k+1}) = \mathrm{Ker}(u^k) \right\}$.

d. Montrer que, pour $n \geq p$, on a $E = \mathrm{Im}(u^n) \oplus \mathrm{Ker}(u^n)$.

2 - 17 Ⓢ ★★ **Supplémentaire commun**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que deux sous-espaces vectoriels de E de même dimension admettent un supplémentaire commun.

Indication : On pourra procéder par récurrence.

2 - 18 ★★★ **Exponentielle et logarithme**

Toutes les matrices considérées sont carrées d'ordre n et à coefficients complexes. On dit qu'une matrice A est nilpotente s'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $A^r = 0$, et unipotente si la matrice $I_n - A$ est nilpotente.

a. Lorsque N est nilpotente, on pose $\exp(N) = I_n + \dfrac{N}{1!} + \dfrac{N^2}{2!} + \cdots + \dfrac{N^r}{r!} + \cdots$. Vérifier que $\left(\begin{smallmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est nilpotente (ici a, b et c sont des scalaires quelconques) et calculer son exponentielle.

b. A quelle condition N et N', nilpotentes de la forme précédente, commutent-elles (i.e. $NN' = N'N$) ? Vérifier qu'alors $\log(NN') = \log(N) + \log(N')$.

c. Lorsque U est unipotente, on pose $\log(U) = -\dfrac{I_n - U}{1} - \dfrac{(I_n - U)^2}{2} - \cdots - \dfrac{(I_n - U)^r}{r} + \cdots$. Vérifier que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est unipotente (ici x, y et z sont des scalaires quelconques) et calculer son logarithme.

d. A quelle condition U et U', unipotentes de la forme précédente, commutent-elles ? Vérifier qu'alors $\exp(U + U') = \exp(U)\exp(U')$.

e. Montrer qu'on a $\exp(\log(U)) = U$ et $\log(\exp(N)) = N$.

2 - 19 Ⓢ ★★★ **Espace quotient ♠**

Soit F un sous-espace vectoriel de E espace vectoriel de dimension quelconque. On munit E de la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x - y \in F$.

a. On munit l'ensemble quotient, noté E/F, des « lois quotients » définies par

$$\overline{x} + \overline{y} = \overline{x + y} \quad \text{et} \quad \lambda . \overline{x} = \overline{\lambda . x} \, .$$

Montrer que E/F admet alors une structure d'espace vectoriel et que la projection canonique π de E dans E/F est une application linéaire surjective.

b. Montrer que, si F est de codimension finie, alors $\mathrm{codim}(F) = \dim(E/F)$.

Géométrie euclidienne

2 - 20 Ⓢ ★ **Projection sur un plan**

Soit $E = \mathbf{R}^3$ et φ l'application de E^2 dans $\mathbf{R}$ donnée par

$$\varphi(u, u') = xx' + xy' + x'y + 2yy' + 2yz' + 2y'z + 5zz'$$

où $u = (x, y, z)$ et $u' = (x', y', z')$.

a. Montrer qu'on a $\varphi(u, u) = (x + y)^2 + (y + 2z)^2 + z^2$.

b. Montrer que φ est un produit scalaire.

On munit dorénavant E de ce produit scalaire.

c. Soit P le plan d'équation $z = 0$. Trouver une base orthonormée de P dont les deux premiers vecteurs de base sont dans P.

d. Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur P ?

2 - 21 Ⓢ ★ Projection sur un hyperplan

On munit $\mathbf{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soit H l'hyperplan d'équation $x+y+z+t=0$ et p la projection orthogonale sur H.

a. Pour u dans $\mathbf{R}^4$, calculer $\|u-p(u)\|$.

b. Quelle est la matrice de p dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$?

2 - 22 Ⓢ ★ Symétrie hyperplane

On munit $\mathbf{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique. Soit H le sous-espace de $\mathbf{R}^4$ engendré par les trois vecteurs donnés par $u_1=(1,1,0,1)$, $u_2=(-2,0,1,1)$ et $u_3=(0,1,0,1)$.

a. Montrer que H est un hyperplan et en donner un équation.

b. Trouver un vecteur unitaire dans $H^\perp$.

c. Quelle est la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à H dans la base canonique de $\mathbf{R}^4$?

2 - 23 Ⓢ ★ Projection sur un plan

On munit $\mathbf{R}^4$ de sa structure euclidienne canonique et on se donne les vecteurs $(u_i)_{1\leq i\leq 4}$ donnés par $u_1=(1,-3,0,2)$, $u_2=(3,-3,-2,1)$, $u_3=(1,0,1,0)$ et $u_4=(0,0,0,1)$.

a. Montrer que (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de $\mathbf{R}^4$.

b. Orthonormaliser cette base selon le procédé de Gram-Schmidt.

c. Quelle est la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur le plan de $\mathbf{R}^4$ d'équations $x-3y+2t=3x-3y-2z+t=0$?

Projecteurs

2 - 24 Ⓢ ★ Somme de deux projecteurs

Soit p et q deux projecteurs de E, de dimension finie, tels que $p+q$ soit aussi un projecteur. Démontrer $\operatorname{Im}(p+q)=\operatorname{Im}(p)\oplus\operatorname{Im}(q)$ et $\operatorname{Ker}(p+q)=\operatorname{Ker}(p)\cap\operatorname{Ker}(q)$. Que valent $p\circ q$ et $q\circ p$?

2 - 25 Ⓢ ★★ Projecteurs

Soit p et q deux projecteurs de E, de dimension finie, tels que $p\circ q=0$. Montrer que $p+q-q\circ p$ est un projecteur et en déterminer l'image et le noyau. On pourra introduire $p'=q(\mathrm{Id}_E-p)$.

2 - 26 Ⓢ ★★ Théorème du rang et factorisation

Soit $f\in\mathscr{L}(E)$ avec E de dimension finie.

a. Montrer qu'il existe un projecteur p et un automorphisme u tels que $f=u\circ p$.

b. Montrer qu'il existe un projecteur q et un automorphisme v tels que $f=q\circ v$.

c. Ces propositions sont-elles encore vraies si E n'est plus de dimension finie ?

2 - 27 Ⓢ ★★ Caractères

Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}(E)$, avec E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{K}$. On suppose $\mathbf{K}$ de caractéristique nulle et $\displaystyle\sum_{g\in G}\mathrm{tr}(g)=0$. Montrer que $\displaystyle\sum_{g\in G} g$ est nul.

Indication : On pourra montrer que c'est presque un projecteur.

2 - 28 Ⓢ ★★★ Somme de projecteurs ♥

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p_1,\ \ldots,\ p_n$ des projecteurs de E. Établir que $\displaystyle\sum_{i=1}^n p_i$ est un projecteur si et seulement si $\forall (i,j)\in [\![1;n]\!]^2$, $p_i\circ p_j=\delta_{i,j}p_i$.

2 - 29 Ⓢ ★★★ Endomorphismes unipotents

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et u dans $\mathscr{L}(E)$ tel que $u^q=\mathrm{Id}_E$ pour un certain entier naturel non nul q. Montrer

$$\dim(\operatorname{Ker}(u-\mathrm{Id}_E))=\frac{1}{q}\sum_{k=1}^q \mathrm{tr}(u^k)$$

.

Matrices et applications linéaires

2 - 30 Ⓢ ★ Commutant

Soit $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ des scalaires tous distincts et $A=\mathrm{diag}(a_i)$. Trouver toutes les matrices M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telles qu'il existe P dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ vérifiant $M=[A,P]=AP-PA$. On pourra introduire l'application linéaire donnée par $\varphi(P)=[A,P]$.

2 - 31 Ⓢ ★★ Endomorphisme de trace nulle ♥

Soit u un endomorphisme non nul de E, espace vectoriel de dimension finie n, et de trace nulle. Montrer qu'il existe une base de E sur laquelle la matrice de u est de diagonale nulle. On pourra remarquer que si u n'est pas nul, on dispose de x dans E tel que $(x,u(x))$ forme une famille libre.

2 - 32 Ⓢ ★★ Décomposition de Choleski

Caractériser les matrices M de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telles qu'il existe quatre réels a, b, x et y vérifiant

$$M=T(y)^{\mathrm{T}}D(a,b)T(x)$$

avec $D(a,b)=\mathrm{diag}(a,b)$ et $T(x)$ la matrice $\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.
Que dire si on impose de plus $M\in\mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$? $x=y$?

Rang d'une matrice

2 - 33 Ⓢ ★ Rang

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,j} = 1 + \delta_{i,j}\alpha_i$ avec $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^n$. Déterminer le rang de A.

2 - 34 Ⓢ ★ Matrices nilpotentes

Déterminer toutes les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbf{K})$ qui vérifient $M^2 = 0$.

2 - 35 Ⓢ ★ Caractérisation du rang ♥

Soit A dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, non nulle. Montrer que A est de rang r si et seulement s'il existe une famille $(X_1, \ldots, X_r)$ libre dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ et une famille $(Y_1, \cdots, Y_r)$ libre dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ telles que $A = \sum_{k=1}^{r} X_k Y_k^{\mathrm{T}}$.

2 - 36 Ⓢ C 2018 ★★ Rang 1

Soit M dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Trouver le rang de la comatrice de M.

2 - 37 Ⓢ ★★ Comatrice

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Calculer $\mathrm{com}(\mathrm{com}(A))$.

2 - 38 Ⓢ ★★ Inversibilité †

Soit f une application non constante de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dans $\mathbf{K}$ qui vérifie $f(0) = 0$ et, pour X et Y dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $f(XY) = f(X)f(Y)$. Établir l'équivalence :
X inversible $\iff f(X) \neq 0$.

2 - 39 Ⓢ ★★ Théorème de Hadamard ♥

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ à diagonale dominante, i.e. pour tout i dans $[\![1;n]\!]$,

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \ ;$$

montrer que A est inversible.

2 - 40 Ⓢ X 2013 ★★★ $\mathrm{Ker}(A^2)$

Soit A une matrice complexe, non inversible.

a. Montrer $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) \leq 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$.

b. Montrer que ces propositions sont équivalentes :

- **a.** $\dim(\mathrm{Ker}(A^2)) = 2\dim(\mathrm{Ker}(A))$
- **b.** $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Im}(A)$
- **c.** $A(\mathrm{Ker}(A^2)) = \ker(A)$
- **d.** $\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} A & \mathrm{Id} \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$.

Calcul de l'inverse

2 - 41 Ⓢ ★ Inverse

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ définie par $a_{i,j} = \delta_{i,j}a + \delta_{i,n+1-j}b$ avec $(a,b) \in \mathbf{K}^2$.

À quelle condition nécessaire et suffisante A est-elle inversible ? Calculer alors son inverse.

2 - 42 Ⓢ ★ Inverse

Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

s'il existe, avec a, b et c dans $\mathbf{K}$.

2 - 43 Ⓢ ★★ Primitives

Soit α un réel non nul. On pose $M = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

a. Expliciter M^{-1} et M^{-2}.

b. La fonction φ_α donnée sur $\mathbf{R}$ par

$$\varphi_\alpha(x) = e^{\alpha x}(a\sin(x) + b\cos(x) + c)$$

admet une primitive de la forme Φ_α donnée par

$$\Phi_\alpha(x) = e^{\alpha x}(A\sin(x) + B\cos(x) + C)\ .$$

Vérifier $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = M^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

c. On suppose ici $\alpha > 0$. En déduire l'existence d'une primitive de $x \mapsto x\varphi_\alpha(x)$ qui admet une limite nulle en $-\infty$ et montrer qu'on peut la mettre sous la forme

$$x \mapsto e^{\alpha x}\Big((xA - A')\sin(x) + (xB - B')\cos(x) + xC - C'\Big)$$

puis exprimer A', B' et C' à l'aide de a, b, c et M^{-2}.

Déterminants

2 - 44 Ⓢ ★ Rang 1

Soit A dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ de rang 1. Montrer

$$\det(I_n + A) = 1 + \mathrm{tr}(A)\ .$$

2 - 45 Ⓢ ★★ Trace de la comatrice

Soit M et H dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer $\lim_{\lambda \to 0} \dfrac{\det(M + \lambda H) - \det(M)}{\lambda} = \mathrm{tr}(\mathrm{com}(M)^{\mathrm{T}}H)$.

En déduire une expression du coefficient de degré 1 du polynôme caractéristique de M.

2 - 46 Ⓢ ★★ Conjugaison stable ♥

Soit A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$.

2 - 47 Ⓢ ★★ Déterminants positifs †

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer $\det\left(A^2+I_n\right)\geq 0$ et, si A et B commutent, $\det(A^2+B^2)\geq 0$.

2 - 48 Ⓢ C 1993 ★★

Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. On définit φ dans $\operatorname{End}\left(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})\right)$ par $\varphi(X)=AXB$. Calculer $\det(\varphi)$.

2 - 49 Ⓢ Lyon 1993 ★★★ Comatrice

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On note $\operatorname{com}(A)$ la comatrice de A. Montrer $\operatorname{com}(AB)=\operatorname{com}(A)\operatorname{com}(B)$. On pourra considérer $\operatorname{com}((A+xI_n)(B+xI_n))-\operatorname{com}(A+xI_n)\operatorname{com}(B+xI_n)$ afin de traiter le cas non inversible.