Semaine 7 – 15/11– 19/11

Chapitres 1, 2 & 3 – Révisions

4 Équations différentielles linéaires

1. Révisions de MPSI : équations différentielles linéaires scalaires à coefficients constants d'ordre 1 et 2.
2. Les exponentielles comme vecteurs propres, spectre de l'opérateur dérivée ; $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - a\mathrm{Id}$ est le conjugué de $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ par l'opérateur multiplication par e^{ax}.
3. Notion de sous-espace propre, de valeur propre. Somme directe d'espaces propres (définitions générales, application à l'opérateur $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$). Polynômes de l'endormorphisme dérivée.
4. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie, systèmes d'équations différentielles linéaires, cas homogène, problème de Cauchy. Théorème de Cauchy-Lipschitz (cas linéaire). Théorème d'Euler généralisé : l'espace des solutions forme un espace affine de direction donnée par le système homogène associé et un isomorphisme est donné par $Y \mapsto Y(x_0)$ pour tout x_0 de I, et toute solution est la restriction d'une (unique) solution sur I. Principe de superposition : cas homogène/complet, cas d'un second membre obtenu comme combinaison linéaire.
5. Système fondamental de solutions, matrice wronskienne, (déterminant) wronskien, théorème de Lagrange (variation des constantes).
6. Cas homogène à coefficients constants : exemples d'étude des systèmes à valeurs dans $\mathbf{C}^2$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{C}^3$, $\mathbf{R}^3$. Approche sans théorie générale de la réduction, mais au contraire approche de la théorie de la réduction via des exemples de systèmes d'équations différentielles linéaires : racines doubles, racines triples. Solutions proportionnelles à un vecteur propre, combinaisons linéaires de vecteurs propres. Cas diagonalisable (seul cas étudié en dimension quelconque).
7. Systèmes différentiels linéaires généraux. Aucune technicité attendue.
8. Équations différentielles linéaires scalaires sous forme résolue : ordres 1 et 2, méthode de Lagrange, équation satisfaite par le wronskien.
9. Équations différentielles linéaires scalaires sous forme non résolue. Ordre 1, raccordement. Ordre 2, raccordement, recherche de solutions à partir d'une solution connue (variation de la constante pour un système d'ordre 2). La recherche de solutions développables en série entière n'a pas été étudiée.

5 Polynômes :

1. Anneau des polynômes $\mathbf{A}[X]$, degré, valuation, intégrité, division euclidienne.
2. Arithmétique dans $\mathbf{K}[X]$, idéaux, ppcm, pgcd. Théorème de Bézout, lemme de Gauss. Polynômes irréductibles, décomposition en irréductibles, valuation P-adique.
3. Spécialisation, théorème fondamental de l'algèbre (d'Alembert-Gauss), irréductibles de $\mathbf{C}[X]$, de $\mathbf{R}[X]$.
4. Recherche de racines : bornes de Lagrange $\max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$ et Cauchy $1 + \max_{0 \le k \le n-1} |a_k|$ pour les polynômes unitaires. Relations de Viète.
5. Règle des signes de Descartes $n_+(P) \le V(P)$ et $n_+(P) \equiv V(P) \pmod 2$.
6. Matrice compagnon, calculs algébriques avec les racines d'un polynôme via sa matrice compagnon.

Groupe de colles : **Interrogateur(trice) :**

Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires