Semaine 17 – 07/03– 11/03

Chapitres 1 à 11 – Révisions

12 L^2 – Espaces préhilbertiens

1. Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel. Définition, exemples. Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre. Théorème de PYTHAGORE. Théorème de la base incomplète pour les familles orthonormales (éventuellement vides). Écriture matricielle.
2. Espace orthogonal, supplémentaires orthogonaux, projecteur orthogonal, écriture $\oplus^{\perp} F_i$. Caractérisation du supplémentaire orthogonal, cas de la dimension finie : expression du projecteur orthogonal grâce à une base orthonormée, distance à un sous-espace vectoriel.
3. Endomorphismes symétriques, théorème spectral. Les notions d'adjoint, d'endomorphisme auto-adjoint, d'endomorphisme symétrique (défini) positif sont **hors-programme**.
4. Identités de polarisation, inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et MINKOWSKI (avec cas d'égalité). Remarque sur le cas positif (hors-programme). Exemples. Égalité du parallélogramme.
5. Exemples : $\mathbf{R}^n$ euclidien, $\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $\displaystyle\int_I fg$ sur $C^0(I, \mathbf{R})$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ sur $\mathbf{R}_n[X]$, $\displaystyle\sum u_n v_n$ sur $\ell^2(\mathbf{R})$, $\displaystyle\int_I PQ\omega$ sur $\mathbf{R}[X]$ (TCHEBYCHEV, LEGENDRE etc.).
6. Inégalité de BESSEL, famille totale, suite orthonormale totale.
7. Procédé (algorithme) d'orthogonalisation (orthonormalisation) de GRAM-SCHMIDT. Exemples. Polynômes de LEGENDRE (sur $[0;1]$).
8. Espaces euclidiens et automorphismes orthogonaux : $\mathscr{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$. Caractérisation des automorphismes orthogonaux, des projecteurs orthogonaux. Théorème spectral, procédé d'orthogonalisation (orthonormalisation) de GRAM-SCHMIDT.
   La notion de matrice symétrique réelle (définie) positive est **hors-programme**.
9. Réduction des automorphismes orthogonaux. Rotations en dimension 3. Compacité de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$.

13 Intégration

1. Approximation uniforme des fonctions continues par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier. Suites de DIRAC et théorème d'approximation de WEIERSTRASS.
2. Inégalité triangulaire, inégalité de la moyenne, égalité de la moyenne, inégalité de CAUCHY-SCHWARZ, inégalité de HÖLDER, inégalité de JENSEN.
3. Formule de STIRLING.
4. Théorème de convergence dominée pour les fonctions continues par morceaux (suites, séries, intégrales à paramètre). Application à la convergence normale dans L^1, i.e. interversion $\displaystyle\sum_n \int_I f_n = \int_I \sum_n f_n$ quand la série $\sum_n \|f_n\|_1$ est convergente.
5. Intégrales à paramètre : continuité, dérivabilité en fonction du paramètre dans le cas où l'intégrande est dominé.

14 Aléatoire

1. Familles de variables aléatoires, loi conjointe, loi marginale, loi conditionnelle. Indépendance, covariance. Variance d'une somme de variables indépendantes. Lemme des coalitions. Existence de suites de variables aléatoires de lois données.
2. Fonction génératrice ($G_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right)$) : somme de variables aléatoires. Exemples : lois de BERNOULLI, binomiale, de POISSON, géométrique.
3. Convergence en probabilité (notion en fait hors-programme), loi faible des grands nombres.

Groupe de colles : **Interrogateur(trice) :**

Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires