Semaine 16 – 28/02– 04/03

Chapitres 1 à 10 – Révisions

11 L^1 – Séries de fonctions

1. Modes de convergence : convergence simple, uniforme, normale, sur un voisinage, sur les segments. Continuité de la limite/somme. Convergence sur les segments. Double limite.
2. Séries géométrique et exponentielle dans une algèbre normée : continuité.
3. Intégration et dérivation : limite/somme et convergence uniforme, fonctions de classe C^k. Dérivation de $t \mapsto \exp(ta)$ pour a dans une algèbre normée.
4. Étude de fonctions définies par des séries.
5. Séries de TAYLOR et séries entières (variable réelle ou complexe). Fonctions plates. Rayon de convergence, théorème de CAUCHY (règle de D'ALEMBERT). Le théorème de HADAMARD est hors-programme. Somme et produit de deux séries entières.
6. Intégration et dérivation des séries entières de la variable réelle (à valeurs réelles ou complexes). Fonctions développable en série entière (en 0), unicité du développement, caractérisation par le reste intégral (ou de LAGRANGE) dans la formule de TAYLOR. Formule du binôme pour $(1+x)^\alpha$ avec α dans $\mathbf{R}$ (ABEL).
7. Exemples et applications : fonction génératrice ($G_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right)$), calculs des moments, fractions rationnelles, intégration/dérivation des fonctions développables en série entière, résolution d'équations différentielles. Calcul de $\sum P(n)z^n$ pour P dans $\mathbf{C}[X]$. Application au caractère C^∞ de fonctions définies par des quotients (comme $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$).

12 L^2 – Espaces préhilbertiens

1. Orthogonalité dans un espace préhilbertien réel. Définition, exemples. Toute famille orthogonale formée de vecteurs non nuls est libre. Théorème de PYTHAGORE. Théorème de la base incomplète pour les familles orthonormales (éventuellement vides). Écriture matricielle.
2. Espace orthogonal, supplémentaires orthogonaux, projecteur orthogonal, écriture $\oplus^\perp F_i$. Caractérisation du supplémentaire orthogonal, cas de la dimension finie : expression du projecteur orthogonal grâce à une base orthonormée, distance à un sous-espace vectoriel.
3. Endomorphismes symétriques, théorème spectral. Les notions d'adjoint, d'endomorphisme autoadjoint, d'endomorphisme symétrique (défini) positif sont **hors-programme**.
4. Identités de polarisation, inégalités de CAUCHY-SCHWARZ et MINKOWSKI (avec cas d'égalité). Remarque sur le cas positif (hors-programme). Exemples. Égalité du parallélogramme.
5. Exemples : $\mathbf{R}^n$ euclidien, $\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}AB)$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, $\displaystyle\int_I fg$ sur $C^0(I,\mathbf{R})$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ sur $\mathbf{R}_n[X]$, $\sum u_n v_n$ sur $\ell^2(\mathbf{R})$, $\displaystyle\int_I PQ\omega$ sur $\mathbf{R}[X]$ (TCHEBYCHEV, LEGENDRE etc.).
6. Inégalité de BESSEL, famille totale, suite orthonormale totale.
7. Procédé (algorithme) d'orthogonalisation (orthonormalisation) de GRAM-SCHMIDT. Exemples. Polynômes de LEGENDRE (sur $[0;1]$).
8. Espaces euclidiens et automorphismes orthogonaux : $\mathscr{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$, $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbf{R})$. Caractérisation des automorphismes orthogonaux, des projecteurs orthogonaux. Théorème spectral, procédé d'orthogonalisation (orthonormalisation) de GRAM-SCHMIDT.

   La notion de matrice symétrique réelle (définie) positive est **hors-programme**.
9. Réduction des automorphismes orthogonaux. Rotations en dimension 3. Compacité de $\mathscr{O}_n(\mathbf{R})$.

Groupe de colles : **Interrogateur(trice) :**

Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires
Nom	Énoncés
Note	Commentaires