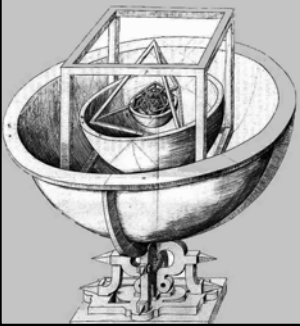


Choix et impact des modèles Ptolémée, Copernic, Kepler



François Sauvageot
Université Paris 7
Maître de conférences
Animateur à l'IREM

Plan

- Etude d'un exemple historique : les modèles du système solaire en 1600.
- Non équivalence de modèles et tests d'hypothèses
- Version moderne des calculs
- Premier rejet d'hypothèse historique

Johannes Kepler (1571-1630)

- 1571 : Naissance à Weil der Stadt
- 1589 : Université de théologie de Tübingen
- 1594 : Professeur de mathématiques à l'école protestante de Graz
- 1595 : *Mysterium Cosmographicum*. Il relie les distances des planètes au Soleil aux solides platoniciens ...
« *Je ne pourrai jamais décrire avec des mots le plaisir que j'ai eu en faisant cette découverte!* »
- 1598 : rencontre avec Tycho Brahé
- 1600 : Mathématicien Impérial à Prague
- 1609 : *Astronomia Nova* (loi des ellipses et loi des aires)
- 1621 : *Epitome Astronomiae Copernicae* (T^2/a^3)
- 1627 : *Tables Rodolphines*. Prédiction des conjonctions de Mercure et Vénus avec le Soleil. Précision de 2' d'arc !

Exemple historique

- Le premier exemple de « rejet d'hypothèse » ou d'invalidation de modèle est très probablement dû à Kepler.
- Johannes Kepler est sans aucun doute le premier Copernicien convaincu, plus même que Copernic lui-même.
- Dans sa quête du « Mystère du Monde », Kepler cherche à obtenir une validation du système héliocentrique en donnant des tables célestes plus précises que toutes celles connues à son époque.
- Ce sera chose faite avec les « Tables Rudolphines » où, grâce à sa théorie de Mars, il obtient une précision inférieure à 2' d'arc. Et pour cela il doit invalider le modèle des orbites circulaires et donner les fameuses trois lois de Kepler dont la plus importante est peut-être celle qui donne le modèle lui-même : les planètes tournent autour du Soleil selon des orbites elliptiques.

Astronomia Nova

- « *L'astre errant qui a le plus éprouvé la sagacité des astronomes, Mars, l'inobservable, vient de mettre bas les armes dans la guerre que le général Kepler a engagée contre lui.* »
- « *Par l'intermédiaire de sa mère la Nature, il a envoyé l'aveu de sa défaite, et l'Arithmétique et la Géométrie l'escortent sans résistance dans le camp de son vainqueur.* »
- C'est parce que Mars a l'excentricité la plus importante, Pluton et Mercure exceptés, que c'est elle qui est au centre des découvertes de Képler. Tout comme ce sera Mercure qui sera la clef de la relativité générale, pour la même raison.

Le système copernicien : un choix de modèle !

- C'est parce qu'il répond aux « questions importantes » que Kepler acquiert la conviction que le système copernicien est le seul valable.
 - Pourquoi Mercure et Vénus accompagnent toujours le Soleil, sans s'en écarter trop, alors qu'elles reviennent dans un même position en moins d'un an ?
 - Pourquoi ces mêmes planètes inférieures n'entrent-elles jamais en opposition avec le Soleil alors que les autres oui ?
- Il n'est pas vrai que des hypothèses sont équivalentes : ce n'est pas parce que grâce à deux systèmes différents on obtient la même description d'un phénomène que les deux sont valables ...

La recherche de la vérité

- Kepler a écrit la pièce maîtresse de son œuvre comme aucun créateur ne le fit jamais : il confia au livre imprimé les méandres de ses démarches.
- L'itinéraire pour dépasser la situation fut difficile et sinueux. Dans un monde dominé par la philosophie d'Aristote, il ne pouvait en être autrement : la physique céleste ne pouvait naître qu'en s'appuyant sur la métaphysique.
- Tout comme Copernic s'était appuyé sur 7 postulats, Kepler cherche la vérité *a priori*. C'est Tycho Brahé qui le convaincra que seul un travail opéré *a posteriori* est un travail de précision. C'est l'alliance de ces deux points de vue, et le travail de toute une vie, qui permettra à Kepler d'être le premier à percer le secret du monde !

Les postulats de Copernic

Premier postulat
Il n'y a pas un centre unique pour tous les orbites ou sphères célestes.

Deuxième postulat
Le centre de la terre n'est pas le centre du monde, mais seulement le centre des graves et le centre de l'orbite lunaire.

Troisième postulat
Tous les orbites entourent le soleil qui se trouve pour ainsi dire au milieu d'eux tous, et c'est pourquoi le centre du monde est au voisinage du soleil.

Quatrième postulat
Le rapport de la distance (*) du soleil à la terre vis-à-vis de la hauteur de la sphère des étoiles est plus petit que le rapport du rayon de la terre à la distance entre le soleil et la terre, au point que la distance du soleil à la terre est imperceptible en comparaison de la hauteur de la sphère des étoiles (*).

Cinquième postulat
Tout mouvement qui paraît appartenir à la sphère des étoiles ne provient pas d'elle, mais de la terre. La terre, donc, avec les éléments tout proches, accomplit d'un mouvement diurne une révolution complète, autour de ses pôles fixes, tandis que demeure immobile la sphère des étoiles ou ciel ultime.

Sixième postulat
Les mouvements qui nous paraissent appartenir au soleil ne proviennent pas de lui, mais de la terre et de notre orbite, avec lequel nous effectuons des révolutions autour du soleil comme n'importe quelle autre planète (*). Ainsi donc la terre est entraînée par plusieurs mouvements.

Septième postulat
Les mouvements rétrograde et direct qui se manifestent dans le cas des planètes ne proviennent pas de celles-ci, mais de la terre. Le mouvement de la terre seule suffit donc à expliquer un nombre considérable d'irrégularités apparentes dans le ciel.

Après avoir adopté ces postulats, je vais m'efforcer de montrer brièvement combien l'uniformité des mouvements peut être méthodiquement

(*) 186.30 aliquod aliud sidus Ceteris : aliquo alio sidere A S V Prove.

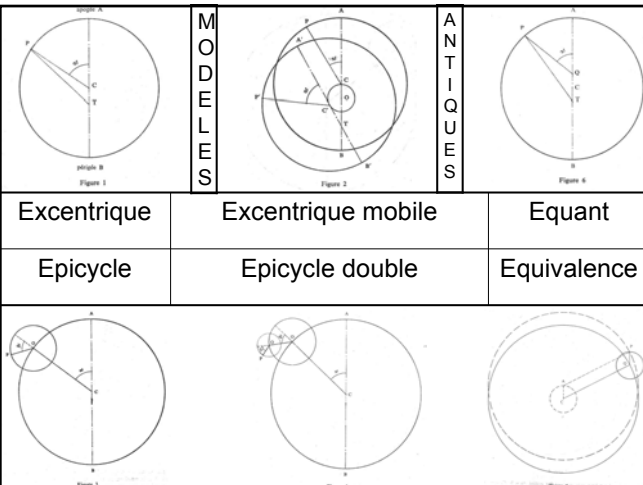
(*) Ce postulat signifie simplement que la parallaxe annuelle des étoiles est plus faible que la parallaxe solaire. Celle-ci était elle-même inobservable au temps de Copernic. Elle était seulement calculée à partir de la parallaxe lunaire — observable — sur la base d'une distance soleil-terre estimée par Ptolémée 18,83 fois supérieure à la distance terre-lune (Lévesque, livre V, chap. 15, voir sur ce sujet W. HASTING, "Medieval views on cosmic dimensions and Ptolemy's *Kindē al-Munkharri*" ; *Centenaire de la science* (Mélanges A. Koyré, tome II, Paris, 1964), p. 234-252 ; G. GAZDAR, "The arabic version of Ptolemy's *Planetary Hypothesis*", *Transactions of the American Philosophical Society*, vol. 57, part 4, 1967). Pour le quatrième postulat Copernic répondait par avance à ceux qui prouvaient argument de l'absence de parallaxe stellaire pour prouver l'immobilité de la terre.

Le mouvement circulaire uniforme

- Le monde antique voyait les astres tourner autour de la Terre selon des trajectoires circulaires uniformes, seule incarnation possible du divin.
- Bien entendu le mouvement de la Terre autour du Soleil n'est pas circulaire uniforme, ce qui a conduit les anciens à trouver des arrangements pour préserver ce dogme ... Pouvez-vous en imaginer quelques uns ?

L'hypothèse vicariante

- Deux façons de contourner les défauts constatés lors des observations :
 - Le modèle avec déférent et épicycle (Hipparque, Copernic)
 - Le modèle avec équant : le mouvement est uniforme par rapport à un point E symétrique de la Terre par rapport au centre C de la trajectoire $C = \frac{1}{2}T + \frac{1}{2}E$ (Ptolémée)
- Le modèle avec déférent et épicycle est ajustable à l'infini, tandis que celui avec équant est beaucoup plus rigide.



Tycho Brahé

- Tycho Brahé prend un système hybride où les planètes inférieures et la terre tournent autour du soleil, tandis que les planètes supérieures tournent autour de la terre.

L'hypothèse vicariante

- Refusant un épicycle dont le centre, vide, ne peut être source de mouvement, Kepler teste une hypothèse qu'il nomme « vicariante » (alternative) avec un degré de liberté supplémentaire : le Soleil, le Centre & l'Équant sont simplement supposés alignés

$$C = \alpha.S + (1 - \alpha).E.$$

- Ce degré de liberté supplémentaire lui permet une précision inégalée à son époque.

La « première » des trois

- Historiquement c'est la loi des aires la première que Kepler a établie.
- Pour pouvoir établir avec précision que le système copernicien rend compte de la réalité, Kepler a commencé par étudier le mouvement de la Terre.
- Il le trouve finalement circulaire, le Soleil étant très près du centre. Mais l'excentricité du Soleil le conduit à chercher comment le mouvement s'écarte d'un mouvement uniforme ...
- C'est ainsi que naît la loi des aires, pour la Terre, alors qu'elle y est la plus difficile à déceler.

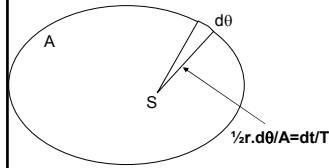
Le modèle de Copernic

- La loi des aires s'écrit $r^2 d\theta/dt = \sigma$. Comme $r dr d\theta = dx dy$, $\frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \sigma dt$ représente l'aire infinitésimale balayée par un rayon vecteur, et donc l'aire $A = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$ de l'ellipse vaut $\frac{1}{2} \sigma T$ ou encore $\pi \sigma / \omega$ (T et ω sont les période et fréquence de la rotation héliocentrique) :

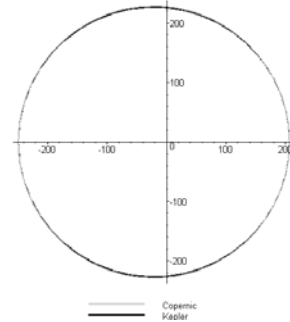
$$\sigma = \omega a^2 \sqrt{1 - e^2}$$
- En partant de $r^2 d\theta/dt = \sigma$ et $r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos(\theta))$, on obtient, en faisant les calculs à l'ordre 1 en e : $\theta = \omega t + 2e \sin(\omega t) + O(e^2)$
- D'où le modèle trouvé par Copernic :

$$x(t)/a = \cos(\omega t) - 3e/2 + e \cos(2\omega t)/2 \quad y(t)/a = \sin(\omega t) + e \sin(2\omega t)/2$$
- C'est-à-dire un déférent de rayon a, excentré dans un rapport 3e/2, un épicycle d'amplitude dans un rapport e/2 parcouru à vitesse double.
- Avec ce modèle, à l'ordre 2 en e, on obtient $\theta = \omega t + 2e \sin(\omega t) + e^2 \sin(2\omega t) + O(e^3)$, alors que le développement correct (par les lois de Kepler ou par la mécanique relativiste) est $\theta = \omega t + 2e \sin(\omega t) + 5e^2 \sin(2\omega t)/4 + O(e^3)$.
- Pour Mars, on a $e \approx 0,0934$, d'où des écarts d'environ $e^2/4 \approx 2.2 \cdot 10^{-3} \approx 7'$ arc. De tels écarts n'étaient pas acceptables au vu des observations du plus grand observateur de l'époque : Tycho Brahé. Le Danois exilé à Prague pouvait mesurer les positions à 2' près !

La loi des aires



Le modèle de Copernic confronté à la réalité



Le modèle vicariant

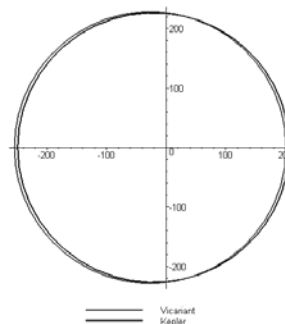
- Kepler est un astronome hors pair. Pour ne pas être tributaire de la théorie de la Terre, il utilise pour Mars des données achroniques : les instants où Mars est aligné avec la Terre et le Soleil. Ainsi il connaît parfaitement les coordonnées héliocentriques de Mars pour 12 observations (entre 1580 et 1604).
- Il trouve $SC = 5ea/4$ et $SE = 2ea$. D'où un rapport CE/CS égal à 3/5 et non l'habituel 1 de Ptolémée.
- D'où le modèle vicariant :

$$x(t)/a \approx \cos(\omega t) - 13e/8 + 3e \cos(2\omega t)/8 \quad y(t)/a \approx \sin(\omega t) + 3e \sin(2\omega t)/8$$

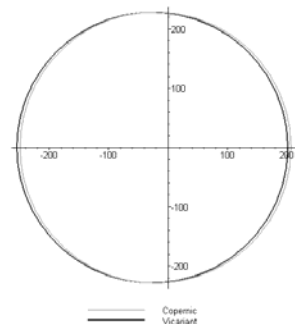
à comparer à celui de Copernic :

$$x(t)/a \approx \cos(\omega t) - 3e/2 + e \cos(2\omega t)/2 \quad y(t)/a \approx \sin(\omega t) + e \sin(2\omega t)/2$$

Le modèle vicariant confronté à la réalité



Le modèle de Copernic confronté au modèle vicariant



Rejet de l'hypothèse

- En reprenant les calculs déjà effectués pour le modèle Copernicien, on trouve pour le modèle vicariant : $\theta = \omega t + 2e \cdot \sin(\omega t) + 5e^2 \sin(2\omega t)/4 + O(e^3)$

- Le modèle est donc exact à l'ordre 2 !

- Mais les erreurs au niveau de l'ordre 3 sont données par

$$e^3 \sin(\omega t) [3 - 35 \sin^2(\omega t)] / 24$$

- Pour Mars cela donne des erreurs de l'ordre de 4' d'arc, ce qui est encore trop pour Kepler ...

De Kepler à Einstein

- L'étude des trajectoires se fait dans le cadre de la relativité générale.

$$d^2/d\theta^2(1/r) + 1/r = GM/\sigma + 3GM/c_0^2 \cdot (1/r)^2$$

- L'approximation au premier ordre donne les lois de Kepler.
- On a besoin du modèle de la relativité générale pour rendre compte de l'avance du périhélie.