

# Chaos en dynamique des populations

François Sauvageot  
Université Paris 7  
Maître de conférences  
Animateur à l'IREM

## Historique

- Dans les années 1970, plusieurs scientifiques se sont intéressés à la suite dite logistique, qui est une suite récurrente associée à la fonction  $f: x \rightarrow rx(1-x)$ , où  $r$  est un paramètre.
- Cette suite est un modèle simplifié de population. En effet, pour  $x$  petit, c'est à dire une population faible, la croissance est exponentielle. Pour  $x$  plus grand, la population est plus importante pour un même espace et une même nourriture, elle aura donc tendance à décroître.
- Le biologiste **Robert May** a étudié cette suite en 1976, tandis que le physicien **Feigenbaum** (en 1975) et les mathématiciens **James A. Yorke** (en 1975) et **A.N. Sarkowski** (en 1964) trouvèrent chacun de leur côté des propriétés applicables à cette étude.

## Interprétation

- C'est dans le domaine de la démographie que l'on rencontre pour la première fois la fonction logistique  $f$ : à l'origine il s'agit d'un modèle d'évolution d'une population naturelle (d'où le nom de logistique), proposé par le mathématicien belge **Pierre-François Verhulst** vers 1840.
- Ses idées de base:
  - l'effectif  $N$  de la population ne peut dépasser un maximum  $N_m$ , et  $N_m - N$  s'interprète comme la « place libre » dans le milieu
  - l'accroissement naturel est alors proportionnel à la place libre: . En normalisant par  $x = N/N_m$  et  $r = kN_m$ , on obtient  $dx/dt = f(x)$

## Continu vs discret

- Lorsqu'on résout cette équation différentielle, on trouve que  $x \rightarrow 1$  pour  $t \rightarrow +\infty$ : l'effectif se stabilise à  $N_m$ , qui est donc une sorte d'effectif optimal.
- Par contre lorsque l'on utilise  $f$  dans un modèle **discret** du type  $x_{n+1} = f(x_n)$ , alors on voit apparaître toute une dynamique inattendue. Mitchell Feigenbaum, grâce à une calculatrice, vers 1970, découvre l'apparition du **chaos** dans ce système dynamique.
- Le modèle discret se révèle donc être plus riche que le modèle continu, et aussi plus réaliste: les biologistes observent souvent chez les animaux d'importantes variations d'effectifs d'une année sur l'autre.

## Étude analytique

- On se limite à l'étude de la suite pour  $k$  compris entre 0 et 4, de sorte que la suite prenne ses valeurs entre 0 et 1.
- Une **orbite** de  $f$  est l'ensemble  $\{x, f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), \dots\}$  des valeurs en  $x$  des itérées de  $f$ .
- Un **cycle d'ordre  $p$**  est une orbite de cardinal  $p$ .
- On dit qu'un cycle est **attractif** lorsque les valeurs d'adhérence de la suite sont formées de ce cycle. On a alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{k+np} = y_k$  pour un certain cycle d'ordre  $p$   $\{y_1, y_2, \dots, y_p\}$ .

## Un peu de théorie

- Les limites possibles sont les points fixes de  $f$ , à savoir 0 et  $1-1/r$ .
- Si  $p$  est un point fixe de  $f$ , on dit qu'il est
  - attractif si  $0 < |f'(p)| < 1$ ; la convergence est **géométrique**  
 $|x_n - p| \sim K |f'(p)|^n$ .
  - répulsif si  $|f'(p)| > 1$ ; la convergence n'a lieu que si  $p$  est dans l'orbite de  $x_n$ .
  - quasi-stable si  $|f'(p)| = 1$ ; la convergence est lente  
 $|x_n - p| \sim K/n$ .
  - hyper-stable si  $f'(p) = 0$ ; la convergence est très rapide,  
 $|x_n - p| \sim K \delta^{2^n}$ , avec  $\delta \in ]0, 1[$ .
- Remarque : la convergence n'est pas assurée; les équivalents précédents ne sont valides que si on sait par ailleurs que la suite converge vers  $p$ .

## Convergence vers 0

- $r \in [0,1]$  : la suite  $(x_n)$  est minorée, décroissante.
- Le seul point fixe de  $f$  dans  $I$  est 0, d'où une convergence vers 0.
- $r \in [0,1[$  : on a  $f'(0) = r < 1$  et donc 0 est **attractif**.
- $r = 1$  : cette fois-ci 0 est quasi-stable. Par conséquent  $(x_n)$  converge encore vers 0, mais de façon « lente » :  $x_n \sim 1/n$ .

## Convergence vers $1-1/r$

- $r \in ]1,3[$  : il y a deux points fixes, 0 et  $\lambda(r) = 1-1/r$ .
- 0 est **répulsif** car  $f'(0) = r$ , et  $(x_n)$  ne converge vers 0 que pour  $x_0$  dans les antécédents de 0.
- $\lambda(r)$  est **attractif** puisque  $f'(\lambda(r)) = 2-r$ .
- $r = 2$  : on a  $f'(\lambda(2)) = 0$  et donc  $\lambda(2) = 1/2$  est **hyperstable**. On peut même expliciter  $x_n = (1-(1-2x_0)^{2^n})/2$
- $r = 3$  :  $\lambda(3) = 2/3$  est quasi-stable.  $(x_n)$  converge, mais lentement:  $x_n - 2/3 \sim \pm (-1)^n/(3n)$

## Remarque

- Lorsque  $1 < r < 3$ , la suite est convergente car elle ne possède pas de 2-cycle.
- Pour  $r > 3$ , on voit apparaître un 2-cycle : pour cela il suffit d'étudier les points fixes de l'itérée de  $f$  :  $r^2x(1-x)(1-rx(1-x))$ .
- Il faut pour cela résoudre

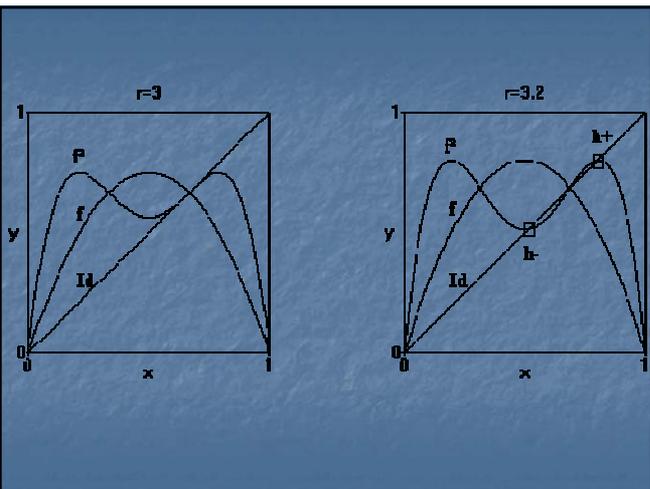
$$r^2x(1-x)(1-rx(1-x))=x$$

soit

$$rx(x-\lambda(r))(-r^2x^2+r(r+1)x+1+r)=0$$

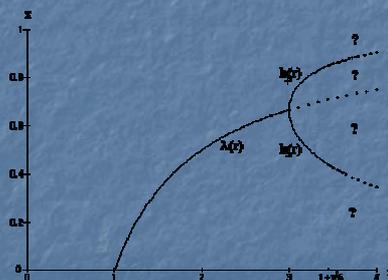
## Doublement de la période

- $r \in ]3, 1+\sqrt{6}[$  : les points fixes 0 et  $\lambda(r)$  sont répulsifs. Par contre, on a un **cycle attracteur d'ordre 2** :  $(r+1 \pm \sqrt{(r+1)(r-3)})/2r$ .
- De plus  $r = 1+\sqrt{5}$  est hyperstable.
- Il y a eu pour  $r = 3$  une **bifurcation** vers un cycle de période double : on parle de **doublement de période**.
- **Après** : on observe numériquement l'apparition d'un cycle d'ordre 4, impossible à expliciter. Les points de ce cycle sont les racines de  $f^4(x)-x$  qui ne sont pas racines de  $f^2(x)-x$ , d'où une équation de degré 12.



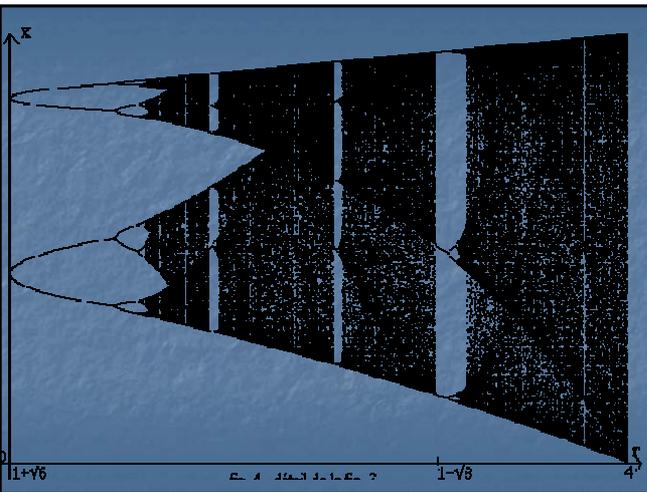
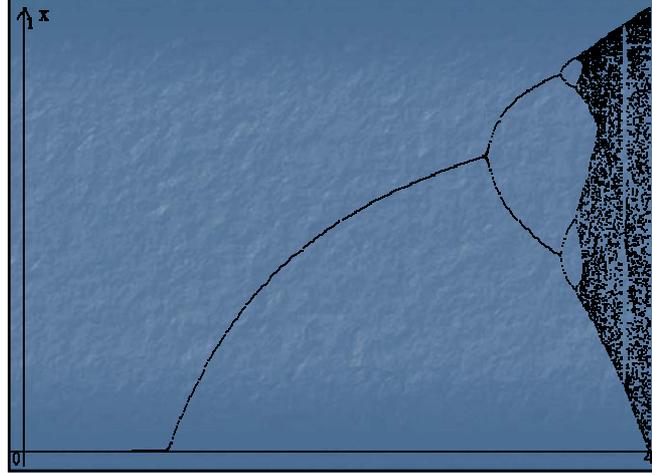
## Diagramme de Feigenbaum

- On obtient la figure à partir des résultats précédents en plaçant  $r$  en abscisse et les valeurs d'adhérence de  $(x_n)$  en ordonnée.



## Calculs par ordinateur

- L'ordinateur prend alors le relais : pour estimer les valeurs d'adhérence (ou au moins celles qui sont « attractives »), on calcule les 200 premières valeurs de la suite, et pour ne garder que le comportement à long terme, on n'affiche que, disons, de  $x_{100}$  à  $x_{200}$ .



## Vers le chaos

- Après  $r = 1 + \sqrt{6}$ , on observe dans un premier temps une répétition du phénomène de bifurcation. On parle alors de **cascade** de doublements de période. Et à chaque fois le même processus.
  - Après la  $n$ -ième bifurcation, on a un cycle attractif d'ordre  $k=2^n$ , et  $(f^k)'$  vaut  $1$  sur ce cycle
  - Puis lorsque  $r$  croît encore, on passe par un cycle hyperstable, dont  $1/2$  fait partie
  - Enfin lorsque la dérivée arrive à  $-1$ , on a une nouvelle bifurcation.
- La distance entre deux bifurcations décroît très vite (en fait le quotient des distances successives tend vers la constante de Feigenbaum  $d = 4.66920\dots$ ).

## Le chaos

- Après  $r = 3.568\dots$ , les bifurcations laissent place au **chaos** : il n'y a plus convergence vers un cycle, et graphiquement les points  $x_{100}$  à  $x_{200}$  « remplissent » les intervalles où ils sont concentrés.
- On remarque aussi des « **fenêtres** » au milieu du chaos, où l'on a de nouveau convergence. Voir par exemple la partie 4.1 sur la fenêtre correspondant à  $r = 1 + \sqrt{8}$ .

## Le chaos mathématique

- Une fonction  $f$  est dite **chaotique sur I** si
  - $f$  est topologiquement transitive
  - $f$  est sensible aux conditions initiales
  - les points périodiques de  $f$  sont denses dans  $I$ .
- Avec:
  - $f$  est **topologiquement transitive** si quels que soient les ouverts  $U$  et  $V$  de  $I$ , il existe  $k$  tel que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$  : les itérés se « promènent » dans tout l'intervalle  $I$ .
  - $f$  présente une **sensibilité aux conditions initiales** s'il existe  $\delta > 0$  tel que  $\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[, \exists n, |f^n(x) - f^n(y)| > \delta$ . Deux points proches peuvent donc s'éloigner lors de l'itération par  $f$ , i.e. les calculs approchés perdent toute valeur.

## Le chaos pour $r=4$

- Pour  $r = 4$ , on peut relier  $f$  à l'application  $g: \theta \rightarrow 2\theta$  du cercle unité. Posons pour cela  $h(\theta) = (1 - \cos\theta)/2$ . On a alors:  
$$(h \circ g)(\theta) = (1 - \cos 2\theta) / 2 = 1 - \cos^2 \theta = 4 \left( \frac{1}{2} - \frac{\cos \theta}{2} \right) \left( \frac{1}{2} + \frac{\cos \theta}{2} \right) = (f \circ h)(\theta)$$
- $h$  n'est pas une conjugaison, car il lui manque l'injectivité, mais c'est une sorte de « semi-conjugaison », qui garde des propriétés intéressantes.
- On prouve que  $g$  est chaotique, puis on transpose vers  $f$ . Par exemple si  $U$  et  $V$  sont deux ouverts de  $I$ , on peut choisir deux ouverts  $U'$  et  $V'$  du cercle dont les images par  $h$  sont  $U$  et  $V$ .
- Et comme il existe  $k$  tel que  $g^k(U') \cap V' \neq \emptyset$  alors  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$

## Remarque

- Si  $x_n = x(t_n)$  et  $t = t_{n+1} - t_n$  avec  $x' = f(x)$
- Ceci conduit à l'approximation  $x_{n+1} \approx x_n + t \, dx/dt \approx x_n + t \, f(x_n)$ .
- On itère encore un trinôme du 2nd degré et la conjugaison topologique nous assure qu'on aura une dynamique similaire.

## Compléments théoriques

- Si  $f$  ne possède pas de 2-cycle, la suite récurrente est convergente.
- (Sarkowski) Au contraire si elle possède un 3-cycle, elle en possède de tous ordres.
- (Fatou) Si la suite possède un cycle attractif la suite itérée à partir de l'extremum de  $f$  prend, finalement, ses valeurs dans ce cycle.
- Dans le cas  $f(x) = rx(1-x)$ , cela revient à prendre  $x_0 = 1/2$ .