

Modélisation à l'aide des diagrammes de Voronoï : Réseau téléphonique, et autres applications

Sylvine Auclair-Semere
Martine Jacquin
Etienne Lakritz
Anne-Marie Sanchez

Sommaire

<i>Avertissement au lecteur.....</i>	<i>3</i>
<i>Introduction : Modélisation et réseau de téléphonie mobile.....</i>	<i>4</i>
<i>Chapitre 1- Une activité, en classe de 5^{ème} ou de 4^{ème}</i>	<i>5</i>
<i>Chapitre 2. Diagramme de Voronoï de n points. Le diagramme comme objet mathématique.</i>	<i>9</i>
<i>a) Définition du diagramme</i>	<i>9</i>
<i>b) Propriétés immédiates du diagramme de Voronoï.....</i>	<i>10</i>
<i>c) Le diagramme comme graphe.....</i>	<i>11</i>
<i>d) Triangulation de Delaunay.....</i>	<i>12</i>
<i>e) Un petit mot sur les algorithmes</i>	<i>13</i>
<i>f) Généralisations: choix d'espaces, de distances, de sites.....</i>	<i>15</i>
<i>Chapitre 3 - Problèmes, et applications.</i>	<i>17</i>
<i>Chapitre 4. Bilan : notre démarche et les difficultés rencontrées</i>	<i>20</i>
<i>Annexe 1: article accompagnant l'activité du chapitre 1.....</i>	<i>21</i>
<i>Annexe 2 : schémas accompagnant les alternatives à l'activité du chapitre 1</i>	<i>23</i>
<i>Bibliowebographie</i>	<i>24</i>

Avertissement au lecteur

Le texte qui suit présente notre démarche de découverte d'un bel outil de modélisation : les diagrammes de Voronoï.

A partir de la brochure d'une exposition, nous construisons un problème simplifié abordable au collège, illustrant la question du plus grand cercle vide dans une partie bornée du plan. Nous présentons ensuite succinctement quelques propriétés du diagramme de Voronoï, certaines de ses généralisations, et quelques unes de ses applications.

Il ne s'agit en aucun cas d'un traité sur les diagrammes de Voronoï, mais d'une simple porte ouverte sur un beau thème qui mérite d'être connu de nos collègues et dont certains aspects géométriques peuvent être utilisables dans l'enseignement secondaire. Il ne faut voir ici qu'une invitation à chercher.

Introduction : Modélisation et réseau de téléphonie mobile

Premier problème que nous nous sommes posé: pour mettre en place un réseau de téléphonie mobile, comment couvrir la plus grande aire possible avec un minimum d'antennes, sans perdre d'espace et en minimisant les recouvrements ?

Remarques préliminaires :

- L'idée est de réaliser un pavage de la zone concernée.
- Une première approche consiste à considérer les zones d'influence d'antennes égales et circulaires. C'est le problème des cercles dans le plan: la répartition serait alors hexagonale.

Contraintes :

En étudiant le problème de façon plus approfondie, on s'aperçoit qu'il est illusoire de chercher à créer à priori un modèle théorique qu'il suffirait ensuite d'installer sur place.

En effet, un certain nombre de contraintes existent :

- Le relief : il est préférable d'installer une antenne au sommet d'une colline plutôt que dans une vallée.
- La réalité géographique et l'urbanisation : existence de forêts, de lacs, de constructions qui sont autant d'endroits où on ne peut pas implanter d'antenne.
- La densité démographique et l'importance de la demande.
- Les nuisances pour les riverains (interdiction de les implanter à proximité d'une école)

L'emplacement d'un certain nombre d'antennes est donc de fait quasiment déterminé par avance.

Nouveau problème :

Un certain nombre d'antennes existent et sont situées à des endroits clefs.

- Faut-il en rajouter ?
- Si oui, où les installer ?

Problèmes similaires

De façon plus générale, on cherche donc à représenter les **régions d'influence** d'un certain nombre d'emplacements. Le problème précédent fait donc partie d'un ensemble de problèmes voisins :

- En téléphonie fixe : il ne s'agit plus d'antennes mais de commutateurs téléphoniques. Lorsque la demande augmente on cherche à ajouter un ou plusieurs commutateurs. Où les placer ? C'est d'ailleurs ce problème, sous forme simplifiée, que nous avons choisi de proposer à des élèves de collège, en lien avec la brochure d'une exposition de l'Unesco.
- «Restaurants» MacDonald's : il s'agit de rechercher le meilleur endroit possible pour ouvrir un nouveau site : il faut se situer aussi loin que possible des restaurants existants.
- Implantation d'une usine d'incinération : elle devra être située aussi loin que possible des usines existantes.

Chapitre 1- Une activité, en classe de 5^{ème} ou de 4^{ème}

a. L'activité

Toutes les compétences abordées dans cette activité font partie du programme de 5^{ème}.
Suivant le niveau de la classe, on pourra la traiter en 5^{ème} ou en 4^{ème}, à l'occasion du chapitre sur les droites remarquables par exemple.

Lecture d'un extrait de l'article « Téléphonie fixe, liaisons fatales »

De « Aujourd'hui » à « la théorie des graphes. »

Voir texte en annexe.

Problème :

Des points sont placés dans un plan, ou plutôt dans une zone bornée du plan, ici le rectangle de la feuille de papier. Chacun représente un commutateur téléphonique pouvant atteindre un certain nombre d'abonnés. La demande augmente dans la zone.

Où ajouter un ou plusieurs commutateurs ?

On suppose que les zones d'influence sont circulaires, on cherche les centres des zones, les plus grandes possibles, sans commutateurs à l'intérieur. Cela revient à **trouver les centres des plus grands cercles vides** entre ces points.

.Phase 1 : avec trois commutateurs

Par commodité, on suppose la zone infinie pour le moment.

Soient trois points A, B et C non alignés, qui représentent trois commutateurs.

A
x

B
x

C x

1. Tracer un cercle vide C_1 passant par le point A.

Remarque : il s'agit de vérifier la compréhension de « cercle vide »

2. Tracer un cercle vide C_2 passant par les points A et B.

Où se trouve son centre ?

...Remarque : prévoir une aide pour certains.

3. En déplaçant le centre sur cette droite, trouver le plus grand cercle vide possible C_3 .
Quel est ce cercle ? Où se trouve son centre ?

.....
.....
Remarque : la zone est limitée, on trace les médiatrices des segments concernés jusqu'aux frontières de la zone.

4. Intermède : rappel sur les médiatrices

Dire qu'un point M du plan est situé sur la médiatrice d'un segment $[AB]$, c'est dire que M est à égale distance des points A et B.

On admet que la médiatrice d'un segment $[AB]$ partage le plan en deux demi-plans, l'un contenant A et l'autre B de telle sorte que tout point M du demi-plan contenant A est plus proche de A que de B, et réciproquement.

5. Sur la figure de départ, placer
- Un point M tel que : $AM < BM$ et $AM < CM$
 - Un point N tel que : $CN < AN$ et $CN < BN$
 - Un point P tel que : $BP < AP$ et $BP < CP$
6. Colorier en rouge la région où peut se trouver le point M
en vert celle où peut se trouver le point N
en bleu celle où peut se trouver le point P.
7. Repasser en rouge les trois demi-droites qui délimitent ces trois régions.

C'est le **diagramme de Voronoï des points A,B et C**.

Retour au problème posé

Le diagramme de Voronoï nous indique où placer le nouveau commutateur : sur le sommet O.

.Phase 2 : avec 4 commutateurs

Soient A, B, C et D 4 points du plan, qui représentent 4 commutateurs.

A
x

B
x

x D

C x

On peut supposer ou non la zone délimitée par un cadre.

1. Tracer les cercles circonscrits aux triangles ABC, ABD, ACD et BCD.

Remarque : on évitera de tracer les triangles pour ne pas surcharger la figure.

2. Lesquels sont vides ? Nommer I, J K et L leurs centres.

Remarque : suivant la position des points, il peut y avoir de 1 à 4 centres de cercles vides.

3. En utilisant la phase 1 et ce qui précède, tracer le diagramme de Voronoï des points A, B, C et D.
4. Répondre au problème.

.....
.....

Lecture d'un extrait de l'article « Téléphonie fixe : liaisons fatales »

De « plaçons nous dans le cadre » à « mon correspondant. »

Nouveau problème

Nous restons dans le contexte de la figure de la phase 2.

Le diagramme de Voronoï nous permet de visualiser le réseau téléphonique, par exemple sur le plan d'une ville, et d'identifier les différentes zones de raccordements.

On s'intéresse maintenant à la partie câblage : les commutateurs de deux régions voisines sont reliés par câble. Un abonné se trouve dans la zone de raccordement du commutateur A. Il veut joindre un abonné qui se trouve dans la zone de raccordement de D.

Tracer les segments qui matérialisent les câbles.

Quels sont les différents chemins que peut suivre cet appel ?

.....

Le réseau de câbles matérialise ici un autre pavage du plan, lié à celui de Voronoï, nommé triangulation de Delaunay.

b. Alternative à l'activité ci-dessus.

Sur la figure n°1, on considère un ensemble de sites (ou points).

Sur la figure n°2, le diagramme de Voronoï de cet ensemble de sites a été construit.

On peut y faire vérifier un certain nombre de propriétés :

- Se placer dans une cellule de Voronoï (ou un polygone), vérifier que les points de cette cellule sont plus proches du centre de la cellule (site) que de n'importe quel autre centre.
- Vérifier qu'un côté d'une cellule de Voronoï (ou d'un polygone) est la médiatrice de deux sites (ou centres).
- Vérifier qu'un sommet d'une cellule de Voronoï (ou d'un polygone) est le centre d'un cercle passant par trois sites, donc le centre d'un cercle circonscrit.

- Vérifier que ces cercles circonscrits ne contiennent aucun autre site.

Sur la figure n°3, la triangulation de Delaunay de cet ensemble de sites a été construite.

- Vérifier que les segments ont été obtenus en joignant deux sites (ou points) appartenant à des cellules voisines.
- Vérifier que les cercles circonscrits aux triangles ont pour centres des sommets de cellules de Voronoï, et qu'un cercle ne contient aucun autre site (ou points).

Ces quelques vérifications permettent une première approche des deux notions qui vont être développées plus théoriquement :

Un diagramme de Voronoï d'un ensemble de sites est une partition du plan.

Cette partition se compose de :

Régions : l'ensemble des points du plan plus proches d'un site que de tous les autres

Côtés : l'ensemble des points du plan équidistants de deux sites

Sommets : l'ensemble des points du plan équidistants de trois sites.

Le diagramme de Delaunay dual est une partition se composant de :

Sommets : l'ensemble des sites

Côtés : les segments joignant deux sites s'ils appartiennent à des polygones voisins

Régions : l'intérieur des triangles formés par les côtés de Delaunay.

Chapitre 2. Diagramme de Voronoï de n points. Le diagramme comme objet mathématique.

Georgi Feodossevitich VORONOÏ est un mathématicien russe né en Ukraine à Jouravka en 1868, mort à Varsovie en 1908. Il étudie à l'université de Saint Petersburg jusqu'en 1889 ; puis il est nommé professeur à l'université de Varsovie alors sous la domination des tsars.

Problème:

Soit S un ensemble de n points du plan E , $n \geq 3$,

Il s'agit de décomposer l'espace en régions autour de chaque point p de S , telles que tous les points dans la région contenant p soient plus près de p que de n'importe quel autre point de S .

Il s'agit donc de s'intéresser aux médiatrices de points voisins de S .

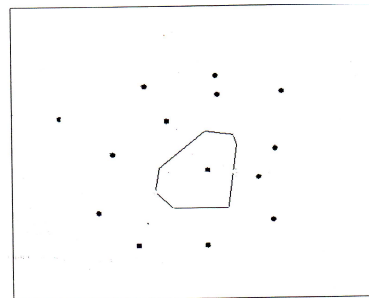
a) Définition du diagramme

- La médiatrice des points p et q sépare le plan en deux **demi-plans** ; on note $D(p,q)$ le demi-plan contenant p . $D(p,q) = \{M \in E, d(p,M) < d(q,M)\}$, où d représente la distance euclidienne.
- la **région (ou cellule)** de Voronoï du point p est

$$R(p) = \bigcap_{q \in S} D(p,q)$$

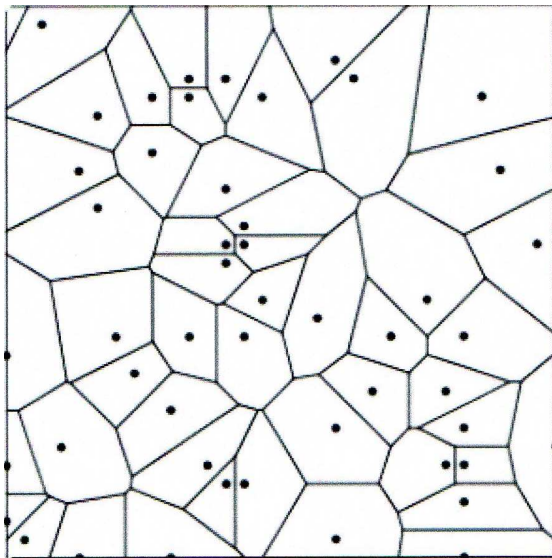
On a alors

$$R(p) = \{M \in E, \forall q \in S, d(M,p) < d(M,q)\}$$



- Le **diagramme** de Voronoï est

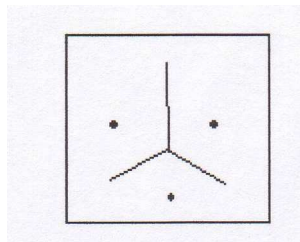
$$D = \bigcup_{p,q \in S} \overline{R(p)} \cap \overline{R(q)}$$



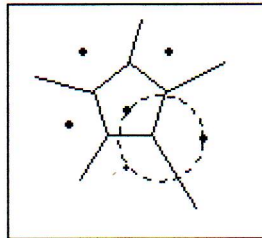
La frontière commune à deux régions de Voronoï s'appelle une arête de Voronoï. Il s'agit d'une portion de la médiatrice de deux points de S . Les extrémités des arêtes sont les sommets de Voronoï.

b) Propriétés immédiates du diagramme de Voronoï

- Chaque région de Voronoï est un polygone convexe.
Il s'agit en effet de l'intersection d'ensembles convexes : des demi-plans.
- Le diagramme de Voronoï de n points partitionne donc le plan en polygones convexes : chaque polygone contient exactement un point de S et chaque point d'un polygone est plus près de son point central que de tout autre.
- Tout sommet de Voronoï est de degré au moins 3 (plus de trois si plus de 3 points voisins sont cocycliques).



- Pour chaque sommet du diagramme de Voronoï, le cercle passant par les points de S voisins de ce sommet ne contient aucun autre point de S .



- Si on imagine des cercles dont le rayon augmente à la même vitesse, centrés aux points de S , un point x est atteint par un, deux ou trois cercles selon qu'il est à l'intérieur d'une région, sur une arête ou à un sommet de Voronoï.
- Les centres des grands cercles vides sont alors les sommets du diagramme de Voronoï

Le diagramme de Voronoï définit donc bien une partition du plan, chaque zone étant définie comme l'ensemble des points les plus proches d'un point donné.

c) Le diagramme comme graphe

Le diagramme de Voronoï est un **graphe planaire** :

Définition: un graphe planaire est un graphe qui peut être dessiné de sorte que les arêtes ne se croisent pas (si deux arêtes se croisent, c'est à une extrémité de chacune).

Ce qui revient à dire qu'on associe à chaque sommet du graphe un point du plan.

Les questions concernant ces graphes sont souvent de nature géométrique :

Une représentation plane du graphe découpe le plan en régions appelées **faces**. Une seule d'entre elles n'est pas bornée: la face extérieure, les autres ont une aire finie. Les **arbres** sont les graphes planaires n'ayant qu'une face.

Propriété : soit G un graphe planaire connexe d'ordre n ayant m arêtes.

Si f est le nombre de faces, on a :

$$n+f=m+2$$

C'est la **formule d'Euler** .

On peut prouver en particulier à partir de cette formule le résultat suivant:

Propriété : Considérons un diagramme de Voronoï dont les r points sont choisis au hasard: le nombre moyen de côtés des régions de Voronoï est **inférieur à 6**, et tend vers 6 quand r tend vers $+\infty$.

Preuve : A chaque sommet arrive au moins 3 arêtes, et il y a $2m$ arêtes incidentes (on compte chaque arête deux fois, c'est la somme des nombres de côtés des faces) donc $2m \geq 3n$.

En reportant dans la relation $n+f=m+2$, on obtient

$$2m \geq 3m + 6 - 3f \text{ donc } m \leq 3f - 6$$

De plus, on a $f = r + 1$ (autant de faces que de sites + la face extérieure) donc $m \leq 3r - 3$ donc $2m \leq 6r - 6$.

En divisant par le nombre de régions $r+1$, on a le nombre moyen d'arêtes par face

$$\lambda = \frac{2m}{r+1} \leq 6 \frac{r-1}{r+1} \leq 6$$

Et si l'on considère $2m \approx 3n$, on obtient $\lambda \approx 6 \frac{r-1}{r+1}$ qui tend vers 6 quand r tend vers $+\infty$.

On définit alors le :

Dual d'un graphe planaire :

A un graphe planaire, on associe un autre graphe, appelé **dual** du premier de la manière suivante: on choisit dans chaque face un point (ce seront les sommets du dual) et on joint deux de ces points par un arc chaque fois que les faces qui les contiennent ont une arête commune.

Le dual d'un diagramme de Delaunay est une notion fort utile, qui fait l'objet du paragraphe suivant :

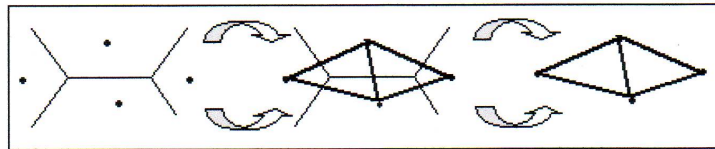
d) Triangulation de Delaunay

Boris Nikolaïevitch Delaunay était un autre mathématicien russe, il est né en 1890 et mort en 1980. Son nom a été francisé et il a publié des travaux en français.

Il a repris le travail de Voronoï, l'a formalisé et étendu. Ses travaux sur la triangulation datent des années 1930.

Soit S un ensemble de n points.

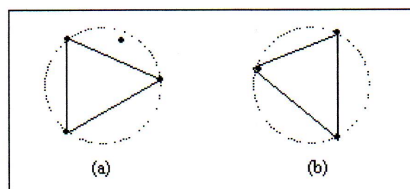
- Un **pavage de Delaunay de S (Delaunay tessellation)** est obtenu de la manière suivante: **deux points de S sont reliés par une arête s'ils sont dans des régions de Voronoï ayant une arête commune.**



- On montre que ceci équivaut au critère suivant: deux points de S sont reliés s'il existe un cercle contenant ces deux points sur sa frontière et aucun autre point de S sur sa frontière ou dans son intérieur.

On a alors les résultats suivants :

- On appelle **triangulation** un graphe planaire auquel on ne peut ajouter d'arête sans couper une arête existante. Le pavage de Delaunay de S est une triangulation s'il n'y a jamais 4 points de S cocycliques.
- S'il n'y a jamais 4 points cocycliques dans S , le **dual** du diagramme de Voronoï est la triangulation de Delaunay de S .
- Trois points de S donnent un triangle de Delaunay si leur cercle circonscrit ne contient aucun point de S en son intérieur.



a) non Delaunay b) Delaunay

- La triangulation de Delaunay est parmi toutes les triangulations de S celle qui maximise l'angle minimum de tous les triangles.

Voir encart page suivante

e) Un petit mot sur les algorithmes

Les diagrammes de Voronoï sont principalement décrits dans des ouvrages ou des textes de Géométrie algorithmique (computational geometry).

On y trouve par exemple des notations comme :

« la puissance des diagrammes de Voronoï repose sur *ses propriétés structurelles, l'existence d'algorithmes efficaces, et leur capacité d'adaptation* »

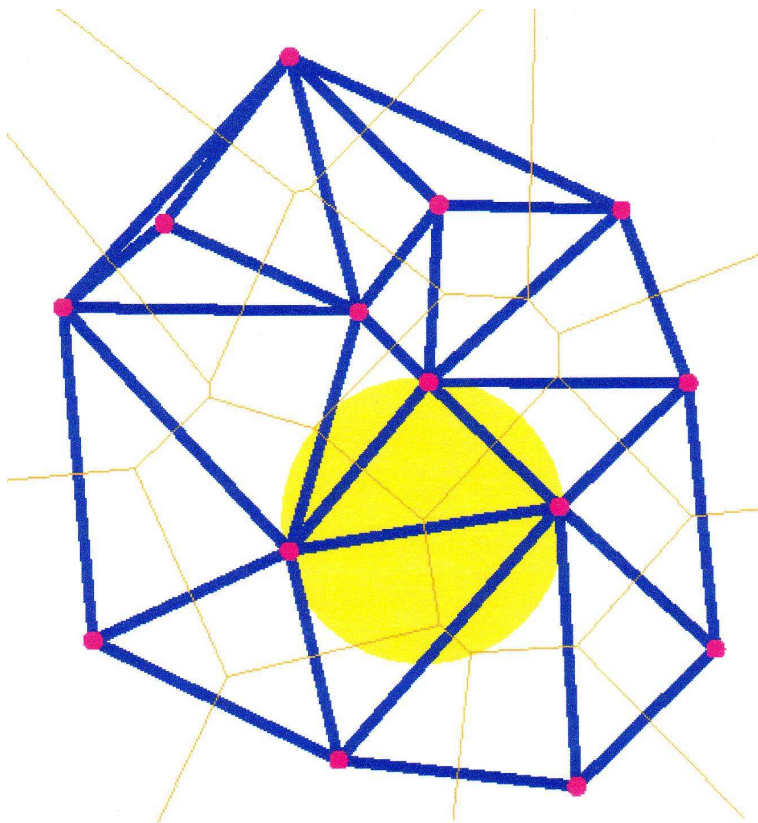
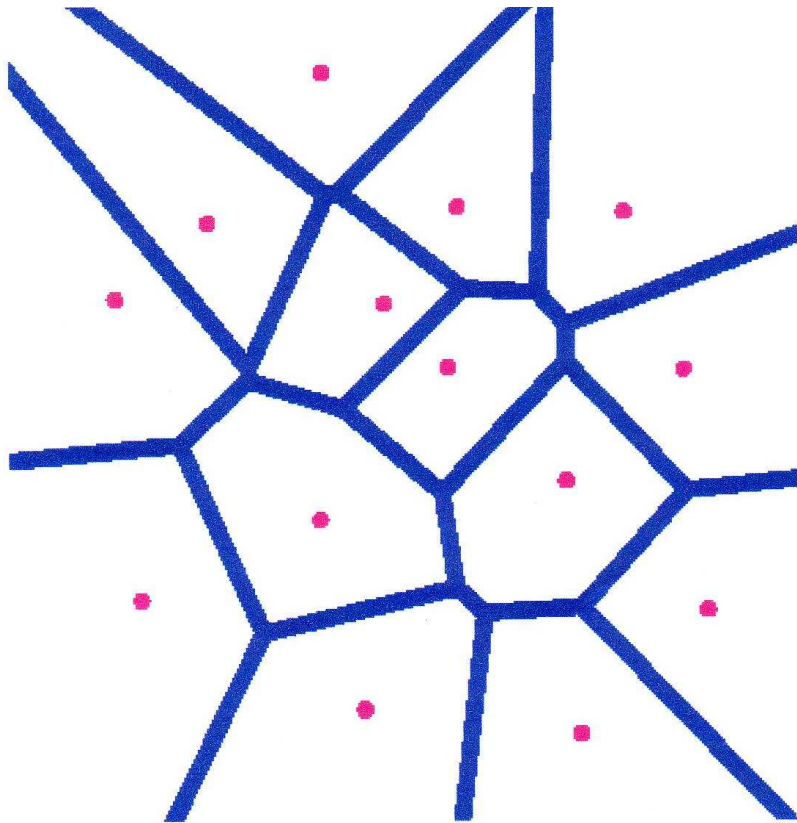
Divers algorithmes existent dans la littérature, entre autres :

- l'algorithme incrémental: on construit le diagramme pour p points à partir du diagramme pour $p-1$ points ; plutôt utilisé pour construire la triangulation de Delaunay, de laquelle on déduit le diagramme de Voronoï
- l'algorithme « diviser pour régner » : on divise l'ensemble des points en deux et on construit le diagramme de manière récursive sur les deux sous-ensembles, il faut ensuite pouvoir relier deux sous-diagrammes.

On montre que ces algorithmes sont en **$O(n \log n)$** pour n points.

Nous avons utilisé l'application « **Voroglide** », disponible sur Internet (cf. webographie), qui permet de créer des points dans le plan, visualiser le diagrammes de Voronoi, la triangulation de Delaunay et l'enveloppe convexe de cet ensemble, mais aussi de déplacer les points, et de visualiser la construction de la triangulation selon le critère du cercle vide.

Un exemple de diagramme de Voronoï et sa triangulation de Delaunay associée



f) Généralisations: choix d'espaces, de distances, de sites...

Les applications considérables des diagrammes de Voronoï ont occasionné de nombreuses généralisations que l'on trouve dans la littérature :

- **Dimension** : La définition se généralise en dimension supérieure à 2, en particulier sans difficulté en dimension 3, où les régions de Voronoï sont alors des polyèdres convexes.
- **Distance** : les diagrammes de puissance: ils nous concernent particulièrement ici, puisqu'ils s'appliquent aux problèmes d'antennes de téléphonie mobile.

Les diagrammes de Voronoï rendent compte des problèmes spatiaux de zone d'influence. Dans le diagramme de base, chaque point de l'ensemble S est d'égale influence. Pour exprimer des situations où **les sites sont d'influence différente** - de poids différent - , on change de distance.

On définit **les diagrammes de puissance de Voronoï** de la manière suivante: on affecte un poids $w(m)$ (positif ici) à chaque point m de S, et la distance d'un point x du plan au point m de S est remplacée par la puissance $p(x, m) = d(x, m)^2 - w^2$.

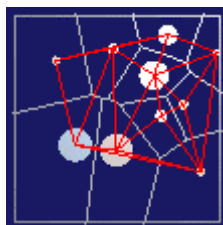
Interprétation géométrique :

Considérons le cercle de centre m et de rayon w . La distance $d(x, m)$ entre le point x extérieur au cercle et le point de contact d'une tangente issue de x au cercle est $\sqrt{p(x, m)}$. (d^2 est la puissance du point x par rapport au cercle, notion disparue des programmes mais qui peut tout de même être l'occasion d'activités en lycée).

Ce choix de distance est une manière de considérer **des sites circulaires** et non ponctuels.

Remarque : les régions de Voronoï de puissance sont encore des polygones. En effet la « médiatrice généralisée » de deux points m et m' , c'est -à-dire l'ensemble des x tels que $p(x, m) = p(x, m')$, ou $d(x, m)^2 - w^2 = d(x, m')^2 - w'^2$ est encore une droite, et une région reste une intersection de demi-plans.

Si l'on avait pris pour distance point-cercle la plus court distance $d(x, m) - w$, la situation serait moins plaisante...



Exemple de diagramme Voronoï + Delaunay de puissance.

- On peut encore généraliser le nombre de points de proximité : une région de Voronoï d'ordre k est l'ensemble des points les plus proches de k points de S.
- Et **généraliser les sites** de S: on considère que les éléments de S, les sites, ne sont plus des points mais **des segments, ou des polygones** (c'est ce que l'on utilise par

exemple en robotique), ou des cercles (c'est le cas des diagrammes de puissance). Que sont alors, pour des sites polygonaux, les diagrammes de Voronoï ?

- On peut généraliser aussi l'espace: diagrammes sur une sphère (les médiatrices sont des grands cercles), sur un cône..

Chapitre 3 - Problèmes, et applications.

a) Types de questions

Les diagrammes de Voronoï et les triangulations de Delaunay permettent de répondre, en particulier de manière algorithmique, à de nombreux types de problèmes :

- Problème du plus proche voisin: étant donnés n sites dans le plan, trouver le plus proche d'un point x donné. C'est le problème des commutateurs, entre autres: il s'agit de repérer le commutateur dont une personne dépend, ou la région de Voronoï à laquelle appartient un point donné.
L' algorithme consiste à repérer le point qui nous intéresse par rapport aux coordonnées des nœuds du diagramme de Voronoï des n sites.
- Autre problème de voisin le plus proche: trouver pour un point d'un ensemble S , le point de S le plus proche : il fait partie des points dont la région de Voronoï a une arête commune avec celle du point considéré. On peut ainsi trouver la paire de points la plus proche dans un ensemble S .
- Problème du plus grand cercle vide: c'est notre problème initial : insérer un nouveau commutateur, une nouvelle antenne à l'endroit le moins desservi par n sites déjà présents, ou un nouveau restaurant d'une chaîne, mais aussi placer un nouveau site le plus loin possible de n nuisances: recherche du plus grand cercle ne contenant aucun point de l'ensemble: le centre est à un sommet de Voronoï, ou à un sommet de la frontière, ou à l'intersection d'une arête ou de la frontière.
- Problème du plus petit cercle contenant n points: placement d'une usine pour ses clients, de l'émetteur le moins puissant pour atteindre n sites.
- La triangulation de Delaunay permet de résoudre des problèmes de chemins minimaux, etc.

b) Exemples d'applications

L'ensemble des applications des diagrammes de Voronoï et de la triangulation de Delaunay est **considérable**: problèmes de zones d'influence, de distance entre objets (nous avons vu des exemples d'antennes téléphoniques, commutateurs téléphoniques, nouvelles installations ou suppressions de restaurants, bureaux de poste ou hôpitaux), de trajectoire, de formes...

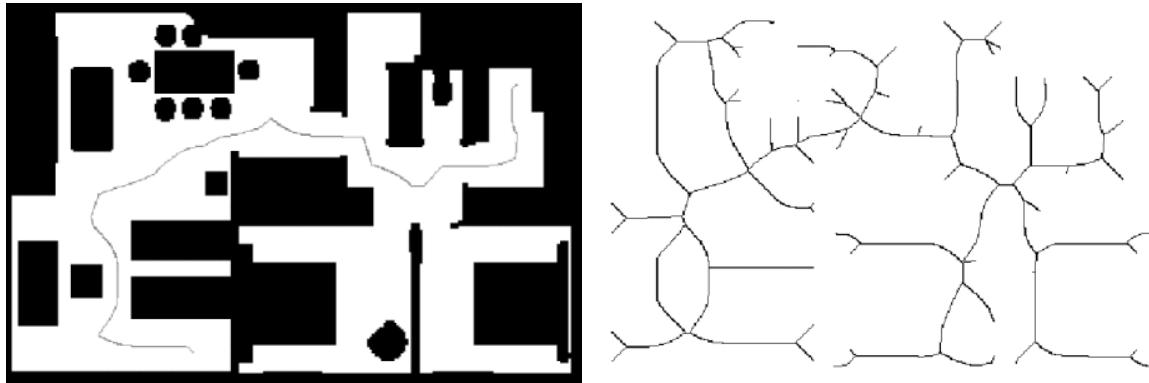
Quelques exemples, parmi de nombreux autres:

* Géographie : Frontière maritime :

Définition: en l'absence d'autres circonstances, « la frontière maritime est la ligne médiane, pour laquelle chaque point est équidistant des points les plus proches des lignes de base à partir desquelles est mesurée la largeur des mers territoriales de chaque état » (Convention de Genève 1958, citée dans www.fig.net/pub/fig_2003/TS_20/PP20_1_Cosquer_Hangouet.pdf) C'est précisément la définition d'un chemin dans un diagramme de Voronoï.

*** Déplacement d'un robot :** comment un robot doit-il se déplacer d'un point à un autre en se situant à la plus grande distance possibles d'obstacles, représentés par des segments ou des polygones ? La distance minimale du robot aux obstacles à chaque instant doit être maximale; en gros, cela implique que le robot suive des arêtes (droites ou non) du diagramme de Voronoï des obstacles.

Exemple : obstacles, trajectoire du robot, et diagramme de Voronoï des obstacles.



Source Internet: laboratoire des systèmes complexes, Evry, projet Armagra.

*** Imagerie médicale:** Diagrammes ou triangulations sont également utilisés dans le domaine de l'imagerie médicale, où les données sont souvent constituées par une série de coupes parallèles. Après avoir extrait dans chaque coupe les contours de l'objet à reconstruire, il est possible de construire une triangulation de chaque tranche de cet objet comprise entre deux coupes successives. Puis en traitant toutes les paires de coupes successives, on obtient une représentation volumique de l'objet.

*** Biologie : Croissance des plantes:** les diagrammes de Voronoï, en particulier les diagrammes de puissance, sont utilisés pour étudier la croissance d'un ensemble de plantes dans un milieu. Chaque espèce obéit à des règles de croissance propre, qui définit en particulier le rapport entre l'espace qu'elle peut occuper et le volume de la plante. Le diagramme permet d'étudier les possibilités de développement d'une espèce dans un milieu, et ses conséquences sur ce milieu.

Une curiosité pour finir :

*** La girafe réticulée**

De manière étonnante, les diagrammes de Voronoï apparaissent dans la nature, par exemple, sur le cou d'une girafe réticulée ou sur la carapace d'une tortue.

Observons une girafe réticulée :



Source Internet : [//solene.ledantec.free.fr/Animaux/Reticulee.htm](http://solene.ledantec.free.fr/Animaux/Reticulee.htm)

On a pu montrer que ce motif est effectivement de Voronoï avec une approximation satisfaisante, et on trouve une proposition d'un modèle biologique qui rend compte de ce phénomène, où deux types de cellules ont une vitesse de division différente, l'un des deux types de cellules repoussant l'autre selon un phénomène de « feu de prairie » qui construit un diagramme de Voronoï.

Source pour la modélisation : [//www.inf.unisinos.br/~marcelow/papers/gi98/cm.pdf](http://www.inf.unisinos.br/~marcelow/papers/gi98/cm.pdf)

Chapitre 4. Bilan : notre démarche et les difficultés rencontrées

Choix du sujet et doutes.

Nous avons hésité entre deux démarches :

- Partir d'une théorie mathématique connue, du moins partiellement, par exemple les fractales et chercher une situation à modéliser grâce à cette théorie.
- Partir d'une situation concrète à modéliser sans savoir ni connaître à priori de quelles notions nous aurions besoin.

Nous avons finalement opté pour la deuxième démarche malgré de nombreux doutes. En effet, le sujet nous paraissait très vaste, trop difficile, nous manquions de documentation et surtout de connaissances à ce propos.

A posteriori, il est intéressant de remarquer pour un formateur que :

Les professeurs sont habitués à parler de ce qu'ils connaissent.

Un cours traditionnel part de définitions pour aller vers les applications.

Il nous a été difficile dans un premier temps de faire la démarche inverse.

Le problème retenu : réseau de téléphone.

Ce problème, très séduisant, a de nombreux avantages :

- Il permet de réinvestir des notions géométriques simples : médiatrices et cercles, dès la cinquième.
- Attractif pour les élèves : le téléphone fait partie de leur quotidien.
- Nombreuses applications, sans doute inattendues pour les élèves : MacDonald's

Recherche documentaire

En l'absence de connaissances sur le sujet, nous avons eu recours exclusivement, du moins dans un premier temps, à Internet et rencontré des difficultés pour cerner notre problème.

- Beaucoup de documentation possible.
- Documents souvent descriptifs et peu utilisables.
- Les définitions sont parfois contradictoires
- De nombreux documents sont destinés à des lecteurs connaissant le sujet.
- En lisant en anglais on trouve les bases...
- On trouve de remarquables d'« applets », toutes faites et très pratiques.

Nous avons alors eu besoin de beaucoup de temps pour nous approprier le sujet.

En nous appuyant sur le groupe, en définissant l'article sur la téléphonie comme point de départ et en élargissant la recherche aux documents en anglais, nous avons pu, en fin de compte, construire un dossier qui nous semblait cohérent.

L'expérience peut nous aider :

- En temps que professeur pour mieux guider des élèves dans une recherche.
- En temps que formateur pour alerter et informer les stagiaires.

Pour conclure: ce travail fut de grand intérêt, après un démarrage laborieux. Nous avons découvert un outil mathématique relativement récent, lié à la théorie des graphes, ayant des applications considérables, variées et actuelles.

Annexe 1: article accompagnant l'activité du chapitre 1

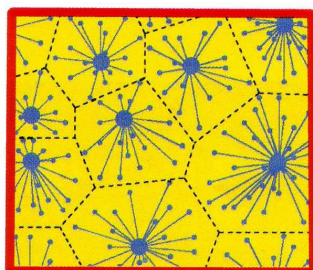
Téléphonie fixe : liaisons fatales

Extrait de la brochure : « Pourquoi les mathématiques ?, experiencing mathematics » accompagnant une exposition internationale réalisée à l'initiative de l'UNESCO présentée à Paris en 2004.

Les mathématiques coupent les fils en quatre

Au début, le nombre d'abonnés est suffisamment restreint pour les raccorder physiquement par des câbles les uns aux autres. Mais pour chaque nouvel abonné, il faut installer des lignes vers tous les autres. Cette approche est très vite devenue impraticable. La solution trouvée consiste à relier chaque abonné par une seule ligne vers un centre de commutation où des opératrices, choisies à l'époque pour leur moralité au-dessus de tout soupçon, établissaient les connexions, entre abonnés d'un même secteur, ou entre l'abonné et l'opératrice du secteur dont dépend la personne appelée. Les différents centraux sont reliés par des câbles, comme ils le sont aujourd'hui, d'ailleurs. Pour la petite histoire, des concours d'efficacité étaient organisés pour améliorer la qualité du service. Le record frôlait les 400 connexions par heure, ce qui correspond à une communication toute les dix secondes... Heureusement, ce métier bien répétitif n'existe plus ! Les étapes de connexion sont désormais automatiques, via des commutateurs électroniques, mais grosso modo, le principe est resté le même.

Fig. 1 - Pavage de Voronoï



- - Les commutateurs
- - Les abonnés
- les câbles
- Les frontières des zones de raccordement

Aujourd'hui, chaque fois que je passe un coup de fil, ma demande est transmise par des câbles au commutateur téléphonique le plus proche de mon domicile. Tous les commutateurs de la région sont reliés entre eux et se passent l'information de proche en proche jusqu'à arriver au commutateur le plus proche du domicile de mon correspondant.

Ce dernier relais va « ordonner » à son téléphone de sonner.

Mais les opérateurs du téléphone sont confrontés à plusieurs problèmes. En premier lieu, un commutateur ne peut pas gérer un trop grand nombre d'appels simultanés et il est difficile de déterminer le nombre de fils dans les câbles interurbains reliant les centres de commutation. La modélisation mathématique du réseau et le recours aux statistiques et aux prévisions du trafic permettent aux opérateurs des télécommunications de mener à bien leur mission... même si, de temps à autre, une voix suave martèle, *par suite d'encombrements, nous ne pouvons donner suite à votre appel !*

Pour la construction du réseau, et la détermination du nombre de fils des câbles, la priorité est donnée aux communications locales. En effet, les abonnés communiquent surtout avec des abonnés proches géographiquement, puis avec des abonnés d'une autre localité du même pays. En dernier, viennent les communications internationales. On appelle *commutation de circuits* le système qui consiste à relier deux postes par un *circuit* composé de plusieurs morceaux de fils. Et lors d'une conversation, même si vous restez muet comme une carpe, vous mobilisez un circuit entier. L'opérateur doit anticiper pour que ces circuits soient gérés de façon optimale et que le réseau dispose d'une géométrie variable, pour affronter les besoins futurs. S'il faut rajouter des commutateurs, où devra-t-il le faire, et en quel nombre ? Le domaine des mathématiques qui permet de construire un tel réseau s'appelle la théorie des graphes. [cf. encadré]

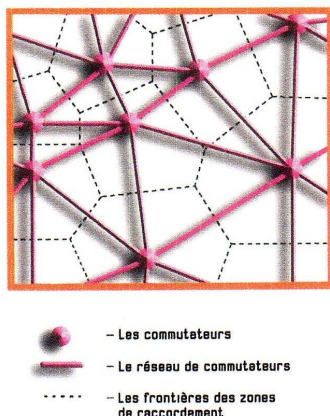
Plaçons nous dans le cadre d'une ville puisque les communications locales sont les plus nombreuses et considérons un modèle réaliste de celle-ci, en l'occurrence, son plan. On choisit de placer les commutateurs téléphoniques au hasard sur la carte ! En effet, si on avait préféré les disposer de manière précise, en respectant la topologie préexistante des rues, on se retrouverait devant un nombre si imposant de paramètres qu'on ne pourrait plus faire aucun calcul sur le modèle obtenu. Paradoxalement, en mathématiques, il est parfois plus simple

de faire des calculs avec un ensemble de points répartis aléatoirement, à condition de leur imposer globalement certaines règles. Les règles qui suivent permettent de définir le « modèle mathématique » du réseau sur lequel les opérateurs du téléphone vont pouvoir œuvrer.

Quelles sont-elles ? N'importe quel abonné est supposé pouvoir téléphoner à n'importe quel autre, n'importe quand. Donc, quelle que soit sa position dans la ville, un abonné doit avoir autant de chances de rencontrer un commutateur dans un rayon de 100 mètres, par exemple. Lorsqu'il se promène le long d'une rue, le nombre moyen de commutateurs est proportionnel à la longueur de la rue. Enfin, ce n'est pas parce qu'il habite tout près d'un commutateur que son ami a moins de chances d'en avoir un, tout près de chez lui.

Répartissons maintenant les utilisateurs de lignes. A un instant t , on ne peut pas savoir où se trouve chaque personne qui téléphone. On va donc les disposer, elles aussi, au hasard sur la carte de la ville, en leur imposant les mêmes conditions sur l'aléatoire que pour les commutateurs. Mais on suppose, de plus, que les positions des personnes sont indépendantes des positions des commutateurs.

Fig 2- Triangulation de Delaunay



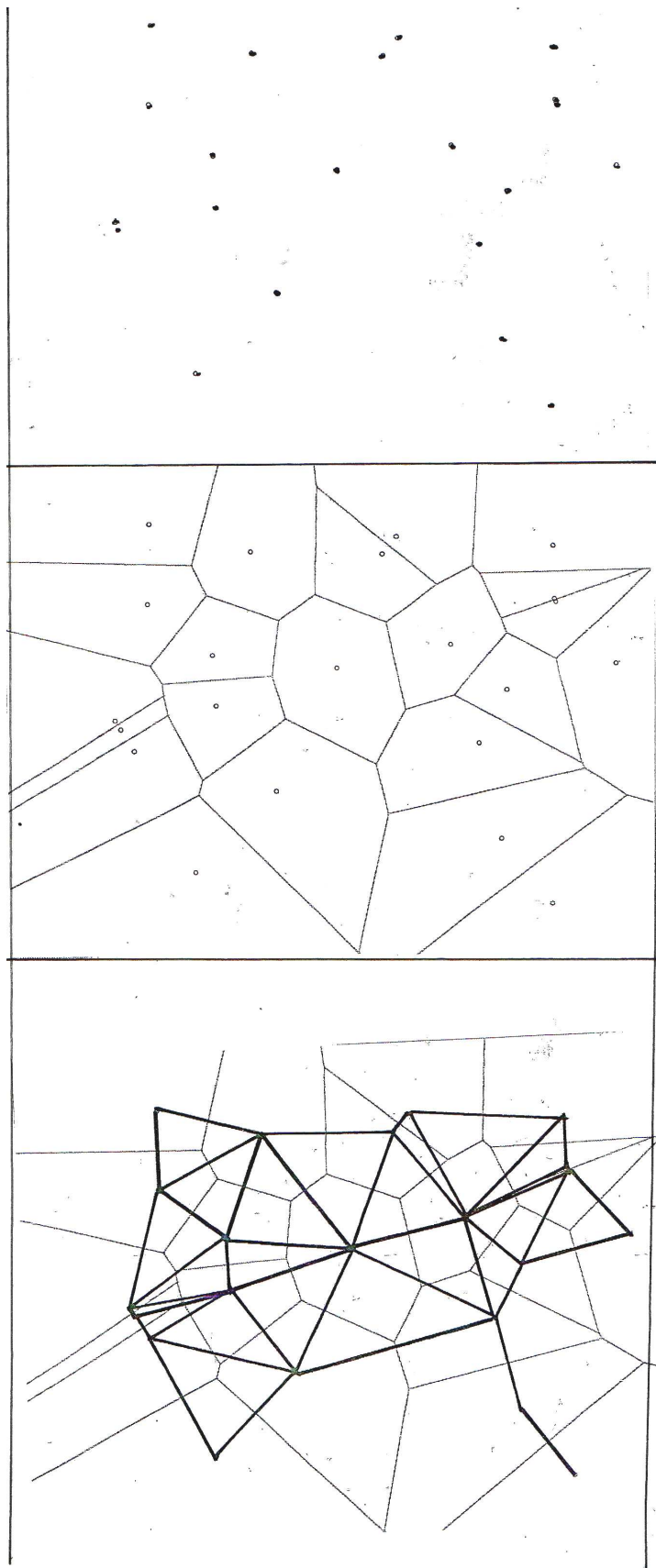
La répartition précédente des commutateurs et des abonnés produit deux découpages géométriques du plan de la ville, distincts, et réalise, en première approximation, le réseau téléphonique de l'agglomération.

Ainsi, chaque commutateur dessert une zone précise de la ville, où chaque abonné est plus proche de ce commutateur que de n'importe quel autre. Cette zone dite de raccordement est délimitée par les médiatrices des segments reliant ce commutateur à chacun des autres. Chaque zone est donc associée à un polygone convexe dont l'ensemble fournit un pavage du plan de la ville, appelé mosaïque de Voronoï (Fig. 1).

Par ailleurs, si on relie tous les commutateurs voisins, le plan est alors pavé par une autre mosaïque dite triangulation de Delaunay (Fig. 2). Lorsque je téléphone, mon appel est transmis au commutateur qui gère la zone de raccordement dans laquelle je me trouve. Les deux découpages précédents optimisent le chemin que doit suivre mon appel avant d'arriver chez mon correspondant. Les commutateurs communiquent le long des câbles représentés par la mosaïque de Delaunay jusqu'à ce que le message atteigne la zone dans laquelle se trouve mon correspondant.

Actuellement, des mathématiciens étudient des modèles de graphes plus complexes, pour les besoins de la téléphonie mobile entre autres, où pavages de Voronoï et triangulation de Delaunay varient de manière aléatoire. Les mathématiciens ne cessent de jouer les Ariane pour que téléphoner soit simple comme un coup de fil !

Annexe 2 : schémas accompagnant les alternatives à l'activité du chapitre 1



Bibliowebographie

De nombreux sites ont été consultés, les références suivantes sont celles qui ont principalement inspiré ce qui précède :

Le site www.voronoi.com, de Chris Gold, répertorie une quantité impressionnante de références sur les diagrammes de Voronoï, aussi bien sur la théorie que les applications.

Unesco: « Experiencing mathematics », brochure d'une exposition de l'Unesco sur les mathématiques (actuellement en Chine après Paris). Site : www.mathex.org
Contient le texte que nous faisons lire aux élèves

Aurenhammer et Klein: Voronoï diagram. www.pi6.fernuni-hagen.de/publ/tr198.pdf
Contient toute la théorie dont nous avons eu besoin

Aichholzer et Aurenhammer: Voronoï diagrams, computational geometry favourite.
www.igi.tugraz.at/telematik/tele1-02_aich-favor.pdf
Complète utilement le précédent article

Baert : Réseaux cellulaires de Voronoï. [//isdml.univ-tln.fr/PDF/isdml13/isdml13a113_baert.pdf](http://isdml.univ-tln.fr/PDF/isdml13/isdml13a113_baert.pdf)
L'article sur les réseaux d'antennes par lequel nous avons débuté notre démarche

Cogis O. et Robert Cl.: Théorie des graphes. Vuibert. 2003.
Un chapitre sur les graphes planaires

Enfin l'applet : Christian Icking, Rolf Klein, Peter Köllner, Lihong Ma: site de l'applet Voroglides, www.pi6.fernuni-hagen.de/GeomLab/VoroGlide/index.html.en