# GÉOGRAPHIE

1. **Peut-on colorier la carte de l'Union Européenne avec deux couleurs de sorte que deux pays ayant une frontière commune ne soient pas de la même couleur ?**
   Non.
2. **Et avec trois couleurs ?**
   Non.
3. **Que représentent les sommets (points) et arêtes (traits) de ce graphe ?**
   Les sommets sont les pays et les arêtes joignent deux pays ayant une frontière commune. C'est un dessin abstrait : la longueur des arêtes ne représente rien, la position des sommets non plus.
4. **Quelle figure sur le graphe rend le coloriage en deux couleurs impossible ?**
   Un triangle. Par exemple : France-Belgique et Luxembourg.
5. **Et avec trois couleurs ?**
   Une « roue » ayant un nombre impair de côtés, c'est-à-dire une suite de sommets, chacun joint au suivant, qui se referme (les côtés de la roue) et dont tous les sommets sont joints à un autre (le centre de la roue). Par exemple : France-Belgique-Allemagne-Luxembourg (le Luxembourg est le centre, les trois autres forment les côtés).
6. **Peut-on visiter, une fois et une seule, les villes désignées par un point rouge en allant de l'une à l'autre par une arête rouge ?**
   Oui, mais en général c'est un problème extrêmement difficile à résoudre, dès qu'il y a beaucoup de sommets, comme sur internet par exemple. On parle de chemin Hamiltonien quand un tel chemin existe, en l'honneur du mathématicien Sir William Rowan Hamilton.
   Allemagne-Pays Bas-Belgique-Luxembourg-France-Italie-Slovénie-Hongrie-Slovaquie-Pologne-Tchèquie-Autriche-Allemagne.
7. **Quelle est la longueur du plus petit chemin aérien passant par toutes les capitales de l'union européenne ?**
   C'est en général un problème complexe (NP-dur). Il existe cependant un algorithme explicite qui donne une réponse qui est « le plus souvent » la meilleure : l'algorithme de Métropolis. Il consiste à partir d'un point et d'aller en général au plus proche, tout en se gardant une possibilité, faible, de prendre un autre chemin.
8. **Peut-on passer, une fois et une seule, par chacune des arêtes rouges ?**
   Non, et c'est une réponse dont on sait obtenir une réponse facilement. C'est Leonhard Euler qui a trouvé une méthode. Un tel chemin, quand il existe, est dit Eulérien en son honneur. Si un tel chemin existe, sauf peut-être pour le sommet de départ et celui d'arrivée, tout chemin qui amène en un sommet doit être suivi par un chemin qui en part et donc tous les sommets, sauf au plus deux doivent avoir un nombre pair d'arêtes autour d'eux. En fait c'est deux exactement, ou aucun. Or le Luxembourg, l'Italie, la Slovénie ... sont des exemples de sommets entourés d'un nombre impair d'arêtes.
9. **Quelle est la longueur du plus petit chemin passant par toutes les arêtes rouges ?**
   C'est le problème du postier chinois, qui est un problème de même nature que la recherche d'un chemin eulérien (question 8).
10. **Comment calculer le plus court chemin entre deux villes d'Europe ?**
   Ici aussi c'est un problème dont on connaît une réponse de nature algorithmique, autrement dit : on a une recette pour le trouver.  Dans la pratique, par exemple dans les logiciels sur internet, on stocke en mémoire les trajets optimaux entre des villes éloignées, entre les villes d'une région et il ne reste qu'à ajuster les petits

détails.

11. **Comment installer les relais de télécommunication de façon à assurer la plus grande couverture réseau ?**
On opère un relevé de l'existant et on crée ainsi un graphe. Le graphe dual est obtenu en entourant chaque sommet du précédent par les points qui sont le plus proche de lui (par rapport aux autres sommets) ou encore en traçant des arêtes correspondant aux points dont la distance minimale aux sommets est réalisée en au moins deux sommets. Les sommets du graphe dual sont des endroits naturels où installer de nouveaux relais.
12. **Combien le graphe rouge compte-t-il de sommets, d'arêtes et de faces (régions) ?**
S=12, A=23, F=.13 (il faut compter la région à l'extérieur du graphe).
13. **Dans un graphe dessiné sur une feuille, on compte S, A et F les nombres de ses sommets, arêtes et faces. Pourquoi a-t-on toujours S+F=A+2 ?**
C'est la relation d'Euler. Pour le voir, enlevons un sommet intérieur au graphe et les arêtes qui y aboutissent. Il y a en fait autant d'arêtes qu'il y a de faces autour du sommet. Notons ce nombre *n*. En enlevant le sommet on fait donc chuter S de 1, F de *n-1* (puisque n faces fusionnent en une seule face) et A de *n*. Donc S+F et A+2 chutent tous les deux de *n*. En effaçant tous les sommets intérieurs, on fait donc chuter S+F et A+2 de la même quantité. Si maintenant il n'y a que des sommets sur le bord,on efface les arêtes intérieures une à une. Ce faisant on fusionne des faces une à une. Autrement dit on fait descendre F et A de 1 sans toucher à S. On a donc diminué S+F et A de la même quantité. Il ne reste donc plus qu'un polygone. Dans ce cas on a F=2 et S=A et donc S+F=A+2. Cette relation est donc vraie en général.
14. **Quels sont les cinq types de solides dont toutes les faces sont identiques et tous les sommets aussi ?**
Tétraèdre, cube, octaèdre, dodécagone et icosaèdre. En ne considérant que les polyèdres réguliers convexes. Sinon il faut en rajouter quatre autres (étoilés).
15. **Peut-on trouver trois pays tous reliés entre eux ? Quatre ? Cinq ?**
France-Belgique-Luxembourg-Allemagne est un exemple pour 3 et 4. Pour 5 c'est impossible car un tel graphe ne peut pas être dessiné sur une feuille de papier. En effet on aurait S=5 et A=10 et donc F=7. Comme chaque face étant délimitée par au moins 3 arêtes, on pourrait compter au moins 21 arêtes, mais ce faisant on les compterait deux fois, puisqu'une arête est commune à deux faces. On aurait donc au moins 11 arêtes (21/2=10,5 et le nombre d'arêtes est entier), ce qui n'est pas le cas.
16. **Peut-on trouver deux groupes de deux pays tels que :**
**- dans un même groupe, il n'y a aucune connexion**
**- entre deux groupes différents, toutes les connexions possibles existent ?**
France-Autriche et Italie-Allemagne convient.
17. **Et avec deux groupes de trois ? de quatre ? de cinq ?**
Non, un tel graphe n'est pas planaire. Il suffit de le voir pour 3. On aurait S=6 et A=9 et donc F=5. Mais une face est délimitée par des arêtes successives, faisant un chemin revenant à son point de départ. Si on part d'un sommet d'un des deux groupes, la première arête amène à un sommet de l'autre groupe, la deuxième revient dans le premier groupe, la troisième repart dans le second etc. Une face a donc un nombre pair d'arêtes, donc au moins 4. D'où au moins 10 arêtes (4x5=20 et 20/2=10) d'après le raisonnement précédent (question 15). Puisqu'on ne peut pas tracer un graphe pour 3, et qu'un graphe pour 4 et 5 contient bien sûr un graphe pour 3, ces derniers ne peuvent pas non plus être tracés.

- **Et les ballons de foot ?**
Ce sont des dodécaèdres tronqués. Pour un dodécaèdre on a F=12 (c'est le sens

de « dodéca »), A=30 et S=20. Chaque face est un pentagone et de chaque sommet partent trois arêtes (et se joignent trois pentagones). On coupe le dodécaèdre près de chacun de ses sommets, le remplaçant par un hexagone. On a donc 12 pentagones et 20 hexagones.

- **Quel rapport avec les Sudoku ?**
  Remplir de façon automatique un Sudoku est assez difficile, surtout si on veut pouvoir le faire pour un Sudoku de taille arbitraire (nxm et non 3x3). C'est en fait aussi difficile que de trouver un chemin hamiltonien sur un graphe. On parle de problème NP-complet. Bien sûr pour les Sudoku ordinaire, tout ordinateur sait en trouver la solution très rapidement !
- **Et pourquoi les molécules d'alcool ont toujours un nombre pair d'atomes d'hydrogène ?**
  Une telle molécule est formée de C atomes de carbone, O atomes d'oxygène et H atomes d'hydrogène. Un atome de carbone est relié à quatre voisins (que l'on autorise à être identiques dans le cas d'une liaison dite double), un atome d'oxygène est relié à deux voisins et un atome d'hydrogène à un seul voisin. L'ensemble forme un graphe d'un seul tenant (on parle de graphe connexe). Si on compte le nombre d'arêtes, on peut le faire à partir des atomes. Dans ce cas on compte chaque arête deux fois. On a donc 2A=H+2O+4C et donc H est pair.

Pour plus de détails, vous pouvez consulter les références données sur ce site, ou nous contacter : francois.sauvageot@univ-nantes.fr .