

CARTOGRAPHIE

1. Peut-on prendre un globe terrestre et y appliquer une feuille de papier pour décalquer la Terre?

Non. Gauss a expliqué pourquoi en introduisant la notion de courbure. Celle de la feuille de papier est nulle, tandis que celle du globe terrestre est calculée grâce au rayon de la terre.

2. Peut-on faire une carte de la Terre en préservant les rapports d'aires, les rapports de longueurs et les angles ?

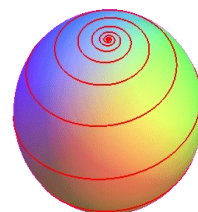
Aucune projection ne peut préserver les longueurs, en raison de la courbure : c'est une autre façon de poser la Question n°1. Par contre une projection peut préserver les surfaces, il s'agit alors d'une projection équivalente, ou bien préserver les angles, il s'agit alors de projection conforme, mais aucune ne peut préserver les deux à la fois.

3. Pourquoi les navigateurs ont-ils besoin de cartes préservant les angles ?

Pensons au navigateur solitaire sur son voilier qui doit essayer de prendre quelques heures de repos et qui a épuisé ses batteries de GPS. Il choisit sur sa carte marine, réalisée par projection de Mercator, un trajet qui fait un angle constant avec les méridiens : un tel trajet est appelé loxodromie. Il est représenté par un segment de droite sur sa carte. Notre navigateur peut alors sélectionner son trajet pour éviter les récifs potentiels. Comme ce trajet fait un angle constant avec les lignes de méridiens, il fait aussi un angle constant avec le champ magnétique terrestre. Le navigateur peut donc utiliser son compas pour se fixer une route faisant cet angle donné avec le champ magnétique terrestre et il peut aller se coucher.

4. A quoi ressemble cette trajectoire sur une carte maritime ?

À une droite ! Elle fait un angle constant avec les méridiens. Vue en projection stéréographique, c'est une spirale logarithmique.

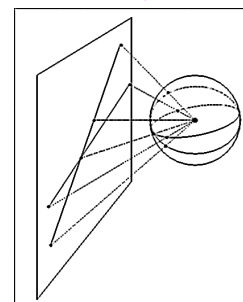


5. Le projection sur un tube de papier préserve-t-elle les aires ?

Oui ! C'est la projection équivalente de Lambert.

6. A quoi peut bien servir une projection gnomonique ?

Elle transforme les grands cercles, c'est-à-dire les cercles centrés en le centre de la terre, en des droites. Autrement dit elle transforme les plus courts chemins en plus courts chemins. Mais le prix à payer est que ni les aires, ni les angles ne sont préservés.



7. Sur une carte routière, le plus court chemin est-il la ligne droite ?

Non ! C'est un arc de cercle. La ligne droite est une loxodromie sur le globe terrestre. Le plus court chemin sur une sphère est l'arc de grand cercle passant par les deux points considérés.

8. Les français utilisent-ils le même procédé cartographique que les autres européens ?

Non ! Les français utilise la projection conique conforme de Lambert tandis que le reste du monde (ou presque) utilise la projection de Mercator (qui est aussi conforme).

9. Comment mesurer la surface d'une étendue terrestre ?

Par triangulation.

10. Quel point commun entre un flocon de neige, une fougère et des côtes maritimes ?

Ils sont, en une certaine mesure, auto-similaires, c'est-à-dire qu'en les regardant à

la loupe on les retrouve, à l'identique.

11. Lors d'une marée noire comment calculer les kilomètres de côte qui seront touchés ?

Les fractales, comme les chemins côtiers, possèdent une propriété qui relie leurs dimensions caractéristiques. Sur un segment, si on le découpe en 2, 3 ou 4 parties, chacune aura comme longueur la moitié, le tiers ou le quart de celle du segment initial. Dans un carré, si on le découpe en carrés dont les diagonales sont divisées par 2, 3 ou 4, les petits carrés auront des aires égales à celle du grand carré divisé par 4, 9 ou 16, autrement dit par le carré du nombre précédent. Dans un cube, ce serait le cube du nombre précédent. Pour un chemin côtier, c'est aussi une puissance mais ce n'est ni 1, ni 2, ni 3, mais un nombre intermédiaire en celui du segment et celui du carré, c'est-à-dire compris entre 1 et 2. C'est sa dimension fractale.

12. Entre les abers bretons et les fjords norvégiens, lesquels sont les plus découpés ?

Il faut calculer leur dimension fractale. La Bretagne est aux alentours de 1,2 (ou 1,3 pour Camaret) tandis que la Norvège est vers 1,3. Les fjords sont donc plus découpés que les abers. Pour le calculer il faut mesurer sur des cartes la longueur vue par quelqu'un qui marche avec des pas réguliers : le nombre de reports de compas entre deux points de la côte. Ensuite il faut faire varier la longueur du pas et voir si le rapport entre le nombre de pas varie comme le rapport entre la longueur du pas à une certaine puissance. Exemple : 18 pas de 3cm et 72 pas de 1cm : $72/18=4$ et $3/1=3$ et $4=3^d$, pour $d=\log(4)/\log(3)=1,26$.

13. Combien de satellites nécessite l'utilisation d'un GPS ?

Si on a une horloge atomique, trois suffisent : l'intersection de 3 sphères est constituée de 2 points, l'un est la position, l'autre n'est pas au voisinage de la terre. Sinon il en faut 4 : un autre pour calculer l'heure précise. Autrement dit on regarde l'intersection de 4 sphères dans l'espace-temps.

14. A-t-on besoin de la relativité d'Einstein pour faire fonctionner un GPS ?

En fait oui ! Les vitesses des satellites sont grandes et on a besoin d'une correction relativiste : les horloges embarquées sont plus lentes que les horloges terrestres (relativité restreinte). La masse de la terre est importante et on a besoin des corrections prévues par la relativité générale qui prédisent une accélération des horloges embarquées. Les deux effets vont en sens contraire mais ne se compensent pas : il faut en tenir compte !

15. Un GPS permet-il de se dispenser d'un altimètre en montagne ?

Non ! Sa précision est de 20 mètres : largement de quoi tomber dans une crevasse.

16. Quelles sont les unités utilisées par les GPS ?

Le système est le WGS84 (World Geodetic System 1984). C'est un système cartésien centré sur le centre de masse de la terre (océan et atmosphère inclus), les distances sont en kilomètres.

17. Les GPS font-ils des erreurs volontaires ?

Jusqu'à une décision de Bill Clinton la précision des GPS était volontairement restreinte à 100m. Il reste des imprécisions dues aux mesures et à la méthode.

- **L'art**

On a de jolies applications des fractales en art, notamment via l'itération de fonctions : on itère une transformation composée de plusieurs similitudes.

- **Cadran solaire digital**

Ça existe déjà et est vendu 91€. L'idée est qu'on peut construire un objet dont les projections (dans toutes les directions) sont fixées. L'heure solaire (qui dépend aussi de la date) correspond à une direction du soleil dans le ciel et tout ce qu'on a

à faire est de construire un objet dont l'ombre est l'heure écrite en chiffres ! Cet objet est essentiellement fractal ...

- **Compression de données**

La compression peut se faire en cherchant des éléments auto-semblables. On stocke une image (petite) et les transformations qui vont avec. L'image finale est la superposition des images et de leurs transformées. C'est idéal quand on a affaire à une fractale, comme une fougère. Néanmoins le standard JPEG utilise la transformation de Fourier discrète, ce qui est différent comme approche.

Pour plus de détails, vous pouvez consulter les références données sur ce site, ou nous contacter : francois.sauvageot@univ-nantes.fr .